Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Economia
Dissertação de Mestrado

Modelos de Crescimento Econômico sob o Princípio da Demanda Efetiva e do Excedente
Uma Análise Formal

Maria Aparecida Couto

Rio de Janeiro

Agosto de 2014

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Economia

Dissertação de Mestrado

Modelos de Crescimento Econômico sob o Princípio da Demanda Efetiva e do Excedente
Uma Análise Formal

Maria Aparecida Couto
Orientador: Prof. Dr. Ricardo Figueiredo Summa

Rio de Janeiro
Agosto de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

C871 Couto, Maria Aparecida.
Modelos de crescimento econômico sob o princípio do excedente e da demanda efetiva /
Maria Aparecida Couto. – 2014.
115 f. ; 31 cm.

Orientador: Ricardo Figueiredo Summa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Economia,
Programa de Pós-Graduação em Economia, 2014.
Bibliografia: f. 104-106.

1. Desenvolvimento. 2. Crescimento econômico. 3. Demanda efetiva. I. Summa,
Ricardo Figueiredo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Economia.
III. Título.

CDD 330.9

Maria Aparecida Couto

Modelos de Crescimento Econômico sob o Princípio da Demanda Efetiva e do Excedente
Uma Análise Formal

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação do Insitutto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências Econômicas.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr.Ricardo Figueiredo Summa (orientador)- UFRJ
- Porf. Dr. Fábio Neves Perácio de Freitas - UFRJ
- Prof. Dra. Julia De Medeiros Braga- UFRJ

Rio de Janeiro

Agosto de 2014

As opiniões expressas neste trabalho são de exclusiva responsabilidade do autor.

Dedico esse trabalho ao meu gato Fausto - branco de olhos amarelos, com planta das patas, orelhas e nariz rosados-, que muito em breve não estará mais comigo.

“Eppur si muove.- (E, no entanto, ela se move.)”
Frase, murmurada, atribuída a Galileu Galilei após ter negado a teoria de que a Terra girava em torno do Sol.

Agradecimentos

Como não podia deixar de ser, muitas pessoas contribuiram para que esse trabalho fosse concluído. Como não há espaço suficiente para uma listagem completa, segue abaixo alguns dos que foram imprescindíveis:

- Agradeço ao Centro de Tecnologia Federal do Rio de Janeiro - CEFET-RJ, através do Departamento de Ciências Básicas e Gerais e, mais recentemente, do Departamento de Matemática, por ter me liberado parcialmente de minha carga horária como docente, tornando possível a conclusão desse curso de Mestrado.

- Meus sinceros agradecimentos ao Professor Roberto Thomé, chefe do referido Departamento de Matemática e também grande amigo, que, além de flexibilizar os horários das aulas dos cursos que ministrei, me foi de grande ajuda com o programa MatLab.

- Aos professores Mario Luiz Possas e Antonio Luis Licha, agradeço pela disposição em ler parte do meu trabalho, dar sugestões e, principalmente, me ouvir em momentos delicados desse trajeto.

- À Professora Marta Castilho que me proporcionou participar de um encontro em Teoria dos Jogos onde esteve presente John Nash. O acaso impediu minha participação, no entanto, agradeço o empenho.

- A meus jovens amigos Thaís Oliveira, Lucas Rueda, Regina e Vinícius Cunha. Meu muro de lamentações - bem bonito, por sinal. Meus sinceros agradecimentos.

- Naturalmente agradeço ao professor Ricardo Summa que se dispôs a orientar esse trabalho.

- E por fim agradeço a Roberto Souza Sá Barrêto. Sem ele, certamente tudo teria sido muito mais árduo.

Grata a todos.

Resumo

De uma forma geral, os modelos de crescimento econômico buscam descrever um processo dinâmico onde as variáveis apresentem, em longo prazo, trajetórias estáveis em torno de uma tendência. Nessa direção muitas são as visões que definem tais modelagens. Dentre essas existem as que são norteadas pelos princípios da demanda efetiva e do excedente - casos particulares de modelos de crescimento liderados pela demanda. Em vista disso, o objetivo principal desse trabalho é analisar formalmente alguns resultados presentes na literatura econômica, acerca desses últimos, e apresentar o Supermultiplicador Sraffiano, modelo representante dessa vertente, que descreve satisfatoriamente o processo de acumulação de capital.

Summary

In general, the economic growth models seek to describe a dynamic process where the variables present in long-term, stable trajectories around a trend. In this direction there are many visions that define such modeling. Among these there are those guided by the principles of effective demand and the surplus which are particular cases of models growth led by demand. In view of this, the main objective of this work is to formally analyze some results about these modeling and present the Sraffian Supermultiplier, a representative model of this school, which satisfactorily describes the process of capital accumulation.

Sumário

Introdução

O objetivo maior dessa dissertação é uma análise formal - matemática - de alguns resultados presentes na literatura econômica em relação a alguns modelos de crescimento econômico fundamentados no princípio da demanda efetiva e do excedente.

Na verdade muitos desses resultados são frutos de um debate que se instaurou a partir do surgimento do modelo de Harrod de 1939. Tal modelo apresenta uma junção entre o multiplicador keynesiano e o princípio da aceleração, que permitia, segundo Serrano e Freitas(2010), captar o caráter dual do investimento, na medida em que o multiplicador trata do investimento como um componente da demanda agregada da economia, enquanto que o acelerador o considera como gerador de capacidade produtiva.

O principal problema, colocado por Harrod, foi o da instabilidade fundamental que o modelo por ele descrito prescrevia caso o sistema atuasse com uma taxa de crescimento distinta de uma taxa - também por ele denominada- garantida e definida por $g_w = \frac{s}{v}$, Tal taxa garantiria um crescimento equilibrado entre demanda e capacidade produtiva, mas, segundo Serrano e Freitas (2010), refletiria apenas as condições de oferta, fato paradoxal, na medida em que a ideia de Harrod era a de estender para o longo prazo as conclusões keynesianas outrora desenvolvidas para o curto prazo[1]. Essa instabilidade seria consequência da suposição de Harrod de que o investimento agregado era totalmente induzido e sensível ao grau de utilização da capacidade.

Dessa forma, a necessidade de formular soluções ou respostas aos obstáculos teóricos da instabilidade fundamental e da não viabilidade do princípio da demanda efetiva em longo prazo, levou ao surgimento de teorias pós-keynesianas de crescimento econômico.

A ideia de tais teorias seria apresentar uma modelagem do processo econômico que, em longo prazo, exibisse uma dinâmica onde as taxas de crescimento das componentes da demanda agregada fossem as responsáveis pelo processo de acumulação de capital. Naturalmente a forma como essas visões se desenvolveram não foi homogênea. A complexidade e a natureza das componentes da demanda agregada levaram a que surgissem distintas teorias de crescimento econômico.

Assim, uma das correntes considerarou que tais problemas poderiam ser solucionados se

[1]De fato para Serrano (1996), tal taxa garantida leva à conclusão de que em longo prazo a lei de Say é válida.

o gasto em investimento fosse totalmente autônomo. Nessas condições, para esses autores, segundo Serrano e Freitas (2010), o nível e a taxa de crescimento do investimento seriam determinados exogenamente por fatores como as margens de lucro, taxa de juros, as disponibilidade de crédito, ou por fatores psicológicos como incerteza, espírito de empreendimento, ou ainda por fatores relacionados ao processo de concorrência capitalista tais como mudanças tecnológicas, além de fatores históricos e políticos. Tais vertentes que consideraram os investimentos produtivos como autônomos, foram, a princípio, a escola de Cambridge e a escola de Oxford.

Os autores ligados à escola de Cambridge supunham que em longo prazo existiria uma tendência das economias a uma completa utilização da capacidade produtiva. Nesse sentido o ajuste entre demanda agregada e capacidade produtiva se daria a partir da variação da distribuição da renda. Várias são as críticas inerentes a esse tipo de modelo[2], que são de ordem tanto empírica quanto teórica.

Em vista disso, uma alternativa para um modelo de crescimento liderado pela demanda seria aquele onde o investimento produtivo privado fosse totalmente induzido, mas com a presença de gastos autônomos não produtivos. Esse tipo de modelo foi denominado de modelo do supermultiplicador, uma vez que uma parte do consumo e o investimento produtivo, sendo considerados induzidos, produziriam elevações, na renda subsequente, consideravelmente maior.

O modelo liderado pela demanda com a presença do supermultiplicador foi primeiramente teorizado por Hicks em 1950. Contudo o modelo de Hicks,

> ... apesar de ter investimento induzido, de maneira não muito coerente, o componente autônomo da demanda também consistia de investimentos que criavam capacidade e ainda por cima arbitrariamente se supunha que este crescia à taxa natural (produtividade mais crescimento da força de trabalho). O único motivo para isso era a (infundada) fé de Hicks que um modelo de demanda efetiva só poderia servir para explicar as flutuações cíclicas de curto prazo mas não a tendência de crescimento da economia.(Freitas e Serrano, 2010:p. 8).

Dessa forma, um modelo de crescimento liderado pela demanda com o objetivo de descrever a tendência do comportamento do processo econômico de longo prazo foi idealizado por Franklin Serrano em 1995 e denominado de Supermultiplicador Sraffiano. O termo supermultiplicador seria uma referência, ao já descrito nas linhas acima, de o modelo contemplar, além do consumo, o investimento produtivo como totalmente induzido. A presença dos gastos autônomos que não criam capacidade produtiva seria a diferença fundamental do modelo de Harrod. Por fim, o termo Sraffiano denotaria o fato de o modelo, diferentemente da teoria de Cambridge, considerar a distribuição entre salários e lucros como exógenos ao processo. De

[2]Ver por exemplo Serrano e Freitas(2010), que tece uma resenha bastante pertinente sobre os problemas empíricos e teóricos que acompanham esse tipo de modelagem

forma similar, Bortis(1995) e DeJuan - que no trabalho de 2005, alega ter chegado aos mesmos resultados de Serrano-, elaboraram modelos com resultados similares ao proposto por Serrano.

Contudo a partir da publicação de Serrano(1995) com a descrição do Supermultiplicador Sraffiano, um debate sobre a validade dos conceitos de estabilidade e convergência para um grau normal de utilização da capacidade produtiva, em longo prazo, descrita por esse modelo, começou a ser travada.

Em sua versão original, o modelo de Serrano postula que em longo prazo o processo de acumulação de capital é liderado pela demanda, com as taxas de crescimento da economia descrevendo trajetórias estáveis, onde o grau de utilização da capacidade produtiva orbita em torno de um valor, denominado de normal, na medida em que contempla uma capacidade ociosa planejada do processo produtivo[3]. De fato, o autor considera que em longo prazo, o grau real de utilização da capacidade produtiva, em média, não se afastaria substancialmente do grau normal/planejado. Essa visão do autor bem como a forma como foi definido o mecanismo de ajuste do sistema, além da consideração de que em seu modelo original, o processo tratava apenas de capital circulante, levou a que surgissem na literatura, algumas críticas ao modelo.

Um dos críticos mais contundentes foi Attilio Trezzini. Esse autor publicou em 1998, na revista Contributions to Political Economy de número 17 uma resenha científica onde coloca em cheque o ajustamento do modelo a um grau de utilização normal, caso haja uma mudança na taxa de crescimento dos gastos autônomos. Em outros termos, Trezzini entende que o modelo de Serrano é similar ao modelo de Hicks[4],onde taxas distintas da taxa garantida não levam o sistema a operar com um grau de utilização normal. O cerne da questão proposto por Trezzini é que, em longo prazo, dada uma capacidade produtiva inicial, a mudança da taxa garantida para uma maior - ou menor - levaria a que o grau de utilização da capacidade apresentasse variabilidade tal que, por longos períodos, haveria uma sobre utilização - ou subutilização- da capacidade. Tal variabilidade durante essa fase resultaria em um grau médio de utilização certamente distinto do grau normal de utilização da capacidade produtiva. Além disso, segundo o autor, o processo de ajustamento do grau de utilização ao grau normal, dada uma nova taxa de crescimento - distinta da garantida - poderia levar um tempo muito grande para ser atingida:

> It must be noted here that the quantitative dimensions of the changes in the level of capacity which would be needed to re-establish conditions of growth

[3]Esse grau normal de utilização da capacidade produtiva significa considerar que em nível macro o sistema produtivo não funciona em sua plena capacidade. Existe uma capacidade ociosa planejada que tem como objetivo atender a choques positivos da demanda. Em nível micro, as firmas, individualmente, se preocupam em operar com uma capacidade ociosa no objetivo de atender a picos da demanda e, então, não perder mercado para a concorrência. Naturalmente, esses modelos de crescimento pressupõem por simplificação a concorrência perfeita.

[4]O autor entende que o modelo de Serrano, salvo insignificantes diferenças, exibe o mesmo comportamento do modelo do supermultiplicador de Hicks.

> with normal utilisation seem very relevant, at least in the case of fixed capital. Assuming, for example, a change in the rate ga from 0.05 to 0.06, and assuming that a = 2, and s = 0.2, in order to re-establish normal utilisation immediately, an increase in capacity and capital stock of 32.5%would be necessary; whereas corresponding to a successive decrease in the rate from 0.06 to 0.04, a decrease of 30.7% of the levels of those aggregates would be in order. There would obviously be consistent changes in the sectoral composition of these levels of capacity corresponding to the variations in the levels themselves. Changes in capacity of this size would seem possible, even assuming perfect foresight on the part of the firms, only after a very long interval of time. Through long phases of over- or under-utilisation of capacity it is conceivable, in principle and in particular circumstances, that the capacity will adjust to the new trend of demand, re-establishing conditions of normal utilisation. (Trezzini,1998:59-60)

Dessa forma, Trezzini entendia que o modelo de Serrano postulava um processo de ajuste do grau real de utilização da capacidade para o grau normal ou planejado de forma muito rápida, fato que para ele se mostrava irrealista, uma vez que as simulações por ele realizadas apontavam para um ajuste em tempo relativamente grande.

Quanto à estabilidade do modelo de Serrano, autores como Barbosa(2004) e Schefold (1999) consideraram que a função investimento proposta, trazia embutida em sua definição um acelerador rígido que fazia com que o processo fosse, como no modelo de Harrod, instável se a taxa dos gastos autônomos fosse distinta da garantida.

Destarte todas as críticas, o modelo do Supermultiplicador persistiu e sofreu algumas alterações. Em trabalhos subsequentes, Serrano considerou não mais capital circulante e sim, capital fixo. Também a hipótese ou ideia do acelerador flexível foi reforçada para evitar qualquer dúvida acerca do ajustamento gradual da capacidade à demanda. Em tempos mais recentes, juntamente com Fábio Freitas, o supermultiplicador de Serrano ganhou uma abordagem mais formal - um tratamento dado via a teoria determinística dos sistemas dinâmicos.

Tendo em vista esse viés evolutivo[5], nesse trabalho, tentaremos seguir os argumentos que delinearam o desenvolvimento dessa teoria sob o ponto de vista da análise matemática[6]. Na verdade a ideia é verificar se os modelos de crescimento liderados pela demanda - distintos da visão da escola de Cambridge, onde o ajuste se dá via variação na distribuição de renda -,apresentam, de fato, em sua dinâmica de longo prazo, trajetórias estáveis com um grau de utilização tendendo para o grau normal da capacidade produtiva.

[5]Vale ressaltar que além desses, outros tipos de modelos de crescimento liderados pela demanda -por exemplo os neo marxistas ou novos kaleckianos- foram elaborados.

[6]Aqui cabe notar que a análise matemática emprega critérios de convergência. Critérios de convergência pressupõem tempo infinito, logo, trata-se de um instrumento determinístico abstrato que pode não caracterizar com precisão os fenômenos econômicos. Contudo, tem sua eficácia na medida em que pode fundamentar ou invalidar argumentos, principalmente em modelos que fazem uso desses mesmos instrumentos - como em modelos que utilizam a teoria dos sistemas dinâmicos, por exemplo.

Para a realização dos objetivos propostos faremos uso de três capítulos, além dessa introdução e de uma sucinta conclusão. O primeiro capítulo será apenas uma apresentação do viés diretivo dos modelos a serem analisados, ou seja, modelos de crescimento econômico liderado pela demanda, fundamentados no princípio da demanda efetiva e do excedente. Nele serão definidos vários conceitos utilizados ao longo do trabalho. De fato, o principal objetivo desse capítulo é de ordem didática: fornecer ao leitor, em um único texto, conceitos que usualmente estão dispersos na literatura econômica.

No segundo capítulo, faremos uma análise dos requisitos necessários para que um modelo de crescimento econômico liderado pela demanda apresente, em sua dinâmica, equilíbrios estáticos. Nessa análise surgirão de forma natural, os modelos de crescimento que denominamos de modelos liderados pela demanda a partir dos investimentos.

As condições necessárias para a existência de equilíbrios estáticos, com a possibilidade de um grau de utilização convergente para um grau normal, levam a outro tipo de modelo: o modelo de crescimento liderado pela demanda via gastos autônomos. O representante específico desse tipo de modelo é o, já mencionado nas linhas anteriores, modelo de Serrano(1995)- o Supermultiplicador Sraffiano. Dessa forma, no terceiro capítulo será feita uma análise geral de tal modelo, além de considerar outros, a ele similares, que apresentam diferenças na definição da função investimento.

Uma conclusão bastante sucinta finaliza a dissertação.

1 Demanda Efetiva, Produto e Capacidade Produtiva em Economias Fechadas

Esse capítulo tem dois objetivos. A primeira é a de delinear a visão econômica diretriz desse trabalho: visão heterodoxa fundamentada nos princípios do excedente e da demanda efetiva. O segundo é o de definir alguns dos principais conceitos que serão utilizados ao longo dessa dissertação.

Essa meta será realizada em duas seções. Na primeira, o processo produtivo será considerado sob um viés mais técnico, onde os protagonistas serão os fatores de produção e o investimento em capital físico. Apenas o princípio do excedente e a hipótese da não escassez de mão de obra serão, então, discutidos. Na segunda seção, o processo será considerado sob a validade do princípio da demanda efetiva. Tal princípio confere aos componentes da demanda agregada naturezas e influências distintas na dinâmica do processo de crescimento econômico: sofrem diferentes restrições ao nível de crescimento e influenciam de forma distinta a variação da capacidade produtiva e o grau de utilização dessa capacidade. Em vista disso, uma análise de cada uma delas será realizada, no objetivo de sintetizar os principais entraves às decisões de investimento produtivo.

1.1 Capacidade Produtiva e Produto Potencial

De uma forma geral, a capacidade produtiva de uma economia está diretamente relacionada à quantidade de recursos naturais, humanos e tecnológicos disponíveis, que possibilitam o funcionamento do processo produtivo. Tais recursos são denominados fatores de produção e podem ser, em linhas gerais, classificados em capital e trabalho. Por sua vez o capital pode ser reclassificado em capital fixo e capital circulante:

Definição 1.1.1 Capital fixo *O capital fixo, K_f, é o capital físico não consumido durante um ciclo de produção. São os edifícios, máquinas e equipamentos.*

Definição 1.1.2 Capital circulante *O capital circulante, K_c, são os ítens utilizados na produção, tal como insumos e bens intermediários destruídos no processo de produção de outros bens.*

A partir desses fatores, presentes em um sistema econômico, definimos o produto potencial de uma economia, em um determinado período.

Definição 1.1.3 Produto Potencial *Dados os fatores e a tecnologia que estabelece os métodos de produção, o produto potencial, Y^*, de uma economia, em um determinado período, é definido pelo produto máximo que se pode obter com o emprego de quantidades disponíveis desses fatores.*

Naturalmente essa definição não implica em que a quantidade total de todos os fatores de produção seja empregada. Contudo, para a teoria neoclássica - ou marginalista-, em longo prazo, e em condições competitivas, todos os fatores são necessariamente escassos e o produto máximo, ou potencial, é alcançado através do pleno emprego dos fatores de produção disponíveis. Tal fato ocorre porque essa teoria pressupõe uma função de produção extremamente bem comportada, admitindo infinitos métodos que geram o mesmo produto. Assim, é sempre possível a utilização de um método distinto que permite incorporar, ao processo produtivo, proporções maiores do fator menos escasso. Logo, em longo prazo, a recorrente mudança de métodos, faz com que haja a plena utilização de ambos os fatores. Vale ressaltar que a utilização de um novo método, que usa proporções maiores do fator menos escasso e ainda assim gera o mesmo produto, implica necessariamente em que a produtividade do fator que teve uma quantidade adicionada diminua. Como os capitalistas são maximizadores de lucros, para que seja possível tal mecanismo, é necessário que o preço desse fator varie diretamente com a sua produtividade marginal. Esse é o mecanismo do “princípio da substituição, que permite a construção das curvas de demanda pelos fatores que, contrapostas com suas dotações, determinam simultaneamente o preço relativo e a quantidade utilizada de cada fator de produção”(Serrano:2008b, p3). Em linhas gerais essa é a descrição do funcionamento, em sua forma direta, do princípio da substituição[1] que fundamenta essa visão teórica.

Por outro lado, considerar que os fatores de produção possam sempre ser substituídos proporcionalmente através de uma infinidade de métodos de produção, não se configura uma hipótese muito realista. Uma dada tecnologia, quando muito, permite no máximo um número finito de métodos de produção. Isso porque as grandezas que compõem as dotações dos fatores são, em linhas gerais, finitas e discretas. Nesse sentido é mais sensato considerar que os

[1]Para mais detalhes, além de Serrano (2008b), ver também Summa e Lucas (2010)

fatores de produção se complementem no processo produtivo. Além disso, o preço do fator não mantém nenhuma relação direta com sua demanda ou oferta, isto é, não necessariamente a queda do preço de um fator implicará no aumento da demanda por esse fator. Dessa forma, mesmo em longo prazo, o produto máximo da economia pode se dar aquém do pleno emprego.[2]

Para justificar tal argumento, considere um esquema simplificado onde quantidades fixas dos dois fatores, capital e trabalho são disponíveis. Considere também um único[3] método de produção em uso. Por esse método pode ocorrer de um dos fatores ser relativamente menos escasso que o outro. Nesse caso, apenas parte da dotação desse fator será utilizada no processo produtivo e o produto máximo se dará com desemprego desse último. Na verdade, o fator, relativamente ao método de produção, em maior quantidade, complementará o outro no processo produtivo e poderá não ser plenamente empregado.

Nessas condições, uma definição adequada para o produto potencial, em um período onde não há variação na quantidade dos fatores, seria[4]

$$Y^* = min(Y^L, Y^K), \tag{1.1}$$

ou seja, o menor dos produtos obtidos pela plena utilização do capital e ou do trabalho.

Nota: O produto potencial obtido com a plena utilização do fator capital,Y^K, se dá, na verdade, com a plena utilização do capital fixo, uma vez que o capital circulante é consumido no processo de produção[5].

Além da complementariedade entre os fatores, outro fato que caracteriza a realidade nos sistemas capitalistas é a de o fator trabalho, em longo prazo, não ser escasso. Esse ponto de vista, teoricamente, está em acordo com o princípio do excedente:

Definição 1.1.4 Princípio do Excedente *Utilizado pelos economistas clássicos - de Petty até Ricardo - e retomado por Marx, esse princípio assegura que o excedente é determinado pelas*

[2]Na verdade o que se observa historicamente é que em tempos de recessão econômica, o poder de barganha dos trabalhadores enfraquece ocasionando a queda dos salários sem que haja absorção - incluso com possíveis quedas - de um montante maior de mão de obra.

[3]Na verdade pode ser considerado um número finito de métodos em uso

[4]Ver Serrano(2008b), onde essa definição é mais detalhada.

[5]Poderia se cogitar que em uma economia fechada $Y^K = min(Y^{K_f}, Y^{K_c})$, onde K_f = capital fixo e K_c = capital circulante, contudo se houvesse, relativamente, mais capital fixo do que capital circulante, a questão seria saber porque se produziu esse capital fixo. Na verdade o produto potencial seria aquele com a plena utilização do capital fixo. O capital circulante em quantidade não suficiente só configuraria a situação normal em que se opera com capacidade ociosa. Nenhuma economia produziria um estoque de capital fixo se não tivesse a intenção de utiliza-lo plenamente em algum momento. A hipótese de o produto potencial se dar através do mínimo entre os dois tipos de capitais, só se justificaria em uma economia agrária, não mecanizada, onde o único capital fixo seria a terra. Mesmo nesse caso, teria que ser desconsiderado os instrumentos de trabalho manuais utilizados, desde muito tempo, na preparação da terra para a plantação.

condições técnicas de produção e por um salário real de subsistência. Através da competição, tal excedente é distribuído entre os vários tipos de rendas da propriedade por meio de um sistema de preços.[6]

Considerando válido o princípio do excedente,[7] o salário e ou os lucros são definidos de forma exógena, significando que, embora possam sofrer variações, não são resultados do equilíbrio entre a oferta e a demanda do mercado de trabalho. Assim, não é possível o funcionamento do princípio da substituição e, em vista disso, o produto potencial, em longo prazo, definido com desemprego de mão de obra, além de não significar entrave teórico, é condizente com a realidade dos sistemas econômicos.

Na verdade, o fenômeno da não escassez de mão de obra, existe tanto nas economias em processo de desenvolvimento como nas economias desenvolvidas. Os argumentos que o justificam são diversos. Um deles é a mobilidade regional e internacional da população economicamente ativa em busca de emprego.[8] Assim, regiões onde persiste, por determinado período, melhores oportunidades de alocação de mão de obra, tendem a ser atratores de populações que migram de regiões onde o capital instalado ou em funcionamento não é suficiente para alocar um mínimo satisfatório da mão de obra disponível. Além disso, as oportunidades de trabalho induzem a que alguns grupos sociais - jovens, mulheres casadas, trabalhadores com ocupação informal no setor urbano ou de subsistência no setor rural, por exemplo - que em momentos de grande desemprego, não fazem parte da população considerada economicamente ativa, voltem para o mercado formal de trabalho. Também a perspectiva de melhores condições de vida, propiciadas pelas oportunidades de ocupação, levam a um aumento na densidade demográfica que, em médio e longo prazo, aumenta a força de trabalho disponível.

Por outro lado, o processo de desenvolvimento do sistema capitalista, envolve a existência do progresso técnico. O progresso técnico atua aumentando a produtividade do trabalho. Se conjuntamente a esse aumento da produtividade do trabalho, a produtividade do capital tem aumento relativo maior, tal progresso técnico é poupador de trabalho. O progresso técnico poupador de trabalho libera mão de obra. Um exemplo dessa situação é a mecanização da agricultura, processo que levou e ainda leva à migração de grande contingente de mão de obra dos campos

[6] Para mais detalhes sobre o princípio do excedente, ver Serrano e Medeiros(2004).

[7] A validade do princípio do excedente, implica em que a distribuição de renda é definida exogenamente. A forma como essa distribuição exógena se dá, varia com os distintos tipos de abordagem. Algumas determinam que é o salário de subsistência que é determinado por forças políticas, institucionais ou históricas e portanto é a variável definida exogenamente, sendo a taxa de lucro endógena. Tem-se ainda outra abordagem onde a variável exógena relevante é a taxa de lucro, definida exogenamente, por exemplo, através da taxa de juros, definida pelo Banco Central, que a ela está vinculada. Esta última é uma visão defendida por Sraffa e Pivetti. Pode se dar, ainda, segundo a visão Kaleckiana onde margem de lucro das empresas é a variável exógena, definida pelo grau de monopólio e o salário é a variável endógena.

[8] Para mais detalhes ver Serrano(2008b)

para os meios urbanizados. Também a informatização e a substituição de pessoas por máquinas robotizadas no setor de serviços e na indústria, são processos que liberam e contribuem para a não escassez da mão de obra.

Além disso, historicamente não se observa restrições ao crescimento econômico, impostas pela escassez de mão de obra. Como exemplo se pode citar o período compreendido do pós-segunda guerra mundial até meados ou final da década de 1960 do século XX. Tal período caracterizou-se, nos países do norte ocidental, pelo desenvolvimento tanto econômico como social - através do advento do Estado do Bem Estar Social. Contudo, vale observar que a população - principalmente da Europa Ocidental - era remanescente de um povo que sobreviveu a um processo de imigração, iniciado no final do século XIX e intensificada no início do século XX, e que passou por duas guerras mundiais, o que certamente dizimou parte do contingente humano dessa região. Destarte esse fenômeno, a história mostra que isso não foi entrave ao estabelecimento de tal desenvolvimento. Na verdade, segundo Eric Hobsbawm:

> Depois da guerra, o desemprego tem sido o mais insidioso, o mais corrosivo mal de nossa geração: é a doença social específica da civilização ocidental em nosso tempo. The Thimes, 23.01.1947 (Hobsbawm, 2005:90)
>
> De qualquer modo, os benefícios materiais do crescimento levaram algum tempo para se fazer sentir. Na Grã-Bretanha, só em meados da década de 1950 eles se tornaram palpáveis... Além disso, a arma secreta de uma sociedade de riqueza popular, ou seja, de pleno emprego, só se tornou real na década de 1960, quando a média de desemprego na Europa Ocidental estacionou em 1,5%. Na década de 1950, a Itália ainda tinha quase 8% de desempregados. (Hobsbawm, 2005: 254).

A verdade é que, segundo Serrano e Medeiros (2004), a condição de abundância de mão de obra sempre foi clara tanto para os economistas clássicos como para as contemporâneas visões heterodoxas. Nas economias em desenvolvimento o excedente estrutural de mão de obra é inegável e nas economias desenvolvidas, além de períodos com alto índice de desemprego, os períodos de expansão econômica não apresentaram historicamente restrições ao crescimento impostas pela escassez da força de trabalho.

Nessas condições, a primeira restrição ao crescimento do produto potencial de uma economia capitalista é a escassez de capital, uma vez que, em longo prazo, a mão de obra é abundante.

Com a hipótese da não escassez do fator trabalho e sob a validade do princípio do excedente, temos que dadas as dotações de capital e trabalho, o produto potencial de um sistema econômico é dado pela plena utilização do estoque de capital fixo, que daqui para frente denotaremos simplesmente de K,[9] isto é, $Y^{*} = Y^{K}$, o que nos leva a uma definição mais específica

[9]Quando for preciso diferenciar entre os dois tipos de capitais, usaremos as notações das definições 1.1.1 e 1.1.2

de capacidade produtiva de uma economia:

Definição 1.1.5 Capacidade Produtiva. *A capacidade produtiva de um sistema econômico, em um período, é determinada pelo estoque de capital fixo ou instalado.*

Além disso, para um único [10] método de produção em uso, temos a seguinte relação técnica entre capital e produto potencial:[11]

Definição 1.1.6 Relação técnica entre capital e produto potencial. *É a relação dada pelo coeficiente:*

$$v = \frac{K}{Y^*}. \tag{1.2}$$

Dessa relação segue que

$$Y^* = \frac{1}{v}K.^{12}$$

Nessas condições, uma variação positiva no nível do produto potencial, é consequência de uma variação positiva do estoque de capital instalado, ou seja:[13]

$$\Delta Y^* = Y_t^* - Y_{t-1}^* = \frac{1}{v_{k_t}}[K_t - K_{t-1}] = \frac{1}{v_{k_t}}\Delta K.$$

A variação do estoque de capital, leva à definição de investimento produtivo:

Definição 1.1.7 Investimento Produtivo *Definimos investimento produtivo, como um processo que se inicia em um período $t-1$, e que produz em t, ou a variação do estoque de capital, $\Delta K_t = [K_t - K_{t-1}]$, ou a diminuição da capacidade ociosa. Em termos comportamentais pode-se definir tal investimento como consequência da decisão de ajustar o estoque de capital, em um período $t-1$, a um estoque de capital desejado para o período t, ou de diminuir a capacidade ociosa, presente em $t-1$.*[14]

Nota: O investimento produtivo pode configurar uma variação tanto no estoque de capital circulante, como no estoque de capital fixo, ou, ainda, em ambos. Quando se tratar de uma variação

[10] A literatura econômica habitualmente, por simplificação, considera capital e trabalho homogêneo para justificar um único método de produção em uso. Ocorre que mesmo que o capital seja heterogêneo - e portanto também a forma como é utilizada a força de trabalho -, tal diversificação do capital é em número finito, digamos n. Assim, se para cada tipo de tecnologia houver apenas um método, ou pelos menos um número finito deles, em uso, podemos considerar um único método para todo o sistema dado por $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$.

[11] Observe que como a dotação de capital é dada e, portanto, não variável em um determinado período, tal relação dada a partir do produto potencial independe de retornos constantes, crescentes ou decrescentes de escala.

[12] Vale a observação de que $\frac{1}{v}$ define a produtividade do capital no período determinado

[13] Como não estamos fazendo nenhuma hipótese sobre os retornos de escala, o coeficiente técnico pode ser uma função do estoque de capital, $v = v(K)$. Por isso nessa relação aparece v_{k_t} no lugar de apenas v.

[14] Observe que o investimento produtivo é um processo dinâmico, no sentido que se inicia em um período t-1, onde são adquiridos ou produzidos os equipamentos, insumos e ou bens intermediários - por exemplo -, e se consolida em t, onde tais equipamentos são incorporados ao estoque de capital, aumentando a capacidade produtiva, ou os insumos e bens intermediários são destruídos e transformados em bens finais, diminuindo a capacidade ociosa, aumentando o produto.

apenas do estoque de capital circulante, não há variação do produto potencial. A variação seria apenas do grau de utilização da capacidade produtiva. Assim o investimento produtivo cria capacidade produtiva aumentando o produto potencial ou, em se tratando de investimento em capital circulante, dando condições ao aumento da produção.

Definição 1.1.8 Grau de utilização da capacidade produtiva. *O grau de utilização da capacidade produtiva em um determinado tempo t é definido como:* $u = \frac{Y_t}{Y*}$, onde Y_t é o produto em t.

É necessário e suficiente, portanto, para o crescimento do nível da capacidade produtiva e do produto potencial, que exista investimento em capital fixo. As restrições ao crescimento do nível do produto potencial, em longo prazo, e da capacidade produtiva passam, então, pelas restrições ao investimento produtivo. Por outro lado, as restrições ao investimento produtivo em capital circulante inibem o crescimento do grau de utilização da capacidade produtiva, fazendo com que a economia venha a operar com capacidade ociosa não desejada.

Assim, em curto prazo, o nível do produto é limitado superiormente pelo nível do produto potencial, que em nossas considerações, é o produto obtido pela plena utilização do estoque de capital instalado. No longo prazo, as restrições ao investimento produtivo em capital fixo, ao impedir o crescimento do nível da capacidade produtiva, e então do produto potencial, limitam também o crescimento do nível do produto. Por outro lado, no curto prazo e também no longo prazo, as restrições ao investimento em capital circulante, restringem o aumento da produção, na medida em que impedem que a capacidade ociosa seja utilizada.

Dessa forma, o processo de crescimento econômico está vinculado à existência do investimento produtivo, tanto em capital fixo como circulante. Em longo prazo, o acúmulo de capital instalado aumenta a capacidade produtiva, fornecendo as condições necessárias para o crescimento do produto. Assim, temos definido o processo de acumulação de capital.

Definição 1.1.9 Processo de Acumulação. *Vinculado ao processo de crescimento econômico de longo prazo, diz respeito à sucessivas variações positivas no estoque de capital instalado.*

Observe que sendo a economia fechada uma restrição ao processo de acumulação de capital é a impossibilidade de prover internamente o sistema do capital, tanto fixo como circulante, necessário,

1.2 Demanda Efetiva e Produto

Na seção anterior vimos que a carência de capital, tanto fixo como circulante, em economias fechadas e a falta de reservas internacionais em economias abertas, são restrições à realização do investimento produtivo e, então, impedem, tanto em curto como em longo prazo, o crescimento do nível do produto. Porém tais restrições ocorrem quando existe a decisão de investir, ou seja, existe a vontade de ajustar o estoque de capital fixo a um estoque de capital desejado ou de diminuir a ociosidade da capacidade produtiva instalada. A questão, então, é saber o que motiva ou restringe essas decisões de investimento.

A decisão de investir é uma decisão de gastar. É um gasto presente dos empreendedores econômicos cuja finalidade é a de aumentar as vendas futuras e, então, a renda. Pode ainda ter o objetivo de não se perder mercado para os concorrentes. Porém, esse tipo de decisão só pode ocorrer se o sistema apresentar sinais de maior atividade. Em nível macro, a atividade econômica se reflete na Demanda Agregada (DA).

Definição 1.2.1 Demanda Agregada *A demanda agregada DA é a soma de todos os gastos, em bens finais, efetuados pelos agentes econômicos em um determinado período.*

Os gastos agregados são satisfeitos parcialmente pela oferta interna ou pelo produto interno bruto, (PIB).[15]

Definição 1.2.2 Produto Interno Bruto *O produto interno bruto Y é a soma de todos os bens finais produzidos internamente, durante um período de tempo.*[16]

Não é necessário que haja exatidão entre tudo o que é demandado, em termos domésticos, e tudo o que é produzido. Pode ocorrer que se produza mais ou menos do que o necessário. Caso se produza mais haverá uma variação positiva nos estoques - estoque indesejado -, ou um ajuste para baixo nos preços de mercado. Como o sistema econômico é composto por uma diversidade de setores produtivos, pode haver, em nível macro, os dois fenômenos. Porém, qualquer que seja a forma de ajuste, no período seguinte o produto tenderá a diminuir[17]. Caso contrário, com produto insuficiente, haverá uma variação negativa no estoque, ou um ajuste para cima nos preços, o que levará ao desejo de aumentar o produto no próximo período. Dessa forma, o produto se adequa à demanda, sendo essa seu principal determinante.

A descrição acima reflete uma relação causal e dinâmica entre gastos e produto: o nível

[15] Em economias abertas, parte dos gastos são realizados a partir da oferta de importados.

[16] O produto interno líquido (PIL) refere-se ao PIB menos a depreciação.

[17] Nesse caso, os gastos que produziram os estoques indesejados não são considerados no nível total dos gastos em t, ou seja, etes não influenciarão de forma positiva o produto em $t+1$.

de atividade econômica, refletido pela demanda agregada no período t, determina a oferta ou o produto em $t+1$. Esse é o mecanismo fundamental do princípio da demanda efetiva (PDE):

Definição 1.2.3 Princípio da Demanda Efetiva *Introduzido por Keynes e Kalecki, nos anos 30, esse princípio assegura que o nível agregado do produto é determinado pela demanda monetária daqueles que podem pagar os preços de oferta.*[18]

A definição do princípio, em si, implica em que em que sua validade só se dá em uma economia monetária onde as trocas são realizadas por intermédio de uma moeda com aceitabilidade e validade garantidas pelo Estado. Assim os preços de oferta dos produtos são estipulados através dessa moeda.

Definição 1.2.4 Preços de oferta *São aqueles preços que além de cobrir os custos de produção garantem ainda lucros normais*[19] *ao produtor.*

O PDE constitui a demanda agregada como o principal fator determinante do nível de atividade da economia. Em outros termos, tal princípio indica que na sociedade de mercado não se produz o que se pode, antes se produz para satisfazer o nível de demanda efetiva existente.

Por outro lado, como o sistema é dinâmico e iterativo, a demanda efetiva também é condicionada, em parte, pelo processo de produção e distribuição. O que se produz e se realiza em um período - por gerar a renda dos trabalhadores e capitalistas - terá influência nos gastos do período posterior. Logo, a produção é importante por gerar uma renda que representa parte considerável da demanda efetiva no próximo período. Mas a renda, determinada pelo produto, não é a única determinante dos gastos. Há que se levar em conta o poder de compra dos agentes econômicos. Tal poder pode ser complementado por um sistema de crédito que permite gastos extra renda.

Em síntese, o determinante das decisões de investir em um período t é a observação da demanda efetiva nesse período, uma vez que produz uma expectativa sobre demanda em curtíssimo prazo. Assim, se o nível da demanda agregada não apresenta crescimento, não existe motivação para o aumento nos investimentos produtivos, e, então, no nível do produto, em curto e longo prazo, e da capacidade produtiva em longo prazo.

Em uma economia fechada, a demanda agregada é dada por:

$$DA = C + I + G, \tag{1.3}$$

[18] Para mais detalhes sobre o PDE, ver SERRANO (2008.a)

[19] Ver definição de lucro normal na seção referente ao investimento produtivo

onde C= consumo, I = investimentos e G= gastos governamentais.

Os gastos agregados, pelo PDE, são os determinantes da renda e do produto, logo são autônomos em relação à esse produto e renda determinados. Contudo, no processo produtivo e na geração de capacidade produtiva, parte desses gastos tem o crescimento do seu nível condicionado à variação do nível renda. Têm, portanto, um crescimento endógeno, obedecendo às variações da renda. São considerados, então, induzidos. Os outros seguem, mesmo no processo de geração de capacidade produtiva e crescimento, como exógenos ou autônomos.

Definição 1.2.5 Gastos autônomos. *São os gastos, componentes da demanda agregada, que no processo de criação de capacidade produtiva e de crescimento são exógenos, ou seja, não obedecem necessariamente às variações do produto ou renda agregada.*

Definição 1.2.6 Gastos induzidos. *São aqueles componentes da demanda agregada, endógenos ao crescimento econômico. Logo, seu crescimento está condicionado ao crescimento da renda agregada.*

As variáveis induzidas em parte, ou totalmente, pela renda, têm a característica de tanto exercerem influência no processo de crescimento como o de serem condicionadas por ele. Assim, uma maior atividade econômica, representada por um nível de gastos maior, gera uma maior renda, o que faz com que em período posterior as variáveis induzidas venham a apresentar acréscimo. Analogamente uma variação negativa no nível dos gastos leva a um menor nível de renda e consequentemente níveis menores das variáveis induzidas. Em outros termos, isso significa que tais variáveis induzidas são pró-cíclicas.

Em vista disso, os gastos não induzidos pela renda são de importância vital para o processo, uma vez que podem ser um contraponto ao movimento tendencial. Mais especificamente, caso a demanda esteja muito aquecida, uma queda nos gastos autônomos, levando a menores níveis de demanda, pode evitar processos explosivos com consequente inflação de demanda. Analogamente em face a um decréscimo do nível da demanda, o aumento dos gastos autônomos podem induzir a maiores níveis das variáveis induzidas, revertendo o processo.

Nessa direção, nas próximas seções, segue uma análise dos componentes da demanda agregada, no sentido de descrever a natureza e influência de cada um deles, no processo de acumulação de capital.

1.2.1 O Consumo

Esse componente da demanda agregada diz respeito a todos os gastos efetuados pelos agentes econômicos - trabalhadores e capitalistas - em bens de consumo.

Como dito anteriormente, o total de gastos da economia em um período, ao determinar o produto, determina também a renda. Tal renda é dividida entre salários e lucros, isto é,

$$Y^r = W + P,$$

onde W é a massa de salários e P o montante de lucro dos capitalistas e Y^r a renda agregada.

Como $W = wY^r$[20]representa a massa de salários, os bens de consumo dos trabalhadores são adquiridos através dessa renda, ou de parte dela. Assim, se a renda agregada aumenta, com a distribuição entre salários e lucros constantes, temos que o consumo dos trabalhadores tende a aumentar. Dessa forma, o consumo dessa classe é em parte induzido pela renda agregada, ou seja:

$$C_w = c_w w Y^r, \tag{1.4}$$

onde

$$w = \frac{W}{Y^r},$$

e $c_w < 1$ é a propensão marginal a consumir dos trabalhadores.

Todavia, observe que os gastos dos trabalhadores não dependem somente da renda. Podem ser realizados por intermédio de crédito. Logo, esse tipo de consumo - dos trabalhadores - tem natureza em parte induzida e em parte autônoma:

Definição 1.2.7 Consumo autônomo *Diz respeito ao consumo que não é realizado a partir de uma dependência direta da renda. Nesse sentido, mesmo em havendo decréscimo (acréscimo) no nível de renda, o gasto em consumo pode sofrer aumento (queda).*

Definição 1.2.8 Consumo Induzido *Diz respeito ao consumo que depende diretamente das variações da renda. Variações positivas (negativas) no nível de renda influem positivamente (negativamente) no nível do consumo.*

O consumo dos capitalistas, por sua vez, é considerado autônomo.[21]Em vista disso o con-

[20]Isso porque se $Y^r = W + P$, temos $1 = \frac{W}{Y^r} + \frac{P}{Y^r}$. Tomando, ainda $\frac{W}{Y^r} = w$, então $\frac{P}{Y^r} = 1 - w$, logo, w e $1 - w$, são menores que 1.

[21]Nesse consumo pode ser considerados os investimentos que não geram capacidade produtiva, como os investimentos residenciais, entre outros.

sumo C, como componente da demanda agregada, é uma função com um fator induzido - a parte induzida do consumo dos trabalhadores -, e uma parte autônoma - aquele realizado pelos trabalhadores através do crédito e o consumo dos capitalistas. Logo:

$$C = Z + c_w wY, \tag{1.5}$$

onde Z é a parte autônoma do consumo, e $c_w wY$ a parte do consumo dos trabalhadores induzida pela renda.

Para diminuir o número de variáveis, podemos definir a função consumo simplesmente por:

$$C = Z + cY. \tag{1.6}$$

onde $c < 1$.

Como mencionado na outra seção, as variáveis induzidas acompanham o comportamento da renda agregada. Assim, o consumo induzido dos trabalhadores sofre com os limites impostos ao crescimento da demanda. Um dos canais de transmissão dessa influência é o nível de emprego. Um menor nível na atividade econômica induz a uma menor atividade no processo de produção o que implica em uma maior capacidade ociosa do capital instalado e, consequentemente, em menores níveis de emprego. O aumento do desemprego, por sua vez, reduz o número de assalariados e, portanto, de potenciais consumidores. Então, a fração do consumo agregado, oriundo da renda salarial sofre decréscimo. Por outro lado, com o aumento do desemprego, não só o consumo induzido dos trabalhadores é afetado. O consumo autônomo dessa classe, proporcionado pelo crédito também é comprometida. Isso porque o acesso ao crédito só é possível, em linhas gerais, sob a comprovação de algum tipo de renda. Assim, o desemprego atinge diretamente o consumo dos trabalhadores, tanto o induzido como o autônomo.

Outro fator, o aumento da tributação sobre a renda - responsável por diminuir a renda disponível-, pode diminuir o consumo induzido. Observe, porém, que a maioria dos trabalhadores não é atingida por tal tributação. Contudo, sofrem com a tributação indireta, aquela que incide sobre os bens de consumo dos assalariados. Maior tributação sobre o processo produtivo e de distribuição desses bens, são repassados, via preço, aos consumidores, implicando em queda do salário real e, consequentemente, menor consumo.

A linha de crédito é uma das propulsoras do consumo autônomo. Sua redução, através do aumento do juro básico que influencia as taxas de juros bancárias, encarecendo o preço do financiamento, é uma das mais importantes restrições ao crescimento do consumo agregado. Vale lembrar, mais uma vez, que esse tipo de consumo - o consumo autônomo -, é um gasto importante para reverter situações de desaquecimento econômico interno.[22]

Assim, de uma forma geral, as restrições ao aumento do nível de consumo, podem ter como causa os seguintes fatos:

- A queda no nível da demanda efetiva, com o posterior aumento do desemprego e diminuição da massa salarial.
- Aumento da taxa de juros básica que ao aumentar o custo do crédito limita o consumo autônomo.
- Tributação direta e indireta.

Vale ressaltar novamente que a variação do cambio tem efeitos sobre o consumo que dependem de outras variáveis econômicas, principalmente aquelas oriundas de decisões políticas, fiscais e ou monetárias.

1.2.2 O Investimento produtivo

Um primeiro fato que deve ser levado em conta sobre o investimento, como componente da demanda agregada, é a relação que o princípio da demanda efetiva estabelece entre essa variável e a poupança. A validade do PDE implica em que o montante de investimento é o determinante da poupança em cada período. Logo, o crescimento do nível do produto interno, não está condicionado ao montante de poupança da economia, ou antes, à poupança potencial. Isso porque na medida em que o produto interno, e então a renda, é definido pela demanda efetiva, e considerando uma economia fechada, temos:

$$S = Y - C = I,$$

ou seja, a poupança S é uma variável residual, definida a partir do investimento. Quanto maior o investimento, maior a poupança, com implicação ocorrendo do investimento para a poupança, isto é $I \Longrightarrow S$.

[22]Embora não haja dados empíricos ou comprovações na literatura econômica, parece haver evidências de que a expansão das linhas de crédito, ao impulsionarem o consumo, aquecendo o comércio, levam à uma maior formalização das microempresas. Esse fenômeno se dá porque tais estabelecimentos ao necessitarem de uma razão social para operarem com cartões de crédito, são levados à formalização. Tal formalização, por sua vez, leva a um aumento do emprego formal, diminuindo o índice de desemprego. Na verdade a expansão do crédito, impulsiona a formalização de empresas no setor de serviços. Assim, embora o investimento e consequentemente o setor industrial tenha apresentado crescimento incipiente, segundo Summa e Serrano(2012), nos últimos anos, observa-se um nível maior de emprego no país.

Isto posto, é importante salientar que o investimento produtivo tem uma natureza bastante distinta do consumo: enquanto o consumo é um gasto que causa bem estar social, o investimento é apenas um gasto necessário. Em outros termos, isso significa que ele só é realizado porque é condição necessária para que as firmas se mantenham ativas no mercado. Isso porque não investir, em tempos de expansão econômica, significa perder mercado para o concorrente. Mesmo os oligopólios e monopólios, diante de expansão econômica, são levados à investir para se manterem absolutos em seus setores. A razão para o investimento apresentar esse caráter necessário é que como gasto, ele reduz em curto e médio prazo a taxa de lucro:

Definição 1.2.9 Taxa de Lucro *Definimos a taxa de lucro da economia, como a razão entre a massa de lucros e o estoque de capital instalado, K, isto é:*

$$\frac{P}{K} = \frac{P}{Y}\frac{Y}{Y^*}\frac{Y^*}{K} = (1-w)\frac{u}{v},$$

onde P é a massa de lucros da economia e $w = \frac{W}{Y}$, com $W =$ massa de salários. Observe que ao aumentar o investimento em capital fixo, até que esse capital venha a aumentar o produto Y, há uma redução na taxa de lucro. Também é importante observar que esse capital adquirido, em linhas gerais, de alto custo, é feito via financiamento, ao qual incide juros que devem ser pagos. Dessa forma como há um lapso de tempo entre compra, instalação, produção e venda, a queda nos lucros frente aos investimentos faz com que a decisão de investir seja realizada, em linhas gerais, em caráter necessário.

A queda na taxa de lucro em curto prazo confere ao investimento em máquinas e equipamentos uma natureza dual: por um lado, como gasto, se realizado via mercado interno, aumenta o produto. Contudo, depois de instalado, ao aumentar a capacidade produtiva, diminuindo o grau de utilização, restringe o lucro. Em vista disso, só será realizado se houver indícios de que a queda na taxa de lucro é de curto prazo e, em longo prazo, tal taxa retornará ao normal.

Por outro lado o investimento em capital circulante em uma economia fechada aumenta primeiramente o produto por se tratar de um gasto. No período posterior, ao ser destruído no processo produtivo é responsável pelo aumento da produção. Dessa forma se o gasto nesse tipo de capital é realizado internamente, no agregado a taxa de lucro não sofrerá queda. Na verdade isso ocorre porque esse tipo de investimento é responsável pelo aumento do grau de utilização. Sua função, no processo produtivo é a de aumentar o produto, diminuindo a capacidade ociosa do capital instalado.

Nessas condições, somente os indícios de expansão da demanda efetiva, isto é, o aumento no nível dos gastos deve levar a maiores níveis de investimento produtivo. Esses, por sua vez, como dito anteriormente, têm como justificativa, a preocupação em manter, ou mesmo aumentar a fatia de mercado que cada firma individualmente controla. Nesse sentido pode-se inferir que os investimentos produtivos, isto é, o desejo de ajustar o estoque de capital, instalado ou circulante, ao um estoque desejado é induzido pelo comportamento da demanda efetiva, ou da renda por ela determinada. Assim, define-se:

Definição 1.2.10 Investimento Induzido *São os investimentos consequentes das decisões nascidas a partir da observação do comportamento da atividade econômica. Logo, são induzidos pela renda, ou antes, pelo nível dos gastos efetivos.*

Naturalmente os investimentos setoriais não são necessariamente induzidos pela demanda agregada. Ainda que o nível de atividade, em termos macroeconômicos, possa apresentar pouco crescimento, decrescimento ou estagnação, alguns setores da economia podem apresentar expansão. Consequentemente os investimentos, nesses setores, apresentarão acréscimos seguindo um comportamento inverso ao da renda agregada. Um exemplo importante de investimento setorial que pode não seguir o comportamento de crescimento da renda, são os investimentos voltados ao setor exportador. Economias que não têm as exportações como principal responsável pela expansão da demanda efetiva, isto é, economias cuja expansão econômica depende primordialmente do mercado interno, podem aumentar ou diminuir independentemente do comportamento da atividade econômica interna[23] Na verdade, tais investimentos são induzidos pela demanda externa. Dessa forma, mesmo em havendo estagnação (crescimento) do produto interno bruto, o nível das exportações pode aumentar (diminuir), induzindo a maior (menor) nível de investimento no setor de exportáveis.

Porém, se a maioria dos setores econômicos não apresentar aquecimento, o investimento produtivo, no agregado, não apresentará crescimento significativo, seguindo a tendência da demanda. Isso porque nenhum empreendedor incorrerá em um gasto com vistas a um retorno econômico incipiente ou mesmo inexistente.

Existe, contudo, um tipo de investimento que, dado a sua natureza, é considerado por algumas correntes econômicas como desvinculado do comportamento da demanda, e é, em longo prazo, tido como responsável pelo crescimento econômico. É o investimento em tecnologias inovadoras que podem levar a uma maior produtividade do trabalho e do capital, ou mesmo apresentar ao mercado um produto com qualidade superior ao existente. Nesses termos, assim como os investimentos setoriais, é um investimento considerado autônomo.

[23]Principalmente ao se tratar de uma economia com setor produtivo heterogêneo, onde o setor exportador não é integrado ao setor produtivo interno. Economias em desenvolvimento, principalmente as que se especializam em exportações de matérias primas e produtos primários, normalmente apresentam o setor exportador bastante desvinculado do setor produtivo voltado ao mercado interno.

Definição 1.2.11 Investimento autônomo *São os investimentos cujas decisões são independentes do nível da atividade econômica.*

A justificativa para que esse tipo de investimento, responsável por repor o capital instalado considerado obsoleto, seja autônomo, é a de que as decisões direcionadas a esse investimento podem ser movidas, não pelo comportamento da demanda, mas pelo desejo de aumentar a fatia de mercado por eles controlada. Isso poderia se dar na medida em que a nova tecnologia, poupadora de capital e ou trabalho, levasse a menores custos e maior produção, resultando em preços mais atraentes ao consumidor, aumentando consequentemente as vendas. Também se os produtos apresentarem uma maior qualidade, maior quantidade de consumidores poderiam ser atraídos por tal oferta. Porém, segundo Serrano(2004), caso a economia não apresente aquecimento, esse investimento tão somente teria como consequência o de "roubar" parte do mercado de outros produtores. Contudo em isso ocorrendo, esses outros investidores - os não inovadores - ao terem sua fatia de mercado diminuída, certamente diminuiriam seus investimentos. Dessa forma, no agregado, o nível de investimentos não sofreria alteração. Observe que não havendo demanda suficiente, de nada adianta investimentos que apresentem uma oferta desnecessariamente maior. Logo, tais investimentos, embora existam e sejam responsáveis pela melhoria da produção e da qualidade dos produtos ofertados, não podem ser os propulsores, em longo prazo, do aumento do nível do produto. Mais razoável é considerar que mesmo os investimentos em inovação, sejam mais presentes em face a uma expansão da economia. Ou seja, sejam uma consequência de um aquecimento do mercado e não uma causa para tal aquecimento.

Nessas condições, nesse trabalho, consideraremos os investimentos produtivos agregados como induzidos pela demanda, ou seja, os investimentos que criam capacidade produtiva seja através do aumento do capital instalado, ou da diminuição da capacidade ociosa do capital - o investimento em capital circulante - serão considerados como dependentes do comportamento da demanda efetiva ou do produto, ou ainda a renda que ela determina, logo:

$$I = hY, \tag{1.7}$$

onde Y é a renda agregada e h é a propensão marginal a investir, ou seja, h é a aproximação de uma medida para as decisões de investir.

Sendo a demanda que determina o quanto será ofertado, é razoável considerar que os produtores operem com uma margem de liberdade produtiva que lhes garanta aumentar a produção frente a um choque positivo da demanda que se apresente de maneira repentina. Isso porque os investimentos, principalmente aqueles em capital fixo, levam certo tempo entre a aquisição, instalação e o consequente aumento da produção. Logo, é natural que as firmas, de um modo geral, operem com uma capacidade ociosa, além manterem um estoque de produtos com o objetivo de atender a um aumento não esperado da demanda. Essa capacidade ociosa que garante essa liberdade de variação produtiva, também tem como meta o de preservar a fatia de mercado controlada pelo produtor. Uma demanda não atendida por tempo relativamente extenso, leva ao surgimento de outros empreendedores que podem satisfazer essa demanda e assim se apossar da parcela de mercado do concorrente.

Tal capacidade ociosa planejada, implica em um grau de utilização u menor do que a unidade e que, embora varie setorialmente, obedece, no agregado, a uma variação em torno de uma constante. A esse grau de utilização denominamos de grau de utilização normal:

Definição 1.2.12 Grau de Utilização Normal. *O grau de utilização normal da capacidade é aquele que resulta em um produto abaixo do produto potencial da economia. Tal grau de utilização define uma margem de liberdade produtiva - um nível de capacidade ociosa planejada - que permite atender a eventuais aumentos da demanda. Denota-se por* u_n.

Vinculado ao grau de utilização normal, temos o produto normal.

Definição 1.2.13 Produto Normal. *É o produto obtido a partir da utilização normal da capacidade produtiva, isto é, o processo produtivo se dá através de uma planejada capacidade ociosa do capital instalado.*

E a taxa normal de lucro:

Definição 1.2.14 Taxa de Lucro Normal *A taxa normal de lucro é definida por:*

$$\frac{P}{K} = (1-w)\frac{u_n}{v} \tag{1.8}$$

Assim, o investimento produtivo em capital fixo é uma variável com uma dupla função: quando realizado internamente, ou seja, quando os equipamentos e máquinas são adquiridos no mercado doméstico, além de aumentar o gasto, aumentam, via multiplicador, o produto interno bruto e então o grau de utilização da economia. Contudo, quando o capital fixo é instalado, aumenta o produto potencial e o produto normal, diminuindo o grau de utilização da economia ($u = \frac{Y}{Y^*}$) . Por outro lado, o aumento da capacidade produtiva não é no mesmo montante do aumento do nível do produto em momento anterior. Isso porque os investidores tendem a investir paulatinamente, uma vez que levam em consideração a possibilidade de esse aumento da demanda não ser de caráter duradouro.

De forma similar o investimento em capital circulante, em economias fechadas, tem a função de aumentar o grau de utilização da capacidade em dois períodos: quando determinam o gasto via aquisição e depois quando são destruídos no processo produtivo, aumentando, nos dois momentos, o produto.

Portanto, o investimento produtivo, assim como o consumo induzido, é uma variável que depende do nível da atividade econômica, sendo também pró-cíclico. Nessas condições como seu principal limitante é o próprio comportamento da demanda, tudo o que venha a restringir o crescimento do nível dos gastos agregados, restringe também o investimento.

Assim, todos os limitantes do consumo induzido e do consumo autônomo, listados na subseção anterior, na medida em que são limitantes da demanda, também limitam o investimento produtivo. Também as medidas de contração fiscal, através da contenção dos gastos públicos simultaneamente a um aumento da tributação, ao restringir a demanda, influencia o nível dos investimentos produtivos.

Além disso, o investimento também sofre limites diretos. Alguns deles são:

- **Uma margem mínima de lucro.** Para que haja investimento produtivo, é necessário que exista uma margem mínima de lucro. Se a condição da economia é tal que seja impossível manter uma margem mínima de lucro a partir de novos investimentos, esses em termos agregados serão limitados. Os efeitos dessa taxa mínima repercutem tanto em termos micro como em termos macro econômicos.

- **A taxa básica de juros.** A taxa básica de juros influencia todas as outras taxas. Assim, os financiamentos domésticos, frente a um aumento nesses juros, se tornam mais caros. Contudo os efeitos dessa variação afeta a economia, de forma mais contundente, em termos microeconômicos, na medida em que impede os investimentos dos pequenos empreendedores. Os grandes empreendedores sempre têm como investir e repassar os custos, se as condições forem propícias. Dessa forma uma alta na taxa básica de juros pode levar a que esses grandes empreendedores roubem as fatias do mercado dos pequenos, não ocasionando efeitos diretos em nível macro. Em relação a uma queda, tal fato não significa maiores níveis de investimento. Significa somente que em havendo crescimento da demanda efetiva, uma queda nos juros pode levar a que mais firmas venham a investir e conservem suas fatias de mercado, o que impede ou dificulta uma maior proliferação de oligopólios. De qualquer forma a taxa de juros básica pode ser um limitante ao investimento dos pequenos empreendedores, mas não um condicionante do investimento produtivo.

- **As restrições ao crédito.** As medidas que restringem o crédito atingem particularmente os pequenos investidores. Assim, caso houvesse um amplo acesso ao crédito, em havendo crescimento da demanda, certamente haveria um maior crescimento dos investimentos dos pequenos empreendedores. Em nível macro, contudo, pode não acarretar maiores níveis de investimento em comparação a uma situação onde existe restrição ao crédito para pequenos empreendedores. Tal fenômeno acarretaria somente perda da fatia de mercado dos pequenos para os grandes empreendedores, uma vez que esses últimos possuem um maior acesso ao financiamento. Por fim, vale ressaltar que a ampliação ao crédito não necessariamente determina maior investimento, mesmo em nível micro. A restrição ao crédito é apenas um limitante. Não se configura em um determinante.

Dessa forma, os principais limitantes ao crescimento do nível dos investimentos são: baixa atividade econômica, escassez de capital e as restrições impostas pelo taxa de juros básica. Observamos, todavia, que muitos dos limites estabelecidos são definidos por um fator de suma importância: as decisões de política econômica.

Considerações

Nesse capítulo definimos uma série de conceitos, todos em acordo com os princípios que norteiam essa dissertação: o princípio do excedente e o da demanda efetiva.

Também, a partir da hipótese, bastante realista, da não escassez de mão de obra, tentamos através de uma análise dos componentes da demanda agregada, para uma economia fechada[24], estabelecer os entraves às decisões de investir e então ao crescimento, tanto do produto potencial como do produto normal- tanto em curto, como em longo prazo.

No decorrer dessa análise foi estabelecido que o investimento produtivo, com seu caráter dual, necessário e pró-cíclico - por ser induzido pela renda - é a variável que endogenamente ajusta a capacidade produtiva à demanda e, portanto, funciona como o combustível, um alimentador, do processo dinâmico de crescimento econômico.

O consumo induzido, por sua vez, também pró-cíclico, tem fundamental importância por ser resultado dos gastos em salários dos produtores. Um maior consumo induzido representa maior produção e, pelo efeito multiplicador, garante dinamismo ao mercado interno, assim como os gastos autônomos em bens de consumo.

Os gastos autônomos, exógenos ao processo, são os grandes reguladores e propulsores da economia. O consumo dos capitalistas, dos trabalhadores via crédito e os gastos governamentais, por serem autônomos, são, em parte, passíveis de controle e direção. Logo, estão sujeitos

[24]Aqui consideramos os gastos governamentais ainda que estes não serão considerados nos capítulos posteriores.

às decisões de política econômica. São as peças chaves de uma economia planejada. Enfim, direcionam, impulsionam, limitam e estabilizam o processo de crescimento econômico.

Todos apresentam entraves ao crescimento. Seus limites restringem a demanda agregada - principal reflexo da atividade econômica-, que, por sua vez, define o produto e a renda. Dessa forma, como uma síntese do que foi descrito no decorrer desse capítulo, segue abaixo uma tabela com as componentes da demanda agregada para uma economia fechada e com governo, sua natureza, alguns dos seus representantes, seus limitantes, bem como sua influência, em termos dinâmicos, no processo de crescimento econômico, através da variação, por eles produzida, no grau de utilização da capacidade produtiva em dois períodos consecutivos, t_1 e t_2[25].

Demanda Agregada - Gastos Autônomos					
Componentes	Natureza	Exemplos	u_{t_1}	u_{t_2}	Restrições
Consumo dos Trabalhadores e Capitalistas	Autônomo	Bens de Consumo Duráveis e não duráveis Investimento residencial	+	N	Desemprego

Demanda Agregada- Investimentos					
Componentes	Natureza	Exemplos	u_{t_1}	u_{t_2}	Restrições
Investimento em Capital fixo	Induzido	Máquinas e Equipamentos	+	$-$	Restrição de Capital Baixa demanda Alta dos juros Restrição ao crédito Margem de lucro abaixo da mínima
Investimento em Capital circulante	Induzido	Insumos e Bens intermediários	+	+	Os mesmos para o capital fixo

[25]Nessa tabela o símbolo $(+)$ significa influência positiva, $(-)$ influência negativa, N, influência neutra, $u_{t_1} =$ grau de utilização em t_1 e $u_{t_2} =$grau de utilização em t_2.

Demanda Agregada- Consumo Induzido					
Componentes	Natureza	Exemplos	u_{t_1}	u_{t_2}	Restrições
Consumo dos Trabalhadores	Induzido	Bens de Consumo Duráveis Cestas básicas	+	N	Desemprego Alta dos Juros Tributação indireta

Por fim, o crescimento do produto, e do produto potencial em longo prazo, está condicionado ao crescimento da demanda agregada que, em síntese, sofre com as decisões de políticas econômicas como a fiscal e a monetária. Os instrumentos são basicamente a manipulação das taxas de juros, para conter a inflação, a contenção dos gastos e a restrição ao consumo via crédito.

2 Modelos de crescimento liderados pela demanda via investimentos

2.1 Considerações Iniciais

Uma das áreas mais importante dentro da Teoria da Matemática Pura ou Abstrata é a que trata das propriedades funcionais dos sistemas dinâmicos. Isso porque todas as outras ciências exatas, bem como algumas das ciências sociais aplicadas - além da biologia - utilizam modelagens onde as variáveis frequentemente sofrem transformações ao longo do tempo, descrevendo, portanto, sistemas dinâmicos.

De fato, os processos físicos - dinâmicos por natureza - são comumente citados tanto na teoria mais básica de equações diferenciais ordinárias ou parciais, como em estudos avançados de sistemas dinâmicos que envolvem espaços de diversas dimensões e estruturas mais abstratas.

Ocorre que a modelagem formal de um processo deve ser constituída de uma gama de equações matemáticas que não pode, em hipótese alguma, contrariar leis ou comportamentos inerentes ao objeto de estudo. Dessa forma, a observação de um fenômeno que não seja ratificado pelas equações que compõem o sistema deve ser fruto de um dos seguintes erros: ou o fenômeno de fato não ocorre, ou as equações que definem o processo não são verdadeiras. Além disso, uma vez definidas as equações, o sistema dinâmico deduzido a partir das variáveis equacionadas não pode sofrer acréscimo de outras equações mesmo que essas descrevam um comportamento esperado do processo, a menos, obviamente, que essas sejam equivalentes às descritas originalmente. Assim a maioria dos problemas apresentados em modelagens é oriunda da não observação dessas regras.

Nas ciências econômicas, por exemplo, a descrição de um modelo que descreva o processo de acumulação de capital, não pode exibir equações que contrariem as hipóteses que definam a visão teórica ou as leis gerais da economia. Dessa forma não é possível que uma modelagem do processo de desenvolvimento capitalista apresente um sistema onde o comportamento dinâmico seja contrário às identidades como:

$$I_t = \Delta K_t \quad ou \quad u_t = \frac{Y_t}{Y^*},$$

onde I_t é o investimento produtivo, ΔK_t é a variação do estoque de capital - fixo ou circulante -, u_t é o grau de utilização de capacidade produtiva, Y_t o nível do produto e Y^* o produto potencial. Por outro lado, se a visão teórica que norteia o estudo do processo entende que o investimento produtivo é totalmente induzido pela renda, isto é, $I_t = h_t Y_t$, esta relação e suas variantes especificadas a partir do modelo têm que ser preservadas.

Nesse sentido segue, nas próximas seções, uma análise das propriedades- algumas gerais e outras específicas-, de alguns modelos de crescimento econômico inseridos na visão heterodoxa norteada pelos princípios do excedente e da demanda efetiva - descritos no primeiro capítulo -, que são modelos específicos de crescimento econômico liderados pela demanda.

As hipóteses dos modelos a serem apresentados serão bem simples. Será considerada uma única técnica de produção, relação capital produto constante e apenas um tipo de capital: circulante ou fixo. Além disso, trataremos de economias fechadas e sem governo.

2.2 Modelos de crescimento com investimento autônomo

Os modelos de crescimento econômico liderados pela demanda podem ser definidos da seguinte forma:

Definição 2.2.1 Modelos de crescimento liderados pela demanda. *São aqueles modelos onde o processo de acumulação está condicionado ao crescimento, em longo prazo, das componentes da demanda agregada.*

O debate sobre o tema inerente a esses modelos gira em torno destes apresentarem ou não trajetórias de equilíbrio estáveis, em longo prazo, com grau de utilização variando em torno de uma constante denominada de grau normal de utilização da capacidade produtiva.

Nessas condições, nas linhas abaixo apresentaremos de forma geral os modelos de crescimento econômicos fundamentados nos princípios já descritos, analisando se as seguintes duas condições:

1. As taxas de crescimento das variáveis descrevem trajetórias estáveis. Isso implica que para uma dada taxa da componente da demanda que lidera o crescimento econômico, deve existir um ponto de equilíbrio atrator e estável, onde, estando o sistema sob a ação

desse atrator, a taxa de crescimento das outras variáveis devem tender a se igualar à taxa da variável líder.

2. Como o sistema produtivo atua com uma determinada capacidade ociosa que garante uma margem de liberdade para possível expansão da produção frente a choques positivos de demanda, o grau de utilização da capacidade, em equilíbrio de longo prazo, deve tender a um grau normal, ou planejado, de utilização $u_n < 1$.

Dentre os modelos de crescimento liderados pela demanda, existem aqueles que apresentam uma componente autônoma do investimento produtivo. Nesses modelos o crescimento econômico é uma consequência das decisões de investir. A componente autônoma do investimento gera a demanda que, a partir do multiplicador, define o produto. Assim, variações positivas do produto são consequências das variações positivas da componente autônoma do investimento produtivo. Tais modelos são definidos como liderados pela demanda via investimentos.

Definição 2.2.2 Modelos de crescimento liderados pela demanda via investimento *São aqueles modelos que descrevem o processo de acumulação de capital, onde o crescimento do produto e do produto da capacidade produtiva são consequências primeiras do crescimento da componente autônoma do investimento.*

Como exemplos de modelos liderados pela demanda via investimentos podemos citar o modelo de Kalecki (1983), de Maglin e Badhuri (1990) e de Amadeo(1986), entre outros.

Sobre os modelos de crescimento liderados pela demanda via investimento, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1 *Os modelos de crescimento liderados pela demanda via investimento, quase sempre não satisfazem a segunda condição, isto é, o ponto de equilíbrio do sistema - quando existe- a menos de uma taxa específica de investimento autônomo-, não exibe grau de utilização da capacidade, próximo ao normal ou convergindo para ele.*

Nota: A taxa específica é uma espécie de taxa garantida de Harrod.

Definição 2.2.3 Taxa Garantida de Harrod *A taxa garantida de Harrod, geralmente denotada por g_w, é a única taxa que garante uma trajetória estável para o modelo harrodiano, onde todos os gastos são induzidos. É definida por $g_w = \frac{s}{v}$, determinando o grau de utilização igual a 1.*

Para a demonstração desse Teorema, são necessários dois resultados dados pelas duas proposições que se seguem.

Proposição 2.2.1 *Para uma dada taxa de investimentos g_i, temos $g_k \to g_i$, quando $t \to \infty$.*

Prova:[1] *Considerando que o investimento em capital é uma variação do estoque de capital, temos em tempo contínuo: $I_t = \frac{dK_t}{dt} + \delta K_t$, onde δ é a depreciação do estoque de capital instalado*[2]*. Assim:*

$$I_t = \frac{dK_t}{dt} + \delta K_t = \frac{[\frac{dK_t}{dt}]}{K_t} K_t + \delta K_t = g_{k_t} K_t + \delta K_t,$$

logo:

$$\frac{dI_t}{dt} = \frac{dg_{k_t}}{dt} K_t + g_{k_t} \frac{dK_t}{dt} + \delta \frac{dK_t}{dt}.$$

Dividindo a última expressão por I_t, temos:

$$g_{i_t} = \frac{[\frac{dI_t}{dt}]}{I_t} = \frac{dg_{k_t}}{dt} \frac{K_t}{I_t} + g_{k_t} \frac{[\frac{dK_t}{dt}]}{K_t} \frac{K_t}{I_t} + \delta \frac{[\frac{dK_t}{dt}]}{K_t} \frac{K_t}{I_t}$$

Assim, dada a taxa g_i, temos

$$g_i = \frac{dg_{k_t}}{dt} \frac{K_t}{I_t} + g_{k_t} g_{k_t} \frac{K_t}{I_t} + \delta g_{k_t} \frac{K_t}{I_t}. \tag{2.1}$$

Observe agora que:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt} + \delta K_t}{K_t} = g_{k_t} + \delta \Longrightarrow \frac{K_t}{I_t} = \frac{1}{g_{k_t} + \delta}.$$

Substituindo na equação (2.1), temos:

$$g_i = \frac{1}{g_{k_t} + \delta} \left[\frac{dg_{k_t}}{dt} + g_{k_t} g_{k_t} + \delta g_{k_t} \right] \Longrightarrow g_i (g_{k_t} + \delta) = \frac{dg_{k_t}}{dt} + g_{k_t} (g_{k_t} + \delta),$$

e então:

$$\frac{dg_{k_t}}{dt} = (g_{k_t} + \delta)(g_i - g_{k_t}), \tag{2.2}$$

que representa um equação diferencial ordinária de Bernoulli de segunda ordem do tipo (4.1), cujas soluções com condição inicial $(t_o = o; g_{k_o} = g_k(o))$, resolvidas no apêndice, são dadas por:

[1] Parte dessa demonstração - mais especificamente até a dedução da equação(2.2) - foi retirada das notas de aulas, do curso de crescimento econômico, ministradas pelo professor Fábio Freitas.

[2] Se o capital considerado for circulante, então $\delta = 1$ e v, a razão capital produto é menor que 1.

$$g_{k_t} = \begin{cases} \dfrac{-\delta + mg_i e^{t(g_i+\delta)}}{1+me^{t(g_i+\delta)}} & se \quad -\delta < g_{k_o} < g_i \text{ ou } g_i < g_{k_o} < -\delta \\ \\ \dfrac{-\delta - mg_i e^{t(g_i+\delta)}}{1-me^{t(g_i+\delta)}} & se \quad g_{k_o} > -\delta \text{ e } g_{k_o} > g_i \\ \\ \dfrac{\delta + mg_i e^{t(g_i+\delta)}}{-1+me^{t(g_i+\delta)}} & se \quad g_{k_o} < -\delta \text{ e } g_{k_o} < g_i \\ -\delta & se \quad g_{k_o} = -\delta \\ g_i & se \quad g_{k_o} = g_i \end{cases} \tag{2.3}$$

onde

$$m = \frac{|g_{k_o} - \delta|}{|g_i - g_{k_o}|}.$$

Observe que usando a regra de L'Hospital, para as soluções onde $g_{k_o} \neq -\delta$ e $g_{k_o} \neq g_i$, temos:

$$\lim_{t\to\infty} g_{k_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{g_i(g_i+\delta)me^{t(g_i+\delta)}}{(g_i+\delta)me^{t(g_i+\delta)}} = g_i,$$

o que implica que as soluções não constantes da equação (2.2) convergem para o ponto crítico, ou solução constante, $g_{k_t} = g_i$, logo, esse ponto crítico, ou solução constante, é um atrator. Esse atrator é assintoticamente estável na condição de que $g_i > -\delta$[3]. ■

Proposição 2.2.2 *Em um modelo de crescimento liderado pela demanda, cujo sistema de equações apresenta uma solução constante - um ponto fixo[4]-, se o investimento produtivo tiver uma componente induzida pela renda e outra autônoma não nula, então, no equilíbrio de longo prazo, necessariamente ocorre uma das alternativas:*

1. *Se Z é o gasto autônomo, diferente do investimento produtivo, então a taxa de crescimento g_z é exatamente igual à taxa de crescimento g_i.*
2. *Todos os outros gastos, diferentes do investimento produtivo, são induzidos pela renda.*

Prova:[5] *Considere a demanda agregada de uma economia onde Z são os gastos autônomos que não criam capacidade produtiva, $I = I_A + I_I$ o investimento produtivo, onde I_A é a componente autônoma e I_I é a componente induzida, e $C = cY$, o consumo dos trabalhadores com $c < 1$ a propensão marginal a consumir.*

1. **Caso primeiro:** *$I_{I_t} = h_t Y_t$, ou seja, com h variável em relação ao tempo.*

---

[3]Ver apêndice para verificar a definição de estabilidade de um sistema dinâmico autônomo.

[4]Não necessariamente estável.

[5]Parte dessa demonstração, mais especificamente até a equação (2.5), foi retirada das notas de aulas de crescimento econômico ministradas pelo professor Fábio Freitas.

Como esse modelo a princípio é liderado pela soma dos gastos autônomos com o investimento produtivo autônomo, vamos considerar que essas taxas sejam dadas, isto é, g_z *e* g_{I_A} *sejam constantes.*

Nesse caso temos, em equilíbrio:

$$Y = Z + I_A + I_I + C = Z + I_A + hY + cY \Longrightarrow (1-c-h)Y = Z + I_A,$$

logo

$$Y = \frac{1}{(1-c-h)}(Z + I_A). \tag{2.4}$$

Considerando c constante ao longo do tempo,

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{(1-c-h)}\left(\frac{dZ}{dt} + \frac{dI_A}{dt}\right) + \frac{dh}{dt}\frac{(Z+I_A)}{(1-c-h)^2}.$$

Dividindo essa última expressão por Y *temos:*

$$\frac{[\frac{dY}{dt}]}{Y} = \frac{1}{(1-c-h)}\left(\frac{[\frac{dZ}{dt}]}{Y} + \frac{[\frac{dI_A}{dt}]}{Y}\right) + \frac{dh}{dt}\frac{(Z+I_A)}{(1-c-h)^2}\frac{1}{Y},$$

logo,

$$g_y = \frac{1}{(1-c-h)}\left(\frac{[\frac{dZ}{dt}]}{Z}\frac{Z}{Y} + \frac{[\frac{dI_A}{dt}]}{I_A}\frac{I_A}{Y}\right) + \frac{dh}{dt}\frac{1}{(1-c-h)}$$

e, portanto,

$$g_y = \frac{1}{(1-c-h)}\left(g_z\frac{Z}{Y} + g_{I_A}\frac{I_A}{Y}\right) + \frac{dh}{dt}\frac{1}{(1-c-h)}.$$

Substituindo Y *da equação (2.4), na última igualdade acima,*

$$g_y = \frac{1}{1-c-h}\left(g_z\frac{Z}{\frac{1}{(1-c-h)}(Z+I_A)} + g_{I_A}\frac{I_A}{\frac{1}{(1-c-h)}(Z+I_A)}\right) + \frac{dh}{dt}\frac{1}{(1-c-h)}$$

e assim,

$$g_i = g_z\frac{Z}{(Z+I_A)} + g_{I_A}\frac{I_A}{(Z+I_A)} + \frac{dh}{dt}\frac{1}{(1-c-h)}.$$

Observe que $\frac{Z}{(Z+I_A)} + \frac{I_A}{(Z+I_A)} = 1 \Longrightarrow \frac{Z}{(Z+I_A)} = \lambda$, *e* $\frac{I_A}{(Z+I_A)} = (1-\lambda)$, *com* $\lambda < 1$, *logo:*

$$g_y = \lambda g_z + (1-\lambda)g_{I_A} + \frac{dh}{dt}\frac{1}{(1-c-h)} \tag{2.5}$$

Considerando que o investimento tem duas componentes, ou seja, $I = I_A + I_I$, *segue que:*

$$se\ \gamma = \frac{I_A}{I_A + I_I} \Longrightarrow g_i = g_{I_A}\gamma + g_{I_I}(1-\gamma) \tag{2.6}$$

Por outro lado, como parte do investimento é induzida, ou seja, $I_I = hY$, então:

$$g_{I_I} = \frac{\left[\frac{dh}{dt}\right]}{h_t} + g_y,$$

e portanto,

$$\frac{dh}{dt} = h_t(g_{I_I} - g_y) \tag{2.7}$$

Também o grau de utilização da capacidade produtiva $u_t = \frac{Y_t}{Y_t^*}$, nos dá a seguinte equação:

$$\frac{du}{dt} = u_t(g_y - g_k). \tag{2.8}$$

Nessas condições, considerando as equações (2.7) e (2.8), temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$S = \begin{cases} \frac{dh}{dt} & = & h_t(g_{I_I} - g_y) \\ \frac{du}{dt} & = & u_t(g_y - g_k) \end{cases} \tag{2.9}$$

Supondo que exista uma solução constante para esse sistema de equações diferenciais (u^*, h^*) com $u^* > 0$ e $0 < h^* < (1-c)$, e substituindo h^* em (2.5), resulta: $g_y = \lambda g_z + (1-\lambda)g_{I_A}$, logo, em equilíbrio, g_y é constante e igual à soma ponderada das duas taxas g_z e g_{I_A}. Por outro lado, temos também, em equilíbrio, que $g_{I_I} = g_y = g_k$. Isso implica em que $g_i = g_{I_A}\gamma + g_{I_I}(1-\gamma)$, é conhecido.

Considerando, agora, a equação diferencial (2.2), anteriormente deduzida e descrita abaixo:

$$\frac{dg_{k_t}}{dt} = (g_{k_t} + \delta)(g_i - g_{k_t}),$$

temos que $g_k = g_i$. Nessas condições $g_y = g_{I_I} = g_k = g_i$. Usando que $g_{I_I} = g_i$ em (2.6), temos:

$$g_{I_I} = g_{I_A}\gamma + g_{I_I}(1-\gamma) \Longrightarrow g_{I_I}\gamma = g_{I_A}\gamma,$$

e isso implica em que $g_{I_I} = g_{I_A}$ ou $\gamma = 0$.

Se $\gamma = 0$, temos que $\frac{I_A}{I_A + I_I} = 0 \Longrightarrow I_A = 0$, o que contraria a hipótese de o investimento apresentar uma componente autônoma não nula. Logo,

$$g_{I_I} = g_{I_A} \Longrightarrow g_{I_A} = g_y.$$

Como em equilíbrio $g_y = \lambda g_z + (1-\lambda)g_{I_A}$, temos $g_{I_A} = \lambda g_z + (1-\lambda)g_{I_A}$ e, portanto:

$$g_{I_A}\lambda = \lambda g_z \Longrightarrow g_{I_A} = g_z \text{ ou } \lambda = 0.$$

Porém se $\lambda = 0$, temos $\frac{Z}{Z + I_A} = 0 \Longrightarrow Z = 0$. Logo há duas alternativas:

(a) $g_{I_A} = g_z$, *isto é, as taxas autônomas dadas são exatamente iguais.*

(b) $Z = 0$, *ou seja, todos os gastos autônomos distintos do investimento produtivo são induzidos.*

2. *Caso segundo: O investimento não tem componente induzida.*

   Nesse modelo, consideramos g_{I_A} *e* g_z *como constantes dadas, temos as seguintes equações:*

   (a) $g_y = \lambda g_z + (1-\lambda) g_{I_A}$, *onde* $\lambda = \frac{Z}{Z+I_A}$.

   (b) $g_i = g_{I_A}$.

   (c) $\frac{du}{dt} = u(g_y - g_k)$

   (d) $\frac{dg_{k_t}}{dt} = (g_k + \delta)(g_i - g_k)$.

   Como g_i *é dada, essa taxa é uma solução atratora para a equação em (d), logo* $g_k = g_i$. *Por outro lado, se a equação em (c) admite solução* $u^* > 0$, *temos que* $g_y = g_k$, *logo* $g_i = g_k = g_y = g_{I_A}$. *Assim, tomando* $g_y = g_{I_A}$, *a equação (a) indica que:*

$$g_{I_A} = \lambda g_z + (1-\lambda) g_{I_A} \Longrightarrow \lambda g_z = \lambda g_{I_A} \Longrightarrow g_z = g_{I_A} \text{ ou } \lambda = 0 \Longrightarrow Z = 0.$$

   É, então, configurado as duas alternativas.

   E com isso terminamos a demonstração da proposição. ■

Passamos agora à demonstração do Teorema(2.2.1).

Observe que a existência de um ponto crítico, não necessariamente atrator, ser condicionada ao fato de a taxa de crescimento do investimento autônomo ser igual à taxa de crescimento dos gastos autônomos não é uma condição muito realista. A autonomia confere aleatoriedade a qualquer variável. Dessa forma, a igualdade entre as taxas seria uma condição singular - ocorrendo possivelmente com uma probabilidade incipiente. Em vista disso, é mais plausível a condição de que os gastos autônomos, em face à presença de uma componente autônoma do investimento produtivo, sejam nulos.

Considerando, então, um modelo de crescimento liderado pela demanda via investimento, onde pelo menos uma componente do investimento produtivo é autônoma, temos a partir do equilíbrio entre demanda e oferta agregada,

$$Y = \frac{I_A + I_I}{1-c} \Longrightarrow \frac{I_A}{s-h},$$

onde I_A *é a componente autônoma e* $I_I = hY$ *é a componente induzida, e* $s = 1-c$, *com* $c < 1$ *a propensão a consumir dos trabalhadores, dada exogenamente.*

1. **Caso primeiro:** *O investimento produtivo é totalmente autônomo.*

Nesse caso, considerando que não existem gastos autônomos, dada a taxa de crescimento do investimento produtivo autônomo $g_{I_A} = g_i$*, temos as seguintes condições:*

(a) $g_y = g_{I_A} = g_i$*, uma vez que* $Y = \frac{I_A}{s}$

(b) $\frac{du}{dt} = u_t(g_{y_t} - g_{k_t})$.

(c) $\frac{dg_{k_t}}{dt} = (g_{k_t})(g_i - g_{k_t})$[6]

Substituindo a condição (a) em (c), temos as duas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} 1)\dfrac{dg_{k_t}}{dt} & = & (g_{k_t})(g_i - g_{k_t}) \\ \\ 2)\dfrac{du_t}{dt} & = & u_t(g_i - g_{k_t}) \end{cases}$$

Dessa forma, dada a condição inicial para $t_o = o; g_{k_o} = g_k(o)$*, temos que a solução da primeira equação diferencial, conforme resolução (4.4), em apêndice, é dada por:*

$$g_{k_t} = \begin{cases} \dfrac{mg_i e^{t(g_i)}}{1 + me^{t(g_i)}} & se \quad 0 < g_{k_o} < g_i \ ou \ g_i < g_{k_o} < 0 \\ \\ \dfrac{-mg_i e^{t(g_i)}}{1 - me^{t(g_i)}} & se \quad g_{k_o} > 0 \ e \ g_{k_o} > g_i \\ \\ \dfrac{mg_i e^{t(g_i)}}{-1 + me^{t(g_i)}} & se \quad g_{k_o} < 0 \ e \ g_{k_o} < g_i \\ 0 & se \quad g_{k_o} = 0 \\ g_i & se \quad g_{k_o} = g_i \end{cases} \tag{2.10}$$

onde

$$m = \frac{|g_{k_o}|}{|g_i - g_{k_o}|}.$$

Por outro lado a solução da segunda equação com condição inicial dada por $t_o = 0$ *e* $u_o = u(o)$*, conforme dedução (4.5),também deduzida no apêndice, é dada por:*

$$u_t = u_o e^{\int_o^t (g_i - g_{k_s})ds}$$

Assim, substituindo as soluções g_{k_t} *na integral* $\int_o^t (g_i - g_{k_s})ds$*, resulta*[7] *que:*

[6] Para facilitar as contas, sem perda de generalidades, vamos considerar a depreciação $\delta = 0$.

[7] Ver dedução dessa integração em (4.6),(4.7) e (4.8), no apêndice.

$$u_t = \begin{cases} u_o e^{ln\frac{|m+1|}{|me^{-t(g_i)}|}} & se \quad 0 < g_{k_o} < g_i \; ou \; g_i < g_{k_o} < 0 \\ \\ u_o e^{ln\frac{|m-e^{-t(g_i)}|}{|m-1|}} & se \quad g_{k_o} > 0 \; e \; g_{k_o} > g_i \\ u_o e^{ln\frac{|m+e^{-t(g_i)}|}{|m-1|}} & se \quad g_{k_o} < 0 \; e \; g_{k_o} < g_i \end{cases} \tag{2.11}$$

e ainda:

$$u_t = \begin{cases} u_o e^{tg_i} & se \quad g_{k_o} = 0 \\ u_o e^0 & se \quad g_{k_o} = g_i \end{cases}$$

Calculando agora $u^* = lim_{t \longrightarrow \infty} u_t$, obtemos:

$$u^* = \begin{cases} u_o \frac{g_i}{g_{k_o}} & se \quad 0 < g_{k_o} < g_i \; ou \; g_i < g_{k_o} < 0 \\ \\ u_o \frac{g_{k_o}}{|g_i|} & se \quad g_{k_o} > 0 \; e \; g_{k_o} > g_i \\ \\ u_o \frac{|g_{k_o}|}{|g_i|} & se \quad g_{k_o} < 0 \; e \; g_{k_o} < g_i \\ \infty & se \quad g_{k_o} = 0 \\ u_o & se \quad g_{k_o} = g_i \end{cases} \tag{2.12}$$

Observe que para uma taxa de crescimento do investimento autônomo $g_i > 0$, constante ao longo do processo de convergência, o sistema é fortemente estável. Taxas próximas à taxa dada produzem graus de utilização também próximos. Nesses termos se em $t = o$, tivermos as condições iniciais (u_o, g_{k_o}), que para uma dada taxa g_i produz em equilíbrio o grau de utilização normal da capacidade produtiva, então o sistema se estabiliza em torno do grau normal. Contudo, o ajustamento se dá via variação do grau de utilização da capacidade produtiva. Dessa forma, caso a taxa de crescimento do investimento autônomo seja distinto de uma taxa garantida, embora exista um processo de ajustamento para um determinado grau de utilização para o longo prazo- com a manutenção, naturalmente da constância da taxa de crescimento dos investimentos autônomos-, esse grau é diferente do normal. Mais precisamente, dadas as condições iniciais, existe uma única taxa de crescimento do investimento autônomo que leva o sistema a se ajustar em direção ao grau de utilização normal. Taxas próximas a essa também geram graus de utilização próximos do normal. Para essas condições, se $g_i > 0$ é bastante distante dessa taxa garantida, o grau de utilização apresenta a mesma característica, ou seja, é bem *distante do normal.*

Outra observação importante é que essa condição de equilíbrio estável só é determinada se a taxa de crescimento dos investimentos autônomos se mostrar constante durante um tempo suficientemente grande para que a convergência das soluções não constantes ocorra. Vale lembrar que o uso de equações diferenciais, leva a um processo determinístico onde as convergências naturalmente ocorrem em um tempo t tendendo ao infinito. Dessa forma o mais provável é que o sistema assim modelado exiba apenas a tendência a uma trajetória estável.

2. **Caso segundo:** $I_{I_t} = h_t Y_t$, *onde* $\dfrac{dh}{dt} = hf(t)$, *com* $f(t) = (g_{I_t} - g_{y_t})$ *pelo menos integrável.* *Nesse caso, as condições (a), (b) e (c) do caso anterior continuam válidas e então, se* $0 < h^* < s$, *é um ponto crítico para a equação* $\dfrac{dh}{dt} = hf(t)$, *temos que a primeira equação do sistema S se torna:*

$$\frac{du_t}{dt} = u_t(g_{I_A} - \frac{s}{v}u_t) = \frac{s}{v}u_t(\frac{v}{s}g_{I_A} - u_t) = \frac{u_t}{\frac{v}{s}}(g_{I_A}\frac{v}{s} - u_t).$$

Observe que a igualdade acima $\dfrac{du_t}{dt} = \dfrac{u_t}{\frac{v}{s}}(g_{I_A}\dfrac{v}{s} - u_t)$, *é uma equação diferencial ordinária de Bernoulli de segunda ordem da forma:* $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{x(t)}{a}(b - x(t))$, *onde* $a = \frac{v}{s}$ *e* $b = g_{I_A}\frac{v}{s}$. *As soluções dessa equação com condição inicial* $(t_o = 0, u_o = u(o) > o)$ *são dadas por*[8]*:*

$$u_t = \begin{cases} \dfrac{mg_{I_A}\frac{v}{s}e^{t(g_{I_A})}}{1 + me^{t(g_{I_A})}} & se \quad 0 < u_o < g_{I_A}\frac{v}{s} \\[2em] \dfrac{-mg_{I_A}\frac{v}{s}e^{t(g_{I_A})}}{1 - me^{t(g_{I_A})}} & se \quad u_o > g_{I_A}\frac{v}{s} \\[2em] g_{I_A}\frac{v}{s} & se \quad u_o = g_{I_A}\frac{v}{s} \end{cases} \tag{2.13}$$

onde

$$m = \frac{|u_o|}{|g_{I_A}\frac{v}{s} - u_o|}.$$

Usando, agora, a regra de L'Hospital, para as soluções onde $u_o \neq g_{I_A}\frac{v}{s}$ *temos:*

$$\lim_{t\to\infty} u_t = \lim_{t\to\infty} \frac{g_{I_A}\frac{v}{s}g_{I_A}me^{t(g_{I_A})}}{g_{I_A}me^{t(g_{I_A})}} = g_{I_A}\frac{v}{s},$$

Dessa forma, o grau de utilização converge para o grau de utilização normal da capacidade produtiva u_n, *se e somente se* $g_{I_A}\dfrac{v}{s} = u_n \Longrightarrow g_{I_A} = u_n\dfrac{s}{v}$, *ou seja, uma espécie de taxa*

[8] Ver a dedução dessa solução em (4.4), no apêndice.

garantida de Harrod. A diferença, para o modelo instável de Harrod, é que como o grau de utilização funciona como variável de ajuste e a taxa de crescimento do investimento autônomo lidera o crescimento econômico, a trajetória ao longo do tempo não necessariamente é explosiva. Em um caso bastante singular onde g_{I_A} gire em torno de $u_n\frac{s}{v}$, o grau de utilização normal da capacidade produtiva, se estabiliza em torno do normal. Mas esse é um caso singular. Observe ainda, que dada a taxa g_{I_A}, o processo de convergência para um grau de utilização de equilíbrio se dá via variação do grau de utilização da capacidade produtiva, variação essa que depende das condições iniciais do processo.

3. **Caso terceiro:** *$I_{I_t} = h_tY_t$ com $0 < h_t < s < 1$ dada pela relação $\dfrac{dh}{dt} = \alpha h(u_t - u_n)$, onde u_n é o grau normal de utilização da capacidade produtiva e $\alpha < 1$ é uma constante.*

   Nessas condições, dada a taxa de crescimento do investimento autônomo, g_{I_A}, temos:

   (a) $g_{y_t} = g_{I_A} + \dfrac{\frac{dh}{dt}}{s - h_t}$.

   (b) $g_{k_t} = \dfrac{I_{A_t} + I_{I_t}}{K_t} = \dfrac{I_t}{K_t} = \dfrac{I_t}{Y_t}\dfrac{Y_t}{Y_t^*}\dfrac{Y_t^*}{K_t} = s\dfrac{u_t}{v}$

   (c) $\dfrac{du_t}{dt} = u_t(g_{y_t} - g_{k_t})$.

   (d) $\dfrac{dh}{dt} = \alpha h_t(u_t - u_n)$.

   (e) $\dfrac{dg_{K_{A_t}}}{dt} = g_{K_{A_t}}(g_{I_A} - g_{K_{A_t}})$.

   Além dessas equações diferenciais temos a equação definida pelo investimento induzido, ou seja,

$$\frac{dh}{dt} = h_t(g_{I_{I_t}} - g_{y_t})$$

   Observe que a equação diferencial descrita no item (e), acima, nos garante que em equilíbrio, como a taxa de crescimento do investimento autônomo é dada, $g_{I_A} = g_{K_A}$. Assim, substituindo as equações (a) e (b) em (c), temos o sistema:

$$S = \begin{cases} \dfrac{du_t}{dt} &= u_t(g_{I_A} + \dfrac{\frac{dh}{dt}}{s - h_t} - s\dfrac{u_t}{v}) \\ \\ \dfrac{dh_t}{dt} &= \alpha h_t(u_t - u_n) \end{cases} \tag{2.14}$$

   Considerando, agora uma solução constante, distinta da origem $h^* > 0$ para a segunda equação do sistema (2.14), temos que $u_t = u_n$. Nessas condições, $\dfrac{dh_t}{dt} = 0 \Longrightarrow \dfrac{du_t}{dt} =$

$u_n(g_{I_A} - s\frac{u_n}{v}) = 0 \Longleftrightarrow g_{I_A} = s\frac{u_n}{v}$, *ou seja o grau normal de utilização é obtido apenas a partir de uma taxa garantida* g_{I_A}.

Dessa forma, para taxas $g_{I_A} \neq s\frac{u_n}{v}$, *a solução constante* $(u^* = u_n, h^*)$, *onde* h^* *é o valor que iguala as taxas de crescimento do investimento induzido e da economia, não se configura em um atrator e, portanto, nesse ponto o sistema é instável.*

Assim, para os três casos, ou não existe ponto crítico para toda taxa de crescimento do investimento autônomo dada, ou o grau de utilização depende diretamente da taxa dada e ou das condições iniciais da trajetória. ■

Observe que nos modelos descritos acima, ainda que a taxa de crescimento dos investimentos autônomos permaneçam constantes durante o período de convergência do grau de utilização da capacidade produtiva, não existe um grau de utilização da capacidade u^* *que seja um atrator, ou um componente de um ponto crítico atrator, para qualquer taxa de crescimento do investimento autônomo dada. Mesmo em havendo uma componente induzida do investimento produtivo, o equilíbrio de longo prazo que iguala as duas taxas, também iguala as respectivas taxas de crescimento da capacidade produtiva, determinando o valor de* h^* *e definindo* $g_{k_{I_t}} = \frac{s}{v}u_t$. *Essa última identidade transforma a equação diferencial relativa ao grau de utilização da capacidade produtiva em uma equação diferencial de Bernoulli de ordem dois, cuja solução constante, dependente da taxa de crescimento do investimento produtivo autônomo, é um atrator fortemente estável. Nessas condições - em havendo o ponto de equilíbrio estático requerido-, tais modelos não apresentam grande diferença quando comparados com o modelo onde o investimento é totalmente autônomo. De fato o que ocorre é que havendo ou não investimento induzido, nos modelos liderados pelo investimento, a propensão média a poupar é igual à propensão marginal, logo o comportamento, em longo prazo, é similar, podendo ainda, hão haver o equilíbrio estável, mesmo com a já mencionada taxa de crescimentos dos investimentos autônomos constantes.*

Em vista disso, modelos com investimento híbridos, embora exista a possibilidade de trajetórias estáveis, exibem quase sempre grau de utilização da capacidade produtiva distinta da normal. Dependendo também de como é definida a função referente à propensão marginal a investir, h_t, *o sistema pode se mostrar instável*[9].

Assim, resta considerar os modelos onde o investimento é totalmente induzido. Nesse caso pode ou não haver gastos autônomos não produtivos. Ocorre que em não havendo gastos autônomos, o investimento totalmente induzido leva ao problema da instabilidade fundamental de Harrod. Nesse modelo, considera-se que todos os gastos são induzidos com a variação

[9] As simulações no final desse capítulo indicam tal instabilidade, embrora naturalmente não a comprovem.

da propensão a investir sendo uma função crescente[10] *do grau de utilização da capacidade produtiva, isto é:*

$$\frac{dh}{dt} = f(h, u_t), \ e \ \frac{\partial f}{\partial u} > 0, \tag{2.15}$$

Por outro lado, dada a propensão a poupar s, para cada taxa de crescimento do produto dada $g_y = g_i$[11]*, como* $g_{k_t} = \frac{s}{v}u_t$ *tem-se:*

$$\frac{du_t}{dt} = u_t(g_y - \frac{s}{v}u_t),$$

equação diferencial cujas soluções, já descritas na demonstração do teorema(2.2.1), caso segundo, convergem para $u^* = g_y\frac{v}{s}$*. Como o investimento, nesse modelo, responde diretamente à variação do grau de utilização da capacidade, maiores taxas de crescimento do produto, ao aumentar o grau de utilização, faz com que aumente, em período posterior, a taxa de crescimento do investimento, levando sucessivamente a um processo explosivo. Menores taxas, inversamente, têm como consequência um processo recessivo com taxa do produto, investimento e grau de utilização da capacidade, tendendo a zero. Dessa forma, para Harrod, apenas a taxa* $g_y = \frac{s}{v}$ *equivalente ao grau de utilização* $u = 1$ *geraria um processo de estabilidade. Observe que localmente o sistema é estável pois taxas de crescimento do produto próximas, fazem com que os respectivos grau de utilização da capacidade produtiva também sejam próximos.*

Logo, chegamos à conclusão de que considerar todos os gastos como induzidos pela renda também não gera um modelo viável para a descrição de um processo econômico não explosivo onde o grau de utilização exiba uma tendência para o grau normal. Isso implica que tais modelos não satisfazem a segunda condição descrita no início desse capítulo e dificilmente satisfazem a primeira condição, isto é, apresentem trajetórias estáveis em longo prazo.

Em vista disso, resta a possibilidade de considerar que uma parte dos gastos não seja induzida e que esses gastos não gerem capacidade produtiva. Assim, no próximo capítulo o

[10] Segundo Serrano e Freitas(2010):

> Harrod supunha que o investimento agregado fosse totalmente induzido e sensível ao grau de utilização da capacidade. Decorre disto que frente a uma sobre utilização da capacidade ($u > 1$) as empresas em conjunto reagiriam aumentando seus investimentos, enquanto que diante de uma situação de subutilização da capacidade ($u < 1$) elas tenderiam a reduzir os investimentos. Nos dois casos a reação das empresas faria com que a taxa efetiva de crescimento se afastasse cada vez mais da taxa garantida (teríamos, respectivamente,$g >> g_w$ e $g << g_w$). (Serrano e Freitas; 2010:p.4)

[11] Uma vez que $Y = \frac{I}{s}$.

objeto de análise serão os modelos onde existem gastos autônomos que não geram capacidade produtiva e, além disso, os investimentos produtivos são totalmente induzidos pela renda.

2.3 Simulações

Nota: *As simulações foram elaboradas a partir do programa Microsoft Excel utilizando as equações que definem os modelos. Vale salientar que tais simulações são indicações do comportamento descrito pelo modelo. Não servem, portanto, como comprovação efetiva dos resultados obtidos de forma teórica.*[12]

- *A primeira simulação é referente ao modelo onde o investimento é todo autônomo. Nesse modelo, como vimos, dada a taxa de crescimento dos gastos autônomos, o grau de utilização convergirá para o valor* $u^* = g_a \frac{v}{s}$. *Tal fato ocorrerá independente do grau de utilização inicial* u_o.

  Dessa forma, o gráfico 2.1 representa um processo com condições iniciais de $u_o = 0.8, g_{k_o} = 0.04$ *e taxa de crescimento* $g_a = 0.02$. *Logo, considerando* $v = 4$ *e* $s = 0.2$ *temos a convergência assintótica do grau de utilização da capacidade para* $u^* = 0.4$.

  O gráfico 2.2 representa um processo com condição iniciais de $u_o = 0.4, g_{k_o} = 0.03$ *e taxa de crescimento* $g_a = 0.04$, *resultando na convergência assintótica do grau de utilização da capacidade para* $u^* = 0.8$, *o grau normal ou planejado.*

- *Os modelo de crescimento com investimento híbrido possivelmente não apresentam situação de equilíbrio ou são divergentes. Observe que na parte teórica referente a esses modelos, foi apresentado apenas as condições necessárias para trajetórias estáveis sem entrar no mérito se o modelos apresentam, ou não, tais condições.*

[12] Mais especificamente, as simulações foram realizadas utilizando a programação normal do Excel, onde as equações, em tempo contínuo, foram adequadas para o tempo discreto através de aproximação linear.

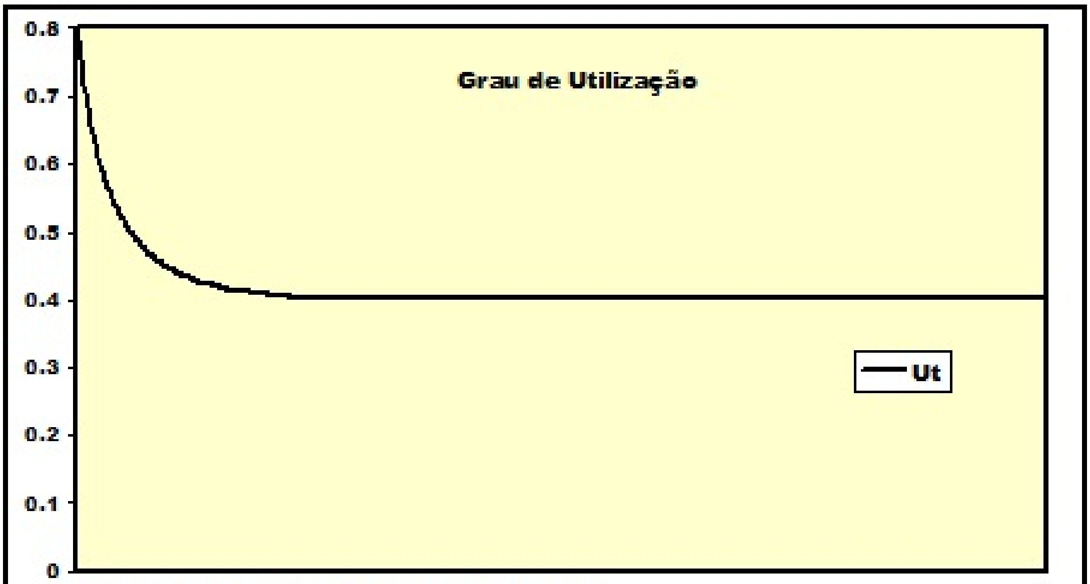

Gráfico 2.1 - Elaboração própria -Excel

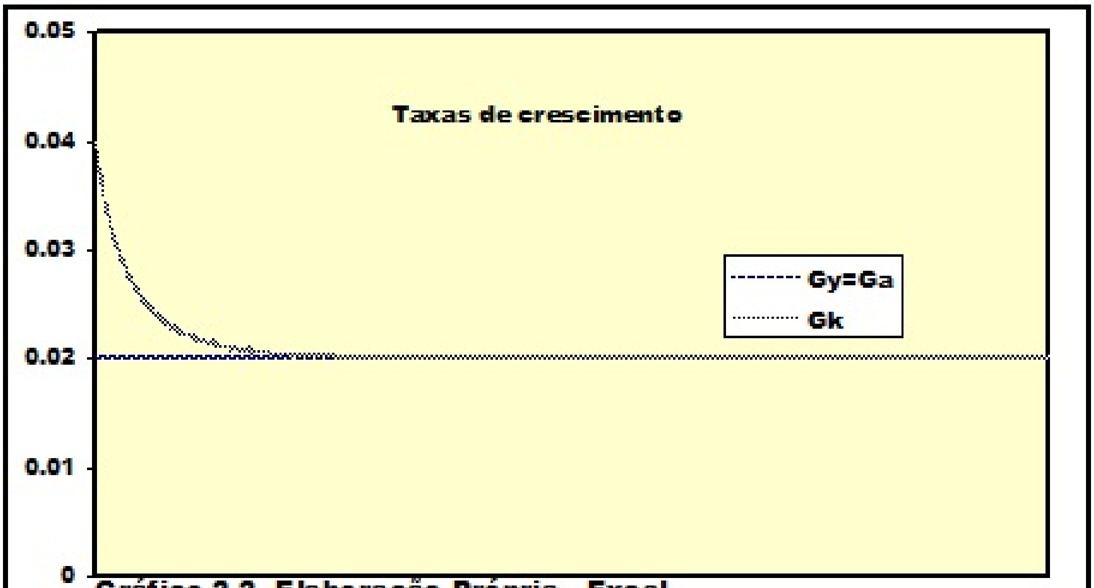

Gráfico 2.2 -Elaboração Própria - Excel

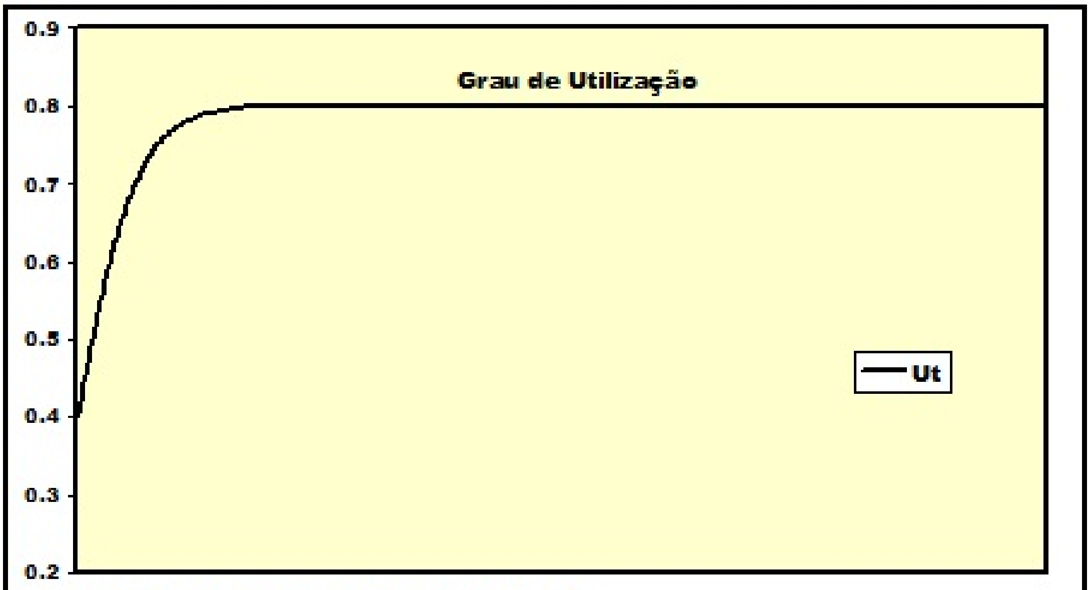

Gráfico 2.3 - Elaboração própria -Excel

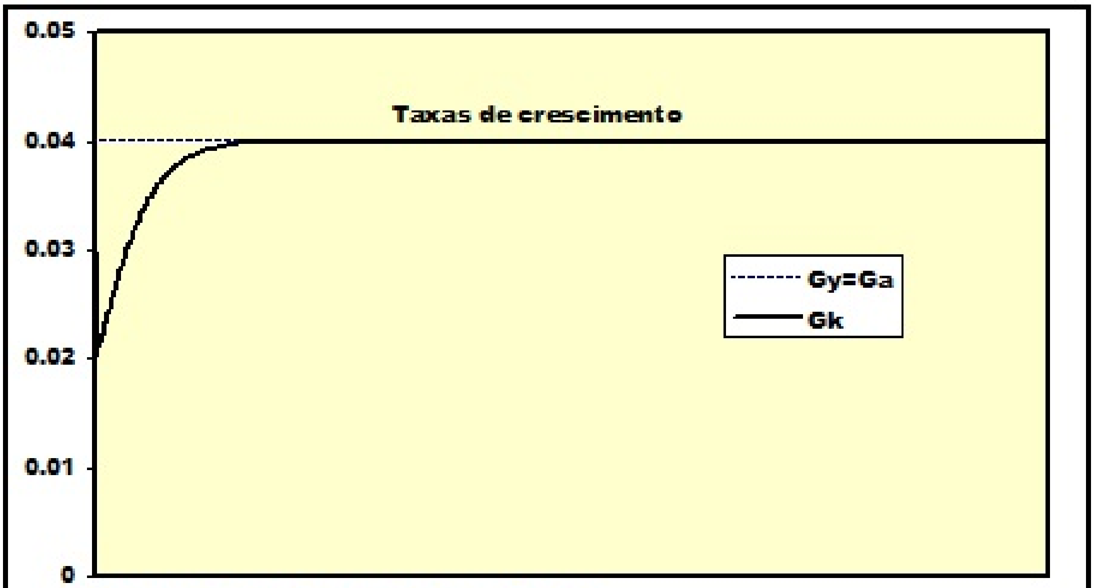

Gráfico 2.4 -Elaboração Própria - Excel

3 Modelos de crescimento liderados pelos gastos autônomos improdutivos

Nota:*Por gastos autônomos improdutivos entenda-se aqueles que não criam capacidade produtiva.*

A existência de gastos autônomos em modelos de crescimento econômico é uma hipótese mais que razoável: é impossível conceber uma economia aberta ao mercado externo onde inexistam tais gastos, uma vez que as exportações dependem da renda do resto do mundo e, portanto, não está vinculada à renda doméstica. Naturalmente é um dos componentes decisivos para o crescimento econômico, particularmente em economias, como a alemã, lideradas pela exportação. Contudo, em modelos simplificados, como os nesse trabalho estudados, onde a economia é considerada fechada, os gastos autônomos podem ser representados pelo consumo dos trabalhadores, via crédito, e o consumo dos capitalistas, além de investimento residencial e o consumo e investimento do Governo[1].

Dessa forma os modelos de crescimento liderados pelos gastos autônomos são definidos da seguinte maneira:

Definição 3.0.1 **Modelos de crescimento liderados pela demanda via gastos autônomos improdutivos** *São modelos de crescimento econômico onde a componente da demanda agregada, relativa aos gastos autônomos não geradores de capacidade produtiva é a responsável pela expansão do processo de acumulação de capital. Nesses modelos o crescimento da taxa de investimento produtivo é uma consequência da expansão da taxa de crescimento dos gastos autônomos. Em outros termos, o investimento produtivo responde aos aumentos da demanda efetiva.*

Um modelo específico de crescimento liderado pela demanda via gastos autônomos que passaremos a analisar nas próximas linhas, é o modelo do Supermultiplicador Sraffiano, proposto independentemente por Bortis(1979)[2]*, Serrano(1996) e DeJuan que em seu artigo de*

[1] Embora os gastos do Governo não apareçam explicitamente nesse trabalho.

[2] Vaçe salientar que o modelo de Bortis, embora utilize uma análise onde interliga curto, médio e longo prazo,

2005, alega ter chegado às mesmas conclusões em sua tese de doutorado de 1989, com as sofisticações dadas por trabalhos posteriores, como o de Freitas e Serrano(2010) e (2013).

3.1 O Modelo do Supermultiplicador Sraffiano

Nota: *Grande parte dessa subseção é baseada no trabalho de Serrano e Freitas (2013). Assim, embora nesse trabalho estejamos tratando desse tipo de modelo sem nos preocuparmos com as hipóteses simplificadoras, nas linhas abaixo serão listadas as premissas que delinearam o modelo proposto pelos autores.*

Nesse modelo, o adjetivo sraffiano é consequência da hipótese de que a distribuição funcional da renda é dada exogenamente - não tendo, portanto, nenhuma função no ajuste da capacidade à demanda. Já o termo supermultiplicador diz respeito à incorporação, ao modelo, do princípio multiplicador de Keynes e do princípio acelerador do investimento.

Definição 3.1.1 **Efeito multiplicador.** *O efeito do multiplicador Keynesiano, aumenta a renda, relativamente ao aumento da demanda agregada - através do consumo induzido-, em proporção maior que 1, dada por* $\frac{1}{1-c}$*, onde* $0 < c < 1$ *é a propensão marginal a consumir.*

Definição 3.1.2 **Efeito acelerador.** *O efeito acelerador faz com que as variações no produto exerçam influência sobre o nível de investimento, que através de sua natureza dual, aumenta a demanda agregada. A ideia central do princípio do acelerador é que a demanda por bens de capital é uma demanda derivada e, então, alterações na demanda agregada levarão a alterações na demanda por bens de capital, e portanto, a aumentos no investimento produtivo.*

No modelo de crescimento econômico do Supermultiplicador Sraffiano, existem gastos autônomos que não criam capacidade produtiva e o investimento produtivo é totalmente induzido. Além disso, são consideradas as seguintes hipóteses:

1. *Economia fechada e sem governo.*
2. *Distribuição da renda entre salários e lucros dada exogenamente.*
3. *Existência de um único e fixo método de produção que utiliza trabalho e capital homogêneos para a produção de um único produto.*
4. *Recursos naturais abundantes.*
5. *Retornos constantes de escala e inexistência de progresso tecnológico.*

além de considerar uma economia aberta, chega à conclusões similares à do supermultiplicador de Serrano.

6. Mão de obra não escassa.

Nota: *A medida das variáveis será dada em termos reais. Também o produto, renda, lucros, investimento e poupança serão apresentados em termos brutos.*

Nessa direção consideramos a demanda agregada (DA) em um tempo t, D_t *definida por:*

$$D_t = C_{ct} + Z_t + I_t,$$

onde $C_{ct} = cY_t$, *com* $0 < c < 1$ *a propensão marginal a consumir,* Z_t *são os gastos autônomos, e* I_t *o investimento produtivo totalmente induzido. Em vista disso, o consumo total agregado é dado por* $C_t = C_{ct} + Z_t$, *e considerando o equilíbrio entre o produto e demanda agregada temos:*

$$Y_t = \left(\frac{1}{1-c}\right)(Z_t + I_t) = \frac{Z_t + I_t}{s} \tag{3.1}$$

onde $0 < s = 1 - c < 1$, *é a propensão marginal a consumir e* $\left(\frac{1}{1-c}\right) = \frac{1}{s}$, *é o usual multiplicador Kaleckiano. O fato de esse multiplicador ter valor maior que um, implica em que o produto de equilíbrio exiba um nível positivo.*

Uma das principais diferenças entre o modelo do supermultiplicador e os modelos de inspiração puramente Kaleckiana, diz respeito à propensão média e marginal a poupar: nos modelos kaleckianos, a não existência de gastos autônomos distintos do investimento produtivo implica em que ambas as propensões a poupar sejam iguais. Tal fato não ocorre no modelo em descrição, uma vez que a identidade[3] *entre poupança* S_t *e investimento* I_t, *resulta em:*

$$S_t = I_t \Longrightarrow S_t = sY_t - Z_t = I_t \Longrightarrow \frac{S_t}{Y_t} = s - \frac{Z_t}{Y_t} = s - z_t = sf_t = \frac{I_t}{Y_t}.$$

onde $f_t = \frac{I_t}{I_t+Z_t} = \frac{\frac{I_t}{Y_t}}{\frac{I_t+Z_t}{Y_t}} = \frac{\frac{S_t}{Y_t}}{\frac{I_t+Z_t}{Y_t}} = \frac{\frac{S_t}{Y_t}}{s}$, *ou seja, a razão entre a propensão média e marginal a poupar. Observe, no entanto, que se* $Z_t = 0 \Longrightarrow f_t = 1 \Longrightarrow \frac{S_t}{Y_t} = s$, *isto é, existe a identidade entre propensão média e marginal a poupar.*

Por outro lado, se $Z_t \neq 0$, *temos* $z_t = \frac{Z_t}{Y_t} = s - sf_t = s(1 - f_t)$, *e então, lembrando que* $f_t = \frac{I_t}{I_t + Z_t}$, *um acréscimo (decréscimo) no investimento agregado, em relação ao gasto autônomo agregado, implica em um acréscimo (decréscimo) em* f_t, *acarretando inversamente um decréscimo (acréscimo) em* z_t. *Por sua vez, como* $\frac{S_t}{Y_t} = s - z_t$, *dada a propensão marginal a poupar* s, *um*

[3]Observe que essa identidade é apenas algébrica. Na verdade, o princípio da demanda efetiva estabelece uma relação causal do investimento para a poupança, isto é: $I_t \Longrightarrow S_t$.

aumento do investimento produtivo agregado em relação a Z_t, acarreta decréscimo em z_t e, portanto, acréscimo na propensão média a poupar $\frac{S_t}{Y_t}$. Analogamente uma queda no investimento produtivo agregado, em relação a Z_t acarreta a queda na propensão média a poupar.

Considerando agora que o investimento produtivo agregado é totalmente induzido, temos a expressão: $I_t = hY_t$, com $0 < h < 1$, a propensão marginal a investir, que consideraremos temporariamente como dada exogenamente. Nesses termos, considerando novamente o equilíbrio entre produto e demanda agregada, temos:

$$Y_t = (\frac{1}{s-h})Z_t, \tag{3.2}$$

onde $\left(\frac{1}{1-c-h}\right)$ é a definição do supermultiplicador que capta os efeitos na demanda agregada associados aos gastos com investimento produtivo e consumo, ambos induzidos e $c+h$, é a propensão marginal a gastar.

Em relação à propensão marginal a gastar, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1 *Para que o sistema de crescimento econômico apresente uma trajetória estável é necessário que a propensão marginal a gastar seja menor do que um, isto é, $0 < c+h < 1$.*

Prova: *Primeiramente é importante observar que as propensões marginais a consumir (c), e a investir (h), são positivas e menores do que 1, logo a propensão marginal a gastar é maior que zero, e então $1-c-h$, não pode ser maior que 1. Dessa forma, partindo de uma situação de equilíbrio entre oferta agregada e demanda conforme equação (3.2), se a propensão marginal a gastar fosse igual a 1 teríamos que o supermultiplicador $\left(\frac{1}{s-h}\right) = \left(\frac{1}{1-c-h}\right)$, não estaria bem definido e geraria um processo altamente instável. Nessas condições para que exista, em equilíbrio, um nível de produto positivo, é necessário que a propensão a gastar seja menor do que 1.* ■

Corolário 3.1.1 *Se a propensão marginal a gastar é menor que 1, então a estabilidade do sistema, ou seja a existência em equilíbrio de um nível de produto positivo, quando o investimento produtivo é totalmente induzido, está condicionada à existência de componentes autônomas na demanda agregada.*

[4]**Prova:** *Observe que a equação $Y_t = (\frac{1}{s-h})Z_t$, nos dá que qualquer nível positivo do produto requer um nível positivo de gastos autônomos. Caso os gastos autônomos fossem nulos,*

[4]Para uma demonstração mais específica, envolvendo o processo de investimento produtivo - definido pela variação do estoque de capital, nesse caso, fixo - ver o apêndice do capítulo 2, mais especificamente o teorema (4.0.2). Observe que para o processo, em nível, não ser explosivo, é necessário que haja uma componente autônoma na demanda. Nessa demonstração, Z foi considerado como gastos autônomos não produtivos, mas poderia ser também considerado investimento autônomo.

qualquer nível positivo de produto estaria associado a um excesso de oferta. O processo de ajustamento entre oferta e demanda levaria a um equilíbrio onde o nível de produto seria nulo. Assim, em presença de investimentos produtivos totalmente induzidos, é necessária a existência de um nível positivo de gastos autônomos. ■

Finalmente observe que $\frac{S_t}{Y_t} = s - z_t = s - \frac{Z_t}{Y_t} = s - (s - h) = h$, *logo, para uma dada distribuição de renda e, portanto, para uma dada propensão marginal a poupar s, a propensão marginal a investir* h, *determina a propensão média a poupar da economia.*

No que segue, fundamentada no descrito acima, serão feitas algumas considerações acerca das taxas de crescimento de algumas variáveis, importantes para a construção do sistema de equações diferenciáveis que norteiam o processo de crescimento de longo prazo da economia, referente a esse modelo.

Primeiramente consideramos que diante das hipóteses simplificadoras desse sistema, o produto potencial dessa economia, Y^*, *é definido por:*

$$Y_t^* = \frac{1}{v} K_t,$$

onde K_t *é o nível do estoque de capital instalado - e* v[5], *a relação capital produto, constante.*

Considerando que $I_t = \frac{dK_t}{dt} + \delta K_t$, *onde* δ[6] *é a depreciação do estoque de capital instalado, temos:*

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{\frac{dK_t}{dt}}{K_t} + \delta = g_{k_t} + \delta \Longrightarrow g_{k_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta,$$

logo a taxa de crescimento da capacidade produtiva g_{k_t} *é dada por:*

$$g_{k_t} = \frac{I_t}{K_t} - \delta = \frac{I_t}{Y_t}\frac{Y_t}{Y_t^*}\frac{Y_t^*}{K_t} - \delta = \frac{I_t}{Y_t}\frac{u_t}{v} - \delta, \tag{3.3}$$

onde $u_t = \frac{Y_t}{Y_t^*}$, *é o grau de utilização da capacidade produtiva em um instante* t.

Da linearização do grau de utilização da capacidade produtiva, obtemos:

$$ln(u_t) = ln(Y_t) - ln(Y_t^*) \Longrightarrow \frac{ln(u_t)}{dt} = \frac{ln(Y_t)}{dt} - \frac{ln(Y_t^*)}{dt} = \frac{\frac{du_t)}{dt}}{u_t} = \frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t} - \frac{\frac{dY_t^*}{dt}}{Y_t^*},$$

logo:

[5]Se o capital for considerado fixo, como na maioria dos modelos que tratam das trajetórias de longo prazo, $v > 1$. No caso de capital circulante, como no modelo de Serrano(1995), $v < 1$.

[6]Se o capital é circulante $\delta = 1$.

$$\frac{du_t}{dt} = u_t(g_{y_t} - g_{k_t}), \tag{3.4}$$

onde g_{y_t} é a taxa de crescimento do produto.

Como o investimento, nesse modelo é totalmente induzido pela renda, ou seja, $I_t = h_t Y_t$, onde h_t é a propensão marginal a investir, variável em relação ao tempo e limitada, isto é $0 < h_t < 1$. A diferencial da linearização dessa identidade nos dá a equação:

$$g_{i_t} = \frac{\frac{dh}{dt}}{h_t} + g_{y_t}.$$

Agora, da relação de equilíbrio entre produto e demanda agregada, $Y_t = \dfrac{Z_t}{s - h_t}$, temos:

$$\frac{dY_t}{dt} = \frac{\frac{dZ_t}{dt}}{s - h_t} + \frac{\frac{dh_t}{dt}}{(s - h_t)} \frac{Z_t}{(s - h_t)}.$$

Dividindo a expressão acima por Y_t, obtemos:

$$\frac{\frac{dY_t}{dt}}{Y_t} = \frac{\frac{dZ_t}{dt}}{Z_t} \frac{Z_t}{(s - h_t)Y_t} + \frac{\frac{dh_t}{dt}}{(s - h_t)} \frac{Z_t}{(s - h_t)Y_t}.$$

Logo:

$$g_{y_t} = g_{z_t} + \frac{\frac{dh_t}{dt}}{s - h_t}, \tag{3.5}$$

onde g_{z_t}é a taxa de crescimento dos gastos autônomos. Substituindo $\dfrac{I_t}{Y_t}$ por h_t na equação (3.3), obtemos:

$$g_{k_t} = \frac{h_t}{v} u_t - \delta. \tag{3.6}$$

Assim, em um modelo onde existe o efeito multiplicador, o efeito acelerador e onde os gastos autônomos não geram capacidade produtiva, pode ser representado pelo seguinte conjunto de equações:

$$S = \begin{cases} g_{y_t} &= g_{z_t} + \dfrac{\frac{dh_t}{dt}}{s - h_t} \\ g_{k_t} &= \dfrac{h_t}{v} u_t - \delta \\ \\ g_{i_t} &= \dfrac{\frac{dh}{dt}}{h_t} + g_{y_t} \\ \\ \dfrac{du_t}{dt} &= u_t(g_{y_t} - g_{k_t}) \end{cases} \tag{3.7}$$

Substituindo as duas primeiras equações do sistema (3.7), na última equação que representa a dinâmica do grau de utilização da capacidade produtiva, obtemos:

$$S^* = \begin{cases} \dfrac{du_t}{dt} &= u_t\big(g_{z_t} + \dfrac{\frac{dh_t}{dt}}{s-h_t} - \dfrac{h_t}{v}u_t + \delta\big) \\ \\ \dfrac{dh}{dt} &= h_t(g_{i_t} - g_{y_t}). \end{cases} \tag{3.8}$$

Assim, S^*, fornece as equações que definem a dinâmica do processo de crescimento econômico liderado pela demanda, via gastos autônomos, descrito por um modelo geral, onde, como dito anteriormente, existe o efeito multiplicador do consumo e o efeito acelerador do investimento induzido. Como a distribuição de renda é considerada exógena, esse modelo geral foi denominado por Serrano(1995) de Sraffiano.

Naturalmente esse é um modelo geral onde não foi definida a forma como as decisões de investimento produtivo são tomadas. Diferentes formas da definição de h_t, levam a distintos modelos do supermultiplicador. Contudo qualquer modelo desse tipo deve satisfazer essas equações. Caso não satisfaça, certamente não será um modelo com supermultiplicador, ou não terá apenas investimento produtivo induzido ou qualquer outra das hipóteses listadas anteriormente.

Por outro lado, segundo os autores, é possível no lugar de h_t, definir a variação de h_t isto é $\frac{dh}{dt}$[7]. Logo, o sistema estaria completo dado tal variação.

Considerando, agora, g_z dada, vejamos as condições gerais para um equilíbrio local desse conjunto de equações diferenciais não lineares.

Definindo, então, não apenas a variação de h_t, mas uma taxa de crescimento dessa função - como é feito no modelo de Freitas e Serrano(2013)- dada por:

$$\frac{dh_t}{dt} = h_t f(t),$$

com $f(t) = (g_{i_t} - g_{y_t})$ integrável, temos que essa última equação diferencial apresenta as seguintes soluções:

$$h_t = h_o e^{\int_o^t f(s)ds},$$

onde em $t = o, h_t = h_o$, conforme demonstrado no apêndice desse trabalho[8].

[7]No trabalho dos autores Serrano e Freitas(2013) foi considerado as seguintes duas identidades para o investimento produtivo: $I_t = h_t Y_t$ e $\dfrac{dh_t}{dt} = h_t\gamma(u_t - \mu)$, onde $\mu = u_n$ é o grau normal de utilização da capacidade produtiva, nessa dissertação.

[8]Contudo é muito fácil chegar nessa solução, pois considerando $\dfrac{dh_t}{dt} = h_t f(t)$, temos: $\dfrac{1}{h_t}\dfrac{dh}{dt} = f(t) \Longrightarrow$

Como, por hipótese, $0 < h_t < 1$, *temos:*

$$0 < h_o e^{\int_o^t f(s)ds} < 1 \Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow \infty} f(t) = 0,$$

pois em caso contrário a integral que define a solução h_t *seria infinita, contrariando a limitação de* h_t[9]*. Logo, quando* $t \longrightarrow \infty$, $f(t) = 0$.

Logo é válido o seguinte resultado:

Proposição 3.1.2 *As soluções da equação diferencial* $\dfrac{dh_t}{dt} = h_t f(t)$, *são convergentes sob a hipótese de que* $0 < h_t < 1$, *isto é,* $\lim_{t \longrightarrow \infty} h_t = \lim_{t \longrightarrow \infty} h_o e^{\int_o^t f(s)ds} = h_o^*$.

Corolário 3.1.2 *As soluções da equação diferencial* $\dfrac{du_t}{dt} = u_t(g_{y_t} - g_{k_t})$, *são convergentes sob a hipótese de que* $0 < u_t < 1$, *ito é,* $\lim_{t \longrightarrow \infty} u_t = \lim_{t \longrightarrow \infty} u_o e^{\int_o^t (g_{y_s} - g_{k_s})ds} = u_o^*$.

Nota: *Observe que a convergência das soluções dessas duas últimas equações diferenciais seguem uma velocidade similar à função* $m(t) = a^{-t}$, *para* $a > 1$, *ou seja, têm uma convergência consideravelmente rápida.*

Vamos considerar, agora, que o sistema de equações diferenciais descrito por (3.8) exiba uma solução constante de equilíbrio (h^*, u^*). *Nessas condições, para* $h^* > 0, \Longrightarrow u^* = (g_z + \delta)\dfrac{v}{h^*}$.

Observe, porém, que se h^* *for uma solução constante para* $\dfrac{dh_t}{d_t}$ *então:*

$$\frac{du_t}{dt} = u_t\big(g_z - \frac{h^*}{v}u_t + \delta\big) = u_t\big(g_z + \delta - \frac{h^*}{v}u_t\big) = u_t\frac{h^*}{v}\big(\frac{v}{h^*}(g_z + \delta) - u_t\big),$$

cujas soluções, com condição inicial $(t_o = 0, u_o = u(o) > o)$ *são dadas por*[10]*:*

$$u_t = \begin{cases} \dfrac{m(g_z + \delta)\frac{v}{h^*}e^{t(g_z+\delta)}}{1 + me^{t(g_z+\delta)}} & se \quad 0 < u_o < (g_z + \delta)\frac{v}{h^*} \\[2ex] \dfrac{-m(g_z + \delta)\frac{v}{h^*}e^{t(g_z+\delta)}}{1 - me^{t(g_z+\delta)}} & se \quad u_o > (g_z + \delta)\frac{v}{h^*} \\[2ex] (g_z + \delta)\frac{v}{h^*} & se \quad u_o = (g_z + \delta)\frac{v}{h^*} \end{cases} \tag{3.9}$$

$\int_{h_o}^{h_t} \frac{dh_s}{h_s} = \int_o^t f(s)ds \Longrightarrow ln\frac{h_t}{h_o} = ln(h_t) - ln(h_o) = \int_o^t f(s)ds \Longrightarrow ln(h_t) = ln(h_o) + \int_o^t f(s)ds \Longrightarrow h_t = e^{ln(h_o) + \int_o^t f(s)} = h_o e^{\int_o^t f(s)ds}$

[9] Observe que se $f(t) \neq 0$ para $t \longrightarrow \infty$, a integral $\int_o^t f(s)ds$, seria divergente. Na verdade, para que essa integral seja convergente, é necessário que $|f(t)| \leq \frac{1}{a^t}$ para qualquer $a > 1$.

[10] Ver a dedução dessa solução em (4.4), no apêndice.

onde

$$m = \frac{|u_o|}{|(g_z+\delta)\frac{v}{h^*} - u_o|}.$$

Pela regra de L'Hospital, se $u_o \neq (g_z+\delta)\frac{v}{h^*}$ *temos:*

$$\lim_{t\to\infty} u_t = \lim_{t\to\infty} \frac{(g_z+\delta)\frac{v}{h^*}(g_z+\delta)me^{t(g_z+\delta)}}{(g_z+\delta)me^{t(g_z+\delta)}} = (g_z+\delta)\frac{v}{h^*},$$

Logo, as soluções não constantes convergem para a solução constante $(g_z+\delta)\frac{v}{h^*}$*, que se configura em um equilíbrio atrator assintótico, desde que* $u_o > 0$*, para essa equação diferencial, mas não necessariamente para o sistema dinâmico que descreve o modelo.*

Dessa forma, como o que se busca são soluções constantes que se configurem em pontos de equilíbrio locais - podendo ou não ser assintóticos-, é necessário que se descreva a dinâmica do sistema em torno dessas soluções e o processo de ajustamento para condições iniciais suficientemente próximas [11].

Assim, segue na próxima seção a análise de alguns modelos que satisfazem as condições gerais do modelo do supermultiplicador Sraffiano, assim denominado por Serrano(1995) e já bastante detalhado nas linhas anteriores. Contudo, vale ressaltar que tais descrições serão feitas fundamentadas nas justificativas dos autores quando da elaboração dos respectivos trabalhos já publicados e ou endossados pela comunidade econômica.

3.2 Alguns modelos com supermultiplicador

Nota: *Nesta seção, primeiramente será descrito o modelo do Supermultiplicador de Serrano (1995), seguido das contribuições de Cesaratto, Stirati e Serrano(2003) e da formulação de Serrano e Freitas (2010)(2013). Nessa direção é interessante notar a evolução do modelo do supermultiplicador Sraffiano de Serrano que na versão mais recente ganhou uma roupagem formal via teoria dos sistemas dinâmicos. Os modelos de Bortis, White e DeJuan, finalizam a seção.*

[11] Observe que de posse de equações diferenciais explícitas - por exemplo, equações dadas a partir da função h_t-, pode se definir as soluções não constantes e, então, mapear o comportamento do sistema quaisquer que sejam as condições iniciais. Contudo, muitas vezes a resolução das equações diferenciais que compõem o sistema, em separado, apresenta um grau muito grande de dificuldade. Assim uma forma de estudar a dinâmica é não apresentar as soluções, mas especificar suas características. Nessa direção a utilização da teoria dos sistemas dinâmicos é um instrumento importante na medida em que possibilita obter informações sobre a estabilidade local de soluções constantes, bem como a partir da construção de um retrato de fase, decidir acerca do comportamento das soluções não constantes. Esse é o método usado, por exemplo, por Serrano e Freitas(2013) para o modelo do Supermultiplicador Sraffiano, com a ressalva de que o diagrama de fase é feito apenas em nível local, ou seja, em torno do equilíbrio. Também usando o estudo da estabilidade no sentido de Liapunov, pode-se definir os parâmetros onde as condições iniciais que garantam a convergência, assintótica ou não, podem se situar.

3.2.1 O modelo do Supermultiplicador Sraffiano de Serrano(1995)

Originalmente o modelo do supermultiplicador de Serrano apresenta as seguintes características:

- *Toda a dinâmica- considerada em tempo discreto - é descrita envolvendo as variáveis em nível.*
- *O capital é considerado circulante, logo v, a relação capital produto potencial é menor que a unidade.*
- *O investimento depende de dois elementos: o nível esperado da demanda efetiva D_{+1}, que representa o quantum de capacidade produtiva necessário e as condições técnicas de produção, -representadas pela relação capital produto potencial normal-, nessa dissertação denotada por v_n. Dessa forma:*

$$I = v_n D_{+1},$$

e, então, em havendo crescimento da demanda, a expectativa para a demanda futura aumenta, aumentando o nível de investimento e, consequentemente, o nível da capacidade produtiva no próximo período.

Por outro lado, observe que existe uma relação positiva entre a taxa de crescimento da capacidade produtiva g_k e a razão $\frac{I}{Y_n}$, uma vez que dado v_n temos:

$$\frac{I}{Y_n} = \frac{I}{K}\frac{K}{Y_n} = g_k v_n,$$

logo uma maior taxa de crescimento da capacidade produtiva requer, necessariamente, um valor maior para essa razão. Assim, se certo nível de investimento bruto cria um particular nível de capacidade produtiva no período posterior, então é certo que determinado nível de investimento, relativo ao corrente nível de capacidade produtiva deve criar um específico nível de capacidade produtiva, relativo à capacidade produtiva corrente. Esse fato pode ser formalmente descrito pela razão: $\frac{Y_{+1}}{Y}$. Porém,

$$\frac{Y_{+1}}{Y} = \frac{Y_{+1} - Y + Y}{Y} = \frac{Y_{+1} - Y}{Y} + \frac{Y}{Y} = \frac{Y_{+1} - Y}{Y} + 1 = g_{k+1} + 1$$

Nessas condições a taxa desejada de crescimento da capacidade produtiva é dado por $h = \frac{I}{Y_n} = v_n(1 + g_{+1})$, onde g_{+1} é a taxa esperada de crescimento da demanda efetiva entre dois períodos, em longo prazo, onde no primeiro o grau de utilização da capacidade é normal ou planejado.

Considerações:

A convergência de h_t e a estabilidade das trajetórias

Observe que para o autor, em equilíbrio, quando $Y_t = Y_n$, a propensão marginal a investir é constante e igual a $h^* = v_n(1+g_{+1})$. Dessa forma:

$$Y_n = \frac{Z}{s-h^*}.$$

Como temos a constância de h_t, calculando o logaritmo natural da expressão acima e derivando em relação ao tempo, segue que:

$$ln(Y_n) = ln(Z) - ln(s-h^*) \Longrightarrow \frac{d(ln(Y_n))}{dt} = \frac{d(ln(Z))}{dt} \Longrightarrow g_y = g_k = g_z.$$

Nessas condições, como em tempo contínuo, $g_y = g_{+1}$, segue que $h^* = v_n(1+g_z)$. Nas palavras do autor:

> *In order to obtain a demand-led regime we must, ..., assume that z[12] is lower than the maximum rate of growth (i.e., $z < s/a-1$)[13]. Assuming also that firms as a whole correctly foresee the evolution of effective demand, we get a situation in which the supermultiplier will be constant through time, and aggregate demand will grow at the same rate z as the autonomous consumption expenditures expand (i.e., $g_{+1} = z$). The Sraffian supermultiplier equation for this steadily growing economy is:*
>
> $$[9] \quad X^* = Z/(s-a.(1+z))$$
>
> *which shows that capacity is driven by aggregate demand , which will grow at the exogenously determined rate z . (Serrano; 1996: p.78)*

Nota:*Observe que na citação acima, além de considerar que as expectativas, em trajetórias equilibradas, são tomadas de forma correta em relação ao comportamento da demanda, o autor define também um limite para a taxa de crescimento dos gastos autônomos, para que o sistema mantenha uma trajetória de equilíbrio estável. Para taxas de crescimento dos gastos autônomos maiores que $s/v_n - 1$, tal estabilidade não é garantida. Em trabalhos posteriores - como será visto abaixo -, esse limite é revisto.*

Assim, Serrano considera que o modelo do supermultiplicador explica adequadamente o desenvolvimento capitalista na medida em que não gera a instabilidade fundamental definida por Harrod. Esse último considerava um modelo onde todos os gastos eram induzidos, ou antes, não previa a existência de gastos autônomos não criadores de capacidade produtiva.

---

[12] Aqui z refere-se a g_z.

[13] Aqui $a = v_n$.

Em presença desse tipo de gasto, as decisões de investir representada pela função h_t, variam na direção de ajustar a capacidade à demanda. Segundo o autor, diferentemente do modelo de Harrod, em trajetória equilibrada, no modelo do supermultiplicador, se a taxa de investimento cresce mais rapidamente que a taxa de equilíbrio g_z, gera-se uma situação de subutilização da capacidade produtiva, uma vez que a capacidade irá crescer mais que a demanda. Reciprocamente, se por acaso o a taxa de crescimento real da economia é maior que g_z, obtém-se uma situação de sobre utilização da capacidade produtiva, uma vez que a capacidade cresce menos rápido que a demanda agregada. Logo, se o investimento ou as decisões de investir respondem diretamente ao grau real de utilização da capacidade produtiva - hipótese do modelo Harrodiano-, não existe, então, a situação da instabilidade fundamental, uma vez que a resposta às decisões de investir atua na direção correta.

Por outro lado, uma justificativa teórica para a situação descrita acima, segundo o autor é que:

> *...the presence of autonomous expenditures makes the average propensity to save flexible downwards which allows it to adapt endogenously to the ratio of investment to capacity required by rate of growth of demand (itself equal to and determined by the rate of growth of autonomous consumption z). (Serrano; 1996: p. 78)*

Dessa forma, a presença dos gastos autônomos dota o sistema de um mecanismo flexível que leva a função h_t, em equilíbrio, a exibir o valor que leva a economia a descrever uma trajetória com o grau real de utilização tendendo ao grau normal. Naturalmente, essa constância do supermultiplicador está condicionada a que os parâmetros estruturais da economia se mantenham constantes. Nas palavras do autor:

> *The crucial point is that in the general case, g_{+1}, the expected rate of growth of aggregate demand, will naturally be different from the current rate of growth of autonomous expenditures whenever the latter or the other parameters of the model, such as the capital-output ratio and marginal propensity to save, are expected to undergo changes over time (in other words, whenever the supermultiplier itself is expected not to remain constant overtime). (Serrano;1995:p.88)*

Em havendo mudanças nesses parâmetros, em particular na taxa de crescimento dos gastos autônomos, o supermultiplicador deve sofrer alterações para levar o sistema a seguir a tendência do grau normal de utilização da capacidade. Essas alterações ou ajustes dependem naturalmente do acelerador, uma vez que a propensão marginal a poupar é constante.

Nesse sentido, a definição da função da propensão marginal a investir, nesse modelo original, foi alvo de críticas. A principal foi de que o modelo era dotado de um acelerador rígido, *como o presente no modelo de Hicks. Em vista disso a geração de capacidade produtiva poderia não acompanhar o crescimento da demanda, levando o sistema a uma possível instabilidade. Dessa forma, tal função, em um trabalho posterior, elaborado em conjunto com Cesar Cesaratto e Antonella Stirati, em 2003, foi revisada, com a função que define as decisões de investimento* h_t *apresentando um parâmetro que torna gradual a geração de capacidade produtiva, e principalmente impede o aumento explosivo da demanda.*

Assim, nas linhas abaixo, segue a descrição dessa função e a dinâmica por ela descrita no modelo posterior do supermultiplicador.

3.2.2 O Supermultiplicador de Serrano com as contribuições de Cesaratto e Stirati (2003)

As diferenças desse modelo para o modelo original de Serrano(1995) são basicamente duas:

- *É considerado capital fixo, no lugar de capital circulante. Nessas condições a relação capital produto potencial* v *é maior que* 1 *e existe uma taxa de depreciação* δ.
- *A função que determina as decisões de investir* h_t, *é definida, além da relação capital produto potencial, pela demanda esperada fundamentada em expectativas adaptativas. De uma maneira formal,*

$$I_t = h_t Y_t, \text{ com } h_t = \frac{K_t}{Y_t^n}(\delta + g_t^e) = v_n(\delta + g_t^e) = \frac{v}{u_n}(\delta + g_t^e) \tag{3.10}$$

onde a demanda esperada em um certo tempo t é dado por $g_t^e = g_{t-1}^e + b(g_{y_{t-1}} - g_{t-1}^e) = bg_{t-1} + (1-b)g_{t-1}^e$, *com* $b < 1$ *representando o grau de ajuste parcial,* g_{y_t}, *a taxa de crescimento da economia e* Y_t^n *o produto que representa o grau de utilização normal da capacidade produtiva, aqui representado por* u_n *e* $v_n = \frac{K_t}{Y_t^n}$.

Observe que nessa definição de h_t, *as expectativas são baseadas em um processo de observação e adaptação ao passado, corrigidas em acordo com os erros. Isto significa dizer que a expectativa de demanda é construída a partir da diferença entre a taxa de crescimento observada no período anterior e a taxa de crescimento esperada, graduada pelo parâmetro* b, *um coeficiente que representa a reação às mudanças no sistema. Em vista disso, para uma situação de pleno ajustamento, um choque de demanda leva a uma diferença entre os valores* $g_{y_{t-1}}$ *e* g_{t-1}^e. *Caso o choque seja passageiro, para um valor pequeno de b, a diferença* $(g_{y_{t-1}} - g_{t-1}^e)$ *e seu repasse para a futura formação de expectativas, será gradualmente menor até desaparecer. Caso as modificações sejam persis-*

tentes haverá um efeito sobre o estoque de capital que sofrerá alterações para atender a uma capacidade produtiva condizente com a demanda. Essas mudanças persistentes na demanda representam a componente tendencial do crescimento. Flutuações temporárias dizem respeito a componentes cíclicas.

Considerações:

A convergência de h_t

Primeiramente, observe que em tempo contínuo a demanda esperada g_t^e pode ser dada como solução da equação diferencial:

$$\frac{dg_t^e}{dt} = b(g_{y_t} - g_t^e).$$

Como h_t é limitada segue que g_t^e necessariamente também é limitada e, então, as soluções são dadas por:

$$g_t^e = g_o^e + e^{b\int_o^\infty (g_{y_s} - g_s^e)ds}.$$

Dessa forma, a limitação dessas soluções garante que $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} g_t^e = g_{y_t}$.

Contudo, h_t só convergirá localmente para o equilíbrio que resulta em um grau de utilização da capacidade produtiva normal, $h^* = \dfrac{v(g_z + \delta)}{u_n}$, se g_t^e e também g_{y_t} convergirem para g_z. Segundo o autor, a taxa de crescimento da demanda esperada, por ser condicionada à expectativas adaptativas, certamente definirá uma equação de diferenças convergente para g_z. Logo, h_t convergirá para $(g_z + \delta)\frac{v}{u_n}$. Essa convergência de h_t, é justificada pelo autor, por exemplo, nas citações abaixo:

> *We are assuming that the current value of g_e is revised over time according to an equation such as $g_e^t = g_e^{t-1} + x(g_e^{t-j} - g^{t-j})$ where t is the period in which those expectations are formed, x is the reaction coefficient and jis the time lag. If we set x and jequal to 1 we have the rigid accelerator used by Hicks (1950) which for most parameter values leads to empirically implausible instability (and the need for nonlinearities to produce plausible results). We are thus assuming a flexible Chenery accelerator with low values of x and/or longer lags to ensure the dynamic stability of the multiplieraccelerator process. (Cesaratto e outros; 2003:p. 21)*

e então,

> *It is easy to see that in this process productive capacity will tend to grow at the rate at which autonomous expenditures are growing, since (given the parameters s, v and d* [14]*, and assuming that investment is induced) it will not*

[14]Aqui o parâmetro *d* se refere à taxa de depreciação, uma vez que esses autores, como dito anteriormente consideram capital fixo.

> *be possible to sustain growth without the expansion of autonomous expenditures. If we assume that g_e is made endogenous in the process of accumulation and is gradually revised by means of a flexible accelerator process (Chenery, 1950), both the expected and actual rates of growth of the economy will tend to converge to the rate of growth of autonomous expenditures, as long as the response of g_e to the actually observed growth rate g is slow. (Cesaratto e outros; 2003:p. 21)*

ou seja, se os parâmetros do modelo se mantiverem constantes, existirá essa convergência da propensão marginal a investir para o valor necessário.

A estabilidade e o completo ajustamento da capacidade à demanda

Para os autores, e em acordo com o trabalho de Garrido(2007), a inclusão da componente autônoma da demanda que cresce a uma taxa exógena, define um processo estável. Além disso, a flexibilidade do acelerador garante um completo ajuste da capacidade à demanda, em caso de mudança nos parâmetros do modelo, em particular, em mudanças persistentes da taxa de crescimento g_z.

Esse fenômeno se processa uma vez que a presença dessa componente implica em que a propensão média a poupar, $\frac{S}{Y}$, não seja determinada pela propensão marginal a poupar e sim por h_t, a propensão marginal a investir. Dessa forma, um estímulo gerado de forma exógena pela taxa de crescimento dos gastos autônomos, ao impor um correspondente estímulo em h_t faz com que haja a mesma resposta na propensão média a poupar. Em vista disso, embora o aumento endógeno do consumo atue na direção de diminuir a propensão média a poupar, h_t mais do que compensar essa perda, faz com que haja aumento nessa média. Assim, na medida em que a renda aumenta, a parcela de poupança também aumenta, possibilitando o ajuste necessário da capacidade em relação a essa nova posição de crescimento de longo prazo, estabilizando a trajetória.

Nessas condições, embora a demanda autônoma atue no sentido de estimular os gastos induzidos, essa ação é estabilizada endogenamente pelo aumento da velocidade do crescimento da parcela da poupança na renda. Por sua vez, a capacidade produtiva sofrerá variação até que o ajustamento se complete. Tal ajustamento terá como medida o grau de utilização da capacidade produtiva da seguinte forma: partindo de um grau de utilização normal, um aumento na taxa de crescimento dos gastos autônomos leva a uma sobre utilização inicial da capacidade produtiva, o que leva a aumentos sucessivos na propensão marginal a investir - que inicialmente aumentará mais ainda grau de utilização da capacidade produtiva -, que por sua vez fará aumentar a capacidade produtiva até que essa ultrapasse a taxa de crescimento da demanda, fazendo diminuir o grau de utilização da capacidade e, então, a sobre utilização, até que o grau normal seja novamente alcançado. Por outro lado, em havendo uma queda na *taxa de crescimento dos gastos autônomos, um processo inverso se instaura. Tal mecanismo garante que o grau de utilização da capacidade produtiva descreva uma tendência em torno de um grau normal ou planejado.*

Contudo, para que a dinâmica de ajustamento da capacidade a uma nova taxa de crescimento da demanda autônoma se processe na medida correta, é imperativo que os investimentos induzidos prescindam de algum mecanismo que os mantenha graduais para que os investimentos não sejam excessivos e tornem o processo explosivo.

Assim, quando se supõem uma elevação na taxa de crescimento dos gastos autônomos - e, portanto, da demanda-, h_t *deve aumentar de forma branda, em pequena magnitude a cada período, para que a taxa de crescimento da capacidade produtiva possa alcançar, e após algum tempo, ultrapassar a taxa de crescimento da economia, para que o grau de utilização da capacidade exiba uma tendência ao grau normal. Essa hipótese é então essencial para que os possíveis ciclos, próprios ao sistema, sejam amortecidos em longo prazo. Considerando essa hipótese sob uma perspectiva empírica, ela é justificável na medida em que é natural que os empreendedores percebam a volatilidade da demanda no curto prazo e, então, não considerem toda e qualquer flutuação como permanente.*

Dessa forma, alterações meramente pontuais, que indicam apenas desníveis no grau de utilização no período exato da ocorrência, não geram qualquer endogeneidade própria para os investimentos induzidos que levem à uma mudança substancial na trajetória de longo prazo.

Em resumo, esse mecanismo de ajuste - a flexibilidade nas decisões de investir -, se por um lado induz a que as oscilações passageiras na demanda não se propaguem para o longo prazo, por outro leva a que mudanças persistentes na taxa de crescimento dos gastos autônomos, e, portanto, na taxa de crescimento da economia não leve o sistema a desvios permanentes da trajetória em direção ao grau normal da capacidade produtiva.

Também, Cesaratto, Stirati e Serrano(2003), chamam a atenção para o processo de ajuste inerente ao modelo uma vez que consideram que o nível do produto não necessariamente é exatamente igual ao nível que determina o grau de utilização normal. Contudo, isso não significa que não exista tendência do grau de utilização em direção ao normal, uma vez que

> *An adjustment of this kind will be occurring over time as the capacity effects of the propensity to invest at a given* g^e *materialise and as the expected rate of growth* g^e *itself is gradually revised in the light of actually realised growth performance. Indeed, in the process of accumulation, the actual degree of capacity utilisation tends to move towards its normal or planned level, as the distance between actual and expected growth rates of effective demand narrows and the size and growth rate of capacity output adjust to the trend of effective demand.(Cesaratto e outros; 2003:p.20)*

Como resultado a capacidade produtiva da economia compassadamente gravita em direção a uma trajetória de completo ajustamento no qual a capacidade segue a tendência da demanda efetiva e o grau real de utilização é igual ao grau normal ou planejado. Logo,

> *This secular capacity supermultiplier or "fully adjusted"supermultiplier can be written:*
>
> $$Y^* = \frac{Z}{s - v(d + g_z)}.$$ *(Cesaratto e outros; 2003:p.21)*

Por fim, vale ressaltar que a função h_t definida nesse modelo, com variação em tempo contínuo dada por $\frac{dh_t}{dt} = v_n(\delta + \frac{g_t^e}{dt})$, apresenta soluções não constantes convergentes assintoticamente para $h^* = (\delta + g_z)v_n$ desde que $g_z < \frac{s}{v_n} - b - \delta$.[15] *Assim, partindo das condições de equilíbrio, mudanças na taxa de crescimento dos gastos autônomos dentro do limite estabelecido, leva a condições iniciais que garantem a convergência assintótica de h_t. Por outro lado, mediante a convergência de h_t, a tendência em torno do grau normal, em longo prazo, é estabelecida*[16].

3.2.3 O modelo de Serrano e Freitas (2010, 2013)

Nessa nova formulação do modelo do supermultiplicador, a principal diferença foi a definição para a variação da propensão marginal a investir h_t. De fato nos trabalhos de Serrano e Freitas(2010)(2013), a função que define a propensão marginal a investir no modelo do supermultiplicador h_t, não é dada diretamente e sim mediante uma equação diferencial que define sua variação em tempo contínuo. Mais especificamente é inserida na dinâmica do modelo a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dh_t}{dt} = \gamma h_t(u_t - u_n),$$

onde u_n é o grau de utilização da capacidade produtiva normal ou planejado e γ é uma constante menor que a unidade.

Assim, o sistema definido em (3.8) se torna:

$$S^{***} = \begin{cases} \dfrac{du_t}{dt} &= u_t\big(g_{z_t} + \dfrac{\frac{dh_t}{dt}}{s - h_t} - \dfrac{h_t}{v}u_t + \delta\big) \\ \\ \dfrac{dh_t}{dt} &= \gamma h_t(u_t - u_n) \end{cases} \tag{3.11}$$

[15] Os cálculos são relativamente fáceis. Olhar as simulações no final desse capítulo para fins de ilustração.

[16] As simulações representadas graficamente no final desse capítulo indicam tanto a convergência como a tendência.

Os argumentos que justificam a definição da equação diferencial relativa à variação da propensão marginal a investir, dada por Serrano e Freitas (2013), são as seguintes:

- *A primeira função do processo de investimento produtivo em capital fixo agregado é a construção da capacidade produtiva requerida para satisfazer a demanda de mercado que ao mesmo tempo permita cobrir os custos e obter um mínimo de rentabilidade.*

- *A capacidade produtiva, consequência do processo de investimento produtivo, não pode ser imediatamente ajustada aos requerimentos da demanda. Isso se dá porque sempre existe a possibilidade de que um aumento, ou uma queda da demanda, seja apenas um choque passageiro.*

- *Na medida em que os investidores lutam para não perder sua fatia de mercado ou até mesmo para aumentarem as que já possuem, eles, usualmente operam dentro de uma margem planejada de capacidade ociosa que no agregado determina um grau de utilização da capacidade produtiva considerada como normal. Se o grau de utilização aumenta para além desse normal, por um período considerado suficiente, os capitalistas tendem a aumentar o nível do investimento produtivo. Inversamente se o grau se situa por tempo suficiente abaixo do normal, existe uma tendência à diminuição do nível de investimento produtivo.*

- *O comportamento do investimento agregado leva a mudanças na propensão marginal a investir na direção de ajustar a capacidade produtiva à demanda e então o grau de utilização da capacidade produtiva ao grau de utilização normal.*

- *Como o ajustamento da capacidade à demanda, não responde automaticamente às mudanças na demanda agregada, o acelerador que define o processo de investimento induzido necessita ser flexível.*

Considerações:

Observe que a função investimento é definida a partir da propensão marginal a investir como variável em relação ao tempo, da seguinte forma:

$$I_t = h_t Y_t \quad onde \quad \frac{dh_t}{dt} = h_t \gamma (u_t - u_n), \tag{3.12}$$

com u_n definido como o grau de utilização normal da capacidade produtiva e γ constante. Segundo os autores:

> *Our investiment function is specified as follows*
>
> $$I_t = h_t Y_t \qquad (9)$$

and

$$\dot{h} = h_t \gamma(u_t - \mu) \quad (10)$$

where $h_t \geq 0$ is the marginal propensity to invest of capital firms, $\mu > 0$ is the normal rate of capacity utilization discussed above, and γ is a parameter that measures the reaction of the marginal propensity to investiment growth to the deviation of u_t from μ.
From equations (9) and (10) we can see that investiment growth is given by the following expression:

$$g_{It} = g_t + \gamma(u_t - \mu) \quad (11)$$

where g_{It} is the rate of growth of aggregate gross investiment. (Serrano e Freitas, 2013: p. 4-5)

A última igualdade da citação acima, resulta[17]*em algumas hipóteses que interligam a variação entre as taxas de crescimento do investimento produtivo e da economia e o hiato entre os graus de utilização real e normal.*[18]

Convergência de h_t e estabilidade local em torno das condições de equilíbrio

No trabalho de 2013, Serrano e Freitas utilizaram uma metodologia mais formal: a Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Nessa direção, mostraram que o sistema definido por (4.14), apresenta uma solução constante $(h^* = (g_z + \delta)\frac{v}{u_n}, u_n)$ que se configura em um equilíbrio assintoticamente estável sob a seguinte condição[19]*:*

$$h^* + c + \gamma v < 1.$$

Como nesse modelo é considerado apenas capital fixo - logo $v > 1-$, para que a expressão acima seja verdadeira, é necessário que $\gamma < \dfrac{1 - h^* - c}{v} < 1$[20]*.*

Assim, com a presença desse parâmetro γ, os autores mostram a estabilidade assintótica local, através de um teorema específico para sistemas dinâmicos com duas variáveis. Depois, a partir de um estudo analítico envolvendo as curvas de nível das derivadas parciais das funções autônomas que definem o sistema, é construído um retrato de fase que mostra o comportamento local das soluções em torno do equilíbrio.

Dessa forma, existe uma convergência local da função h_t, o que significa dizer que para

[17]Na verdade nessa última relação os autores consideraram que $\frac{dh_t}{dt} = h_t(g_{i_t} - g_{y_t}) = h_t\gamma(u_t - u_n)$.

[18]Mais especificamente, temos a seguintes hipóteses, a partir da igualdade:

- Para todo $t \in R$, $\dfrac{|g_{It} - g_t|}{|u_t - u_n|} = \gamma$, constante e menor que 1.
- Para todo $t \in R$, $\quad |u_t - u_n| > |g_{It} - g_t|$.

[19]A prova dessa afirmação é feita no apêndice.

[20]Na verdade os autores consideram tal parâmetro $\gamma < 1$ para justificar a flexibilidade do acelerador do investimento produtivo.

condições iniciais suficientemente próximas do ponto de equilíbrio, existe a convergência. Além disso, o teorema utilizado também garante uma estabilidade estrutural ao modelo. Isso significa dizer que, em mudando localmente os parâmetros, ainda assim persiste a estabilidade local. Naturalmente, nessas condições, com novos pontos de equilíbrio. Logo, para cada taxa g_z*, a solução constante* $(h^* = (g_z+\delta)\frac{v}{u_n}, u_n)$*, considerando as restrições sobre a taxa* g_z*, configura-se em um equilíbrio atrator assintótico local para o sistema.*

Ajustamento frente a mudanças na taxa dos gastos autônomos

Partindo de uma situação com grau de utilização normal, uma mudança na taxa dos gastos autônomos leva à novas condições iniciais, com mudanças no grau de utilização. A partir de então deve iniciar um processo de ajustamento, para levar o sistema a tender para uma nova situação de equilíbrio, onde persiste o grau normal.

Esse ajustamento é descrito da seguinte forma: estando o sistema em equilíbrio, temos que $g_y = g_k = g_z$*, e* $u_t = u_n$*. Logo uma nova taxa* $g_{z1} > g_z$*, leva a uma maior taxa de crescimento da economia* $g_y = g_{z1}$ *que consequentemente resulta em uma variação positiva do grau de utilização da capacidade na medida em que* $\frac{du_t}{dt} = u_t(g_y - g_k)$ *e, portanto, o grau de utilização aumenta, ficando maior que o normal. Essa nova situação, em decorrência da dinâmica descrita pela equação* $\frac{dh_t}{dt} = h_t\gamma(u_t - u_n)$*, leva a uma variação positiva em* h_t*. Logo existe um aumento no nível de investimento, e, então, no período posterior tem-se o aumento da capacidade produtiva. Esse processo continua até que a taxa de crescimento da capacidade produtiva ultrapasse a taxa de crescimento da economia e, dessa forma, frente à variação negativa de* u_t*, o grau de utilização real diminua até que se estabeleça novamente uma oscilação em torno do grau normal de utilização. Um processo inverso se manifesta frente a uma queda na taxa de crescimento dos gastos autônomos, a partir da situação de equilíbrio.*

Observe que na descrição acima- quando do aumento na taxa de crescimento dos gastos autônomos-, em determinado momento a taxa de utilização da capacidade ultrapassa a taxa de crescimento da economia, diminuindo o grau de utilização da capacidade produtiva. Esse fenômeno, segundo os autores, é possível devido ao fato de o parâmetro γ *atuar no sentido de que aumentos em* g_z*, levam a aumentos posteriores na demanda, menores que os aumentos da capacidade produtiva. Isso possibilita que o grau de utilização da capacidade diminua até atingir a posição suficientemente próxima da normal. Dessa forma, é necessário o fator* $\gamma < 1$*, ou seja, a flexibilidade do acelerador, para o ajuste da capacidade à demanda.*

Naturalmente os outros parâmetros do modelo podem sofrer mudanças em longo prazo, levando à condições iniciais distintas do equilíbrio. Nessa direção, processos similares de ajustamento da capacidade à demanda com novas soluções de equilíbrio, mas com uma tendência *à um grau de utilização normal, devem ocorrer.*

Por fim cabe notar que simulações com esse modelo descrevem um processo no qual, partindo-se do equilíbrio, mudanças nas condições iniciais h_o com $0 < h_o < s$ com a taxa de gastos autônomos $g_z < \frac{s}{v}u_n - u_n\gamma$, então a tendência para o grau normal de utilização com igualdade entre as taxas de crescimento da economia é verificada[21]

3.2.4 O modelo do supermultiplicador de Bortis (1984).

Bortis em seu trabalho de 1984 considera um modelo de crescimento com as seguintes hipóteses:

- *Economia com setor externo e governo.*
- *A análise é realizada interligando o curto, médio e longo prazo. O autor trabalha, todavia, com duas curvas de demanda e oferta: uma de curto e outra de longo prazo.*
- *As propensões a consumir tanto dos capitalistas como dos trabalhadores são consideradas constantes.*
- *No longo prazo a taxa de lucro é determinada exogenamente, com o salário real determinado residualmente.*
- *Existe uma taxa de lucro normal ou desejado, denotado por r^*.*
- *Normalmente $r^* > i$, onde i é a taxa de juros definida por fatores monetários e critérios de liquidez como em Keynes.*
- *A renda total é segmentada em três parcelas: lucros e renda dos capitalistas e renda dos trabalhadores.*
- *Os gastos do governo G são determinados por decisões de política econômica, as exportações, X, são exógenas ao sistema e as importações M, dependem da renda real, da seguinte forma:*
  $$M = \pi bY, \text{ onde } \pi = \frac{ep_m}{p},$$
  com b o coeficiente de importação, p_m o nível de preços externos, e a taxa de cambio, e p o nível de preços domésticos.

[21] Ver simulações no final desse capítulo. Observe ainda que nas simulações a taxa de depreciação é considerada nula.

- *Existe uma taxa natural g_n que relaciona taxas de crescimento da população e produtividade do trabalho e depende do investimento bruto realizado no passado, através do qual o progresso técnico é difundido na economia. Essa taxa é obtida através de uma média da taxa de crescimento da economia no longo prazo, caso os ciclos reais de negócios sejam perfeitamente regulares.*

- *Segundo Serrano e Freitas(2014), os trabalhos de Bortis (1979 e 1997), mostram que de alguma forma a firmas têm o conhecimento de que a tendência de crescimento da economia, segue a taxa de crescimento dos gastos autônomos.*

- *Se a capacidade produtiva é normalmente utilizada, o produto dessa utilização é obtido da seguinte forma: $Y^n = A_n N_n$, onde A_n é definido como sendo a produtividade do trabalho, e N_n, o nível de emprego. O subscrito n significa que as variáveis são obtidas através da utilização normal da capacidade produtiva.*

- *No curto prazo o investimento é autônomo.*

- *No médio prazo os capitalistas revisam suas decisões de investir com base em eventos passados e inferências sobre o futuro da atividade econômica. Dessa forma o investimento segue a seguinte tendência: $I_{\tau+1} - I_\tau = q(r_{\tau-t} - r^*) + g_n I_\tau$, onde $r_{\tau-t}$ é a média realizada da taxa de lucro em anos passados e q é um parâmetro positivo determinado principalmente por inferências sobre a taxa de juros futura ou estimativas sobre preços, salários, crédito disponível e possível experiência técnica. Observe que a taxa de lucro efetiva depende do grau de utilização de capacidade, uma vez que $(r = (1-w)u/v_n)$. Assim existe variação no investimento sempre que o grau de utilização for diferente do normal pois $(r* = (1-w)u_n/v_n)$. Em vista disso existe uma similaridade dessa função investimento - por depender da variação do grau de utilização da capacidade produtiva -, com a função definida pelo modelo de Serrano(1995) e (2010).*

- *No longo prazo certa tendência do nível de investimento, mantido ao longo do tempo, resulta em um estoque de capital que implica em um nível de emprego com utilização normal da capacidade produtiva, N_n. Essa tendência do investimento, resulta em um nível definido da seguinte forma:*

  $$I_\tau = (g_n + \delta) x_n N_n,$$

  onde x_n é a razão entre capital e trabalho e δ diz respeito à depreciação.

- *A dinâmica do processo descrito, em longo prazo, envolve as curvas de demanda e oferta relativas ao curto e longo prazo: se o nível de investimento em um tempo inicial coincide* *com a tendência do investimento, definida acima, então as curvas de curto e longo prazo ocupam as mesmas posições e a taxa de crescimento da economia é igual à natural. Caso o estoque de capital não seja suficiente para atender um nível de emprego normal N_n, a taxa de lucro excederá r^*, a taxa desejada, e os capitalistas tenderão a investir mais ao longo do tempo, elevando a taxa de crescimento acima da natural. Se o acelerador do investimento for flexível, ou seja, as decisões de investir forem graduais, o processo econômico será restabelecido, e as curvas de curto e longo prazo que sofreram desvios relativos, através da dinâmica do processo de ajuste via investimento, voltarão a coincidir. Caso contrário - com acelerador rígido -, a curva de demanda de curto prazo se desviará da de longo prazo que tenderá a se inclinar até alcançar uma posição extrema, ativando um processo inflacionário. Porém, se o parâmetro q, definido na função investimento de médio prazo, for suficientemente pequeno, existirá uma tendência em direção ao equilíbrio de longo prazo.*

Considerações

A convergência de $\mathbf{h_t}$

Observe que

$$I_\tau = (g_n + \delta)\frac{K_t}{N_n}N_n = (g_n + \delta)K_t = v_n Y_n = (g_n + \delta)\frac{v}{u_n}Y_n,$$

e então a função h_t de Bortis converge para $(g_n + \delta)\frac{v}{u_n}$, onde g_n é a taxa natural - uma média da taxa de crescimento da economia. Nessas condições, embora não seja diretamente definida, a função da propensão marginal a investir seria dada por:

$$(g_t + \delta)\frac{v}{u_n}, \text{ com } \lim_{t \longrightarrow \infty} g_t = g_n.$$

Porém, como em equilíbrio, todas as taxas de crescimento das componentes da demanda, bem como a do produto, se igualam,

> *The long-run demand prices equals the normal price, and realized profits coincide with normal ones. By assumption, I, K, G, and X all grow at the natural n-rate. (Bortis; 1983:p. 598)*

temos que $\lim_{t \longrightarrow \infty} g_t = g_n = g_z$. com g_z a taxa de crescimento dos gastos autônomos. Logo, segundo o autor, a convergência da função é verificada.

Nota:*Note que se considerarmos a economia fechada e $G = Z$, temos que o produto de equilíbrio de Bortis é igual ao de Serrano, uma vez que em equilíbrio $g_n = g_z$.*

Estabilidade em torno das condições de equilíbrio

Segundo Bortis, caso o sistema esteja inicialmente em equilíbrio, a taxa de crescimento da economia será uma média do crescimento econômico desse período. Isso porque, em longo prazo, o investimento se desviará da tendência $I_{\tau+1} - I_\tau = q(r_{\tau-t} - r^*) + g_n I_\tau$, apenas em pontos isolados do tempo. Em períodos de expansão econômica I será maior que a tendência, e o inverso ocorrerá em tempos de depressão. Dessa forma, as flutuações advindas da expansão ou depressão não terão forte influência sobre a média de crescimento que estará em torno da normal. Assim, em condições iniciais de equilíbrio e frente a um regular ciclos de negócios, a média da taxa real de crescimento da economia não se afastará da normal. Portanto, existe uma estabilidade em torno das condições de equilíbrio.

Ajustamento em condições iniciais distintas do equilíbrio

Por outro lado, caso seja considerado condições iniciais fora do equilíbrio, segundo Bortis:

> *In a disequilibrium situation the rate of realised profits depend upon growth in the usual post Keynesian way. Thus, the equilibrium situation ... may be unstable if the income effect of I operates faster than the capacity effect. But,....., if q is sufficiently small there may be a tendency towards the long run equilibrium position.(Bortis,1998:600)*

Assim, em havendo condições iniciais distintas das condições de equilíbrio, caso seja considerado o acelerador do investimento flexível, além de um ajuste do estoque de capital consideravelmente lento, o sistema de ajustamento apresentará uma tendência da economia para o grau de utilização normal. Vale ressaltar que Bortis considera uma economia aberta onde as exportações e o gasto governamental definem a taxa de crescimento da economia:

> *The above relations reveal that N and Q are determined by autonomous expenditures multiplied by a "supermultiplier.The long-run equilibrium levels of N and Q are positively linked to government expenditures G, exports X, the terms of trade (a lower p = epM=P means that terms of trade are more favorable), n;d;xs and vs:(Bortis;1984:p.601)*

Como estes gastos são bastante voláteis, suas taxas de crescimento podem oscilar, levando a que a taxa normal de crescimento da economia nunca seja alcançada, havendo, quando muito, uma oscilação em torno dela. Contudo, qualquer processo de desequilíbrio, através de uma dinâmica interligando curto, médio e longo prazo, onde em curto e médio prazo há uma variação nos parâmetros de distribuição da renda, levará a que a economia exiba uma trajetória em torno de uma tendência do grau de utilização normal.

Nesses termos considerando como válida a dinâmica descrita pelo autor, as condições necessárias de convergência de h_t e da tendência da economia são satisfeitas, podendo ocorrer as duas condições descritas como necessárias a um modelo de crescimento liderado pela demanda.

Contudo, segundo Serrano e Freitas (2014), Bortis ao assumir que de alguma forma as firmas têm o conhecimento de que a tendência do crescimento da economia segue a taxa de crescimento dos gastos autônomos, tornando o modelo bastante estável, leva a um fenômeno irrealista que não auxilia no entendimento de como se dá o processo de ajustamento da capacidade à demanda.

3.2.5 O Modelo de White (2004)

White propõem uma variante do modelo do supermultiplicador de Serrano com a ideia de contradizer as críticas feitas por alguns autores, principalmente de Trezzini(1998).

Trezzine, nesse trabalho de 1998, critica o supermultiplicador de Serrano chamando a atenção para o fato de que uma variação na taxa de crescimento dos gastos autônomos poderia acarretar uma sobre ou subutilização da capacidade, levando o sistema para bem distante do ponto de equilíbrio de tal forma que o ajustamento da capacidade à demanda levaria um tempo relativamente grande. Grande o suficiente para haver nova variação na taxa de gastos autônomos.

Frente a essa crítica, White elabora uma função para a propensão marginal a investir, similar à do Supermultiplicador, onde a taxa de crescimento da demanda esperada não seria fundamentada em expectativas adaptativas, mas em uma média ponderada de recentes observações acerca das taxas de crescimento da demanda autônoma e da demanda setorial. A ideia seria a de apre-sentar um exemplo, onde dada uma variação da taxa de crescimento dos gastos autônomos, haveria uma rápida convergência do sistema para o equilíbrio. Segundo o autor, tal definição;

> *... can be justified on the following intuition: producers believe that the rate of growth of demand in their own sector is partly dependent on the growth rate of the economy as a whole, and through this, on the rate of growth of components of autonomous demand, for example, export demand, public sector expenditure. (White, 2004, p.11)*

Considerações

A Convergência de $\mathbf{h_t}$ *White considera um modelo onde a função que definiria a propensão marginal a investir seria dada por:*

$$h^* = g^e \frac{v}{u_n},$$

onde g_e é a taxa esperada, acima definida e, que em equilíbrio, assume o seguinte valor:

$$h^* = g_w \frac{v}{u_n},$$

com g_w a taxa garantida que define o completo ajustamento da economia a um grau de utilização normal.

Embora o autor não considere explicitamente que essa taxa de crescimento g_w seria igual à taxa de crescimento dos gastos autônomos g_z, considerando como no modelo do supermultiplicador, para uma economia fechada, que a taxa dos gastos autônomos é constante, tal média seria igual ou muito próxima a g_z. Logo a convergência poderia ser garantida.

A estabilidade em condições em torno do equilíbrio

Com a função assim definida, White considera que é possível que o sistema se estabilize frente a uma queda ou alta na taxa de crescimentos dos gastos autônomos, em tempo relativamente pequeno - contrariando, portanto, as afirmações de Trezzini(1998). Segundo o autor:

> *If expectations of growing demand are the key force driving investment and output, for Y to grow faster than I^A,[22] would require a reasonably firmly held expectation that demand was going to grow faster than the new higher rate of growth of autonomous demand. And if the expected growth rate of demand was based on a weighted average of recently observed growth rates of autonomous demand and recently observed growth rates of sectoral demand, then it is difficult to see how an expected rate of demand growth could exceed the new higher growth rate of autonomous demand. (White;2004:p. 163)*

Ou seja, as variações na taxa de crescimento da demanda autônoma poderiam ser captadas pelas decisões de investimento, na medida em que a propensão marginal a investir seria uma função governada por uma expectativa baseada uma média ponderada de observações recentes das taxas de crescimento da demanda autônoma e da demanda setorial.

De fato White demonstra a partir de uma simulação, que é possível, após a variação da taxa de gastos autônomos, que o grau de utilização real da economia gravite em torno do grau normal.

> *Indeed, White (2003) demonstrates by means of simulation experiments that the initial reaction in a multiplier accelerator model could give rise to a sufficiently large enough surge in growth rates of demand that I^A/Y falls thus the adjustment to a new rate of growth of autonomous demand involves a cycle in growth rates around a higher trend rate of growth. These experiments show that in these cases there is gravitation of the actual utilization rate around the normal rate over time. (White,2004: p. 164)*

Convergência assintótica fora das condições de equilíbrio

Observe que a construção da função h_t de White, implica que mesmo havendo a variação dos gastos autônomos é possível que haja uma trajetória estável com grau de utilização real

[22] Nessa citação, I^A diz respeito ao nível dos gastos autônomos.

gravitando em torno do grau normal. Dessa forma, uma vez atingido e estado de equilíbrio, as variações na taxa de crescimento dos gastos autônomos não implicam em que o grau real de utilização da capacidade se distancie muito do normal. Logo existiria a possibilidade não apenas de trajetórias em torno de uma tendência, mas trajetórias estáveis com grau de utilização normal.

Contudo, o autor chama a atenção para o fato de que:

> *However, these results should be treated with caution, since in the model examined the normal utilization rate is taken as given; the rate of growth of autonomous demand does not fluctuate over time; expectations of demand growth are partly based on anticipations about autonomous growth in demand and no allowance is made in decisions about fixed capital investment for fluctuations in demand.(White;2004: p. 164)*

Na verdade o autor coloca em cheque a crítica de Trezzini, mas acredita que ela tenha fundamento. O que ele para ele não é razoável, é o fato de a dificuldade de um completo ajustamento frente a uma mudança na taxa de crescimento dos gastos autônomos apontar para a idéia do abandono da análise das trajetórias em equilíbrio estáveis.

De fato com tal definição para a função propensão marginal a investir, o modelo de White apresenta as condições necessárias para satisfazer as duas condições para as trajetórias. Todavia,

> *Ao nosso ver, a questão de considerar explicitamente os gastos autônomos na formação de expectativas é algo, em princípio, meio controverso....*
> *...Mas, cabe-nos aqui perguntar: por quê formular uma função de expectativas com um (duvidoso) peso para TCA, (taxa de crescimento dos gastos autônomos)[23] já que dificilmente poderíamos captar seu grau (de)[24] veracidade empírica, se já é suficiente uma formulação, com fortíssimo apelo empírico, baseada apenas nas variações observadas do grau de utilização? Fica aqui o questionamento. (Garrido;2007:p.107-108)*

Serrano e Freitas (2014), por sua vez, analogamente a Garrido, acreditam que não seja razoável assumir que os investidores, ou mesmo uma fração deles, tenham suas expectativas de crescimento da economia baseadas na taxa de crescimento dos gastos autônomos. De fato tais autores acreditam ser mais razoável que a tendência da capacidade para se ajustar à demanda se dê via um processo adaptativo mais simples de tentativas e erros.

---

[23]Observação nossa.
[24]Idem

3.2.6 O Modelo de DeJuan(2005)

O modelo do multiplicador descrito por DeJuan, é também bastante similar ao proposto por Serrano(1995) com as seguintes distinções:

- *No modelo, DeJuan considera apenas capital fixo.*
- *Além da acumulação de capital, o autor considera um estoque de bens produzidos que podem ser desejados ou indesejados dependendo do comportamento da demanda.*
- *Quanto à função que define o investimento, é considerado que a propensão marginal a investir, no lugar de seguir a expectativa do crescimento da demanda, considera a taxa de crescimento dos gastos autônomos. Nesse sentido o autor enfatiza que esse tipo de expectativa define as decisões de investimento com base em comportamentos esperados no futuro, não levando em conta a situação da atividade econômica passada. Nas palavras do autor, as firmas agem decidindo seus investimentos com base no crescimento da demanda, a qual é um múltiplo da demanda autônoma. Dessa forma eles descontam a capacidade excedente, bem como os estoques indesejados de bens produzidos e continuam a aumentar seus investimentos - em caso de crescimento dos gastos autônomos-independentemente do excesso de capacidade ou estoque de bens existentes, uma vez que entendem que a demanda futura dará conta de acomodar tantos os estoques já produzidos, como o produto potencial existente e o que vier a ser produzido via aquisição da nova capacidade adquirida por intermédio dos novos investimentos. Nesses termos a função investimento, nesse modelo é definida da seguinte forma:*

  $$I_t = \frac{v}{u_t} g_{\hat{z}} Y_t.$$

  Além disso, o autor chama a atenção para o fato de que o acelerador do investimento é flexível o suficiente para acomodar os estoques de bens e a capacidade existente frente a choques de demanda.
- *Em vista disso, DeJuan considera um ajustamento do grau de utilização da capacidade produtiva, mesmo não estando o sistema em equilíbrio, sem lançar mão de alternativas baseadas em médias de utilização da capacidade produtiva. Os empresários capitalistas tomam suas decisões em acordo com o que esperam do comportamento da demanda futura, baseada na taxa de crescimento dos gastos autônomos.*

Considerações

A Convergência de h_t

A função da propensão marginal a investir de DeJuan é definida por $I_t = \frac{v}{u_t} g_{\hat{z}} Y_t \Longrightarrow h_t = \frac{v}{u_t} g_z$*. Em vista disso, tomando* $g_{\hat{z}}$ *ou* g_z *como constante, temos* $\frac{dh_t}{dt} = -\frac{g_z v}{u_t^2}$ *o que implica que a função propensão marginal a investir é sempre decrescente em relação ao grau de utilização da capacidade produtiva. Isso implica em que um alto grau de utilização da capacidade, leva a uma menor propensão a investir, e, inversamente, um baixo grau leva a uma maior propensão a investir.*

Nessas condições, em termos puramente matemáticos essa função atua na direção contrária ao que se espera de uma função que defina a direção das decisões de investimento, sendo muito pouco provável que haja uma convergência de h_t *para* $(g_z + \delta)\frac{v}{u_n}$*, enquanto a taxa de crescimento* g_z *estiver constante, uma vez que se* u_t *estiver decrescendo, a propensão marginal a investir aumenta podendo elevar ainda mais o estoque de capital, em período posterior. Inversamente se* u_t *está em crescimento, a propensão marginal a investir diminui, podendo diminuir mais ainda o grau de utilização da capacidade produtiva. Logo, em termos puramente formais, a primeira condição necessária não é garantida e, portanto, não é garantida nem a estabilidade, nem a tendência para o grau normal de utilização da capacidade produtiva.*

Por outro lado, caso sejam consideradas corretas as justificativas do autor para a convergência de h_t*, o sistema não só seria estável em torno do equilíbrio, uma vez que*

> *Afinal, nesse modelo, a demanda agregada será um múltiplo direto do componente autônomo, com muito mais precisão do que no supermultiplicador de Serrano, pois apenas em resposta ao componente autônomo é que o induzido é capaz de reagir. Com esse modo de formação de expectativa, a demanda agregada dificilmente pode sofrer maiores oscilações, estas só acontecendo, no caso de erro na expectativa de crescimento do componente autônomo, ou quando este último muda sua taxa de crescimento, quando acontece uma pequena oscilação cíclica enquanto a nova taxa é absorvida pelos investimentos induzidos. (Garrido;2007:p. 102-103)*

como apresentaria grau de utilização convergente para o normal satisfazendo, portanto, as duas condições requeridas.

Contudo:

> *A solução de de-Juan, força, literalmente, para que a economia cresça à taxa de crescimento dos gastos autônomos quando sugere o acelerador prospectivo. Infelizmente, não parece razoável nem coerente que os investimentos induzidos possam se comportar dessa maneira empiricamente, sobretudo, conciliando isso com a hipótese de que os erros são corrigidos com base nos valores observados.*

> *...Para que o modelo de de-Juan funcione, basicamente, os empresários teriam que saber diferenciar claramente a fonte de demanda que lhes advém, se autônoma ou induzida, para reagir tão somente à autônoma. Como o autor propõe que a demanda autônoma só é constituída pelos investimentos em inovação, essa diferenciação da demanda talvez se torne um pouco mais clara, mas, ainda assim, é inacreditável que os empresários não reajam a uma mudança real de demanda, mesmo provinda de componente induzido. (Garrido;2007:p:104-105)*

Também Serrano e Freitas(2014) criticam a função investimento que DeJuan denomina " função investimento de acelerador prospectivo", ou acelerador flexível, na medida em que não existe uma interação entre acelerador e multiplicador em seu modelo, pois a tendência da acumulação de capital é fixada exogenamente Nessas condições embora o modelo se apresente estável, ele não define um verdadeiro processo de ajustamento da capacidade à demanda.

Considerações Finais

O que se pode concluir a partir da análise desses modelos que fazem uso do supermultiplicador é o seguinte:

- *No modelo original de Serrano(1995), embora seja justificada uma estabilidade em torno das condições de equilíbrio, não fica explícito na função investimento o acelerador flexível, logo o ajustamento completo frente a mudanças nos parâmetros estruturais, em particular na taxa de crescimento dos gastos autônomos é difícil de ser justificada. Na verdade, o que o autor buscou na construção desse modelo foi mostrar que o sistema se mantinha estável.*

- *No modelo de Serrano, Cesaratto e Stirati de 2003 a função investimento foi definida detalhadamente, apresentando acelerador flexível. Em vista disso essa modelagem apresenta um sistema estável e passível de ajustamento completo frente a mudanças nos parâmetros estruturais. Exibe, então, grau de utilização tendente ao normal ou planejado com também tendência à igualdade entre as taxas de crescimento da economia. As simulações presentes no final desse capítulo apontam para uma convergência assintótica da função investimento h_t, sendo respeitado o limite para a taxa de crescimento dos gastos autônomos de $g_z < \frac{s}{v_n} - b$, considerando o grau de depreciação $\delta = 0$, nos cálculos das simulações.*

- *No modelo de Serrano e Freitas (2013), a estabilidade assintótica local foi provada formalmente via teoria dos sistemas dinâmicos. As simulações, todavia, indicam um comportamento assintótico de h_t para todo valor menor que s, sendo respeitado o limite para os gastos autônomos de $g_z < \frac{s}{v_n} - u_n\gamma$, considerando a depreciação nula (nas* *simulações).*

- *O modelo de Bortis faz uso da distribuição da renda - em curto e médio prazo - como variável de ajuste para que o sistema seja estável. Como já observado anteriormente, embora em longo prazo Bortis considere a distribuição de renda dada de forma exógena ao sistema, no processo de ajustamento de longo prazo, ocorre segundo o autor, um fenômeno onde taxas de lucros maiores que a desejada, levam a maiores níveis de investimento por parte dos empreendedores. Nesse trabalho consideramos que esta não seria uma hipótese muito razoável para descrever as características das decisões de investimento, mesmo em curto e médio prazo.*

  A dinâmica descrita por Bortis também satisfaz as condições necessárias de convergência da função h_t, da estabilidade em torno do equilíbrio e da assintoticidade fora das condições de equilíbrio. Logo é bastante estável. Contudo, segundo Serrano e Freitas(2014), a expectativa dos empreendedores fundamentada em observações da taxa de crescimento dos gastos autônomos, é bastante irrealista e não é adequada para descrever o processo de ajustamento da capacidade à demanda. Dessa forma não é uma modelagem adequada.

- *Em relação ao trabalho de White, sua função investimento pode levar o sistema a satisfazer as duas condições descritas anteriormente. Contudo, segundo Garrido(2007), Serrano e Freitas (2014) a função que define a propensão marginal a investir tem sua medida dependente de uma variável autônoma de difícil obervação, o que torna o modelo pouco realista.*

- *Quanto ao modelo de DeJuan, além de em termos formais - matemáticos -, exibir uma dinâmica que dificilmente atuaria fazendo com que o grau real de utilização da capacidade produtiva exibisse uma tendência para o grau normal ou planejado, segundo Garrido(2007), a hipótese de que os investimentos não respondam à demanda induzida é bastante incipiente. Serrano e Freitas(2014) também chamam a atenção para o fato de a função investimento, embora denominada de acelerador prospectivo, ou acelerador flexível, não apresentar interação entre acelerador e multiplicador, na medida em que a tendência da acumulação de capital é fixada exogenamente. Logo, não pode ser considerado um modelo que defina um processo de ajustamento da capacidade à demanda.*

3.3 Simulações

Nota: *As simulações foram elaboradas a partir do programa Microsoft Excel utilizando as equações que definem os modelos.*[25] *Vale salientar que tais simulações são indicações do comportamento descrito pelo modelo. Não servem, portanto, como comprovação efetiva dos resultados obtidos de forma teórica. Além disso, todas as simulações foram realizadas considerando a taxa de depreciação* δ *como sendo nula.*

- *Para o modelo de Serrano, Cesaratto, Stirati (2003) Considerando* $s = 0.2$, $v = 4$, $\gamma = 0.005$, $u_n = 0.8$ *que implica, levando em conta as restrições descritas no modelo, em um processo estável se* $g_z < 0.035$. *Dessa forma, partindo do equilíbrio com* $g_z = 0.02$ *e considerando* $h_o = 0.18$, *temos a configuração representadas nos gráficos 3.1 e 3.2.*

  Nos gráficos 3.3 e 3.4 temos a representação das taxas de crescimento, grau de utilização e h_t *para uma taxa de crescimento dos gastos autônomos maior que o limite definido, ou seja,* $g_z = 0.037$, *e* $h_o = 0.19$. *Observe a divergência tanto das taxas de crescimento como do grau de utilização.*

- *Similarmente para o modelo de Serrano e Freitas (2013), para as mesmas medidas temos os gráficos 3.5 e 3.6 relativos a mudança em* h_o, *e os gráficos 3.7 e 3.8, onde consideramos a taxa* $g_z = 0.037$. *Analogamente observa-se a convergência das taxas, grau de utilização e função investimento representada nos gráficos 3.5 e 3.6 e a divergência dessas variáveis nos gráficos 3.7 e 3.8.*

[25] Mais especificamente, as simulações foram realizadas utilizando a programação normal do Excel, onde as equações, em tempo contínuo, foram adequadas para o tempo discreto através de aproximação linear.

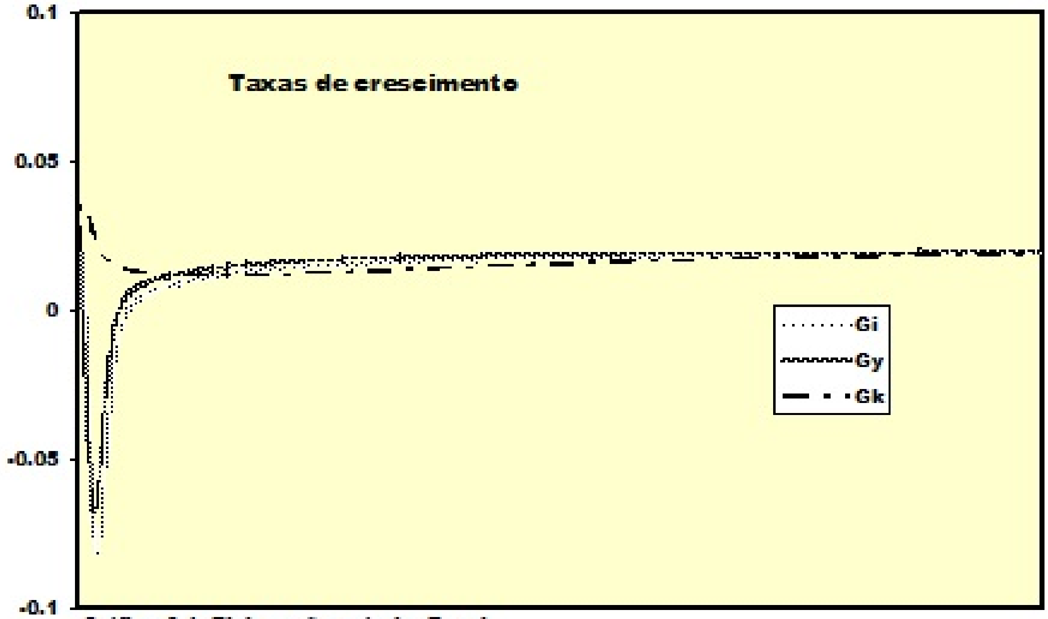

Gráfico 3.1- Elaboração própria -Excel

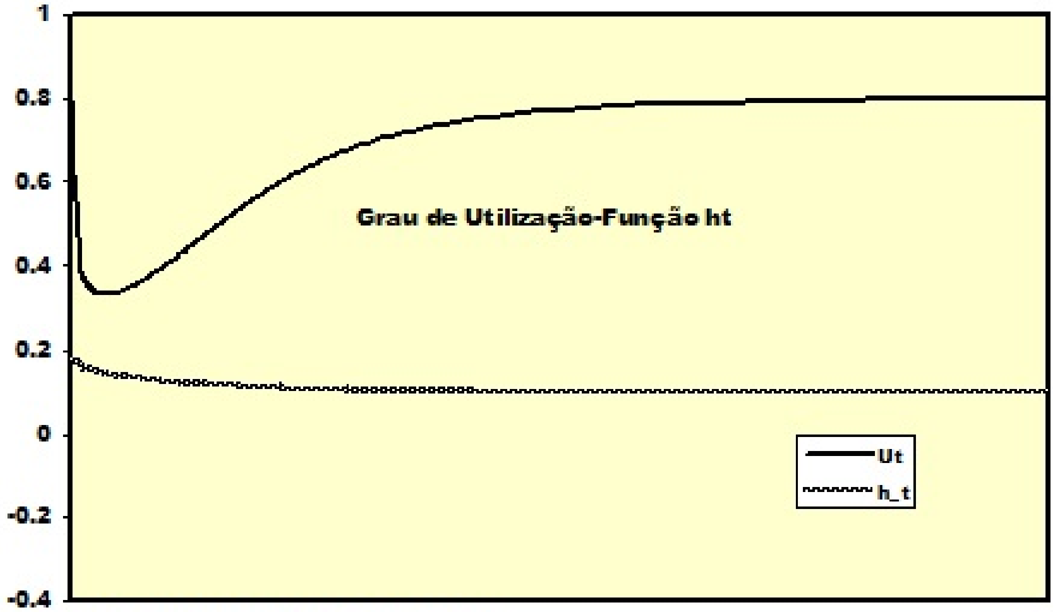

Gráfico 3.2 - Elaboração própria - Excel

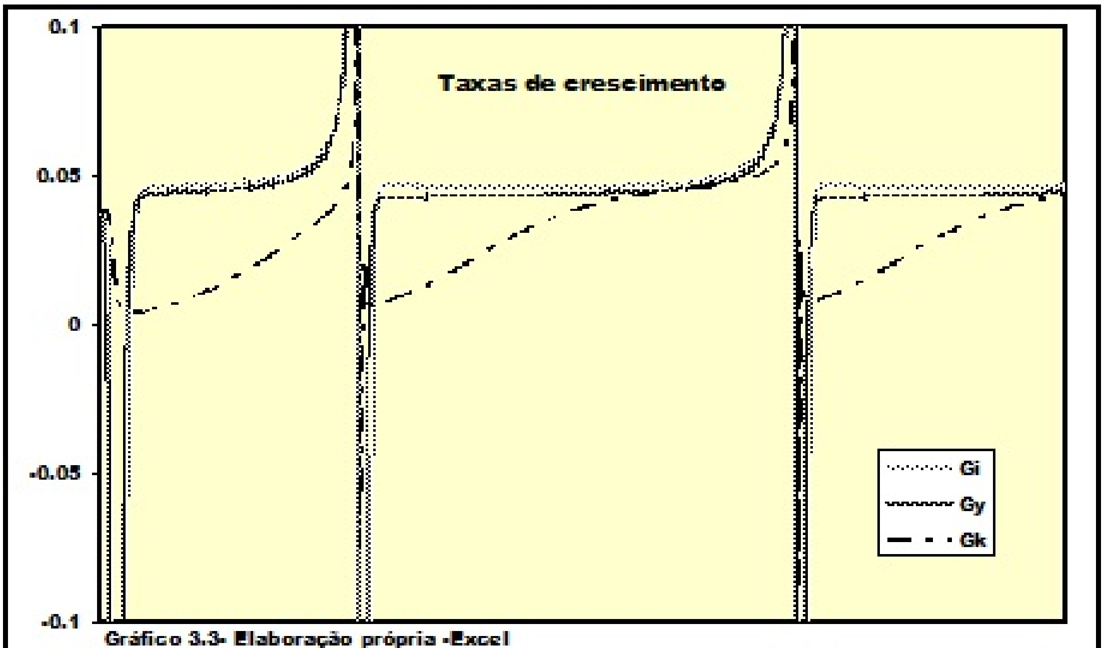

Gráfico 3.3- Elaboração própria -Excel

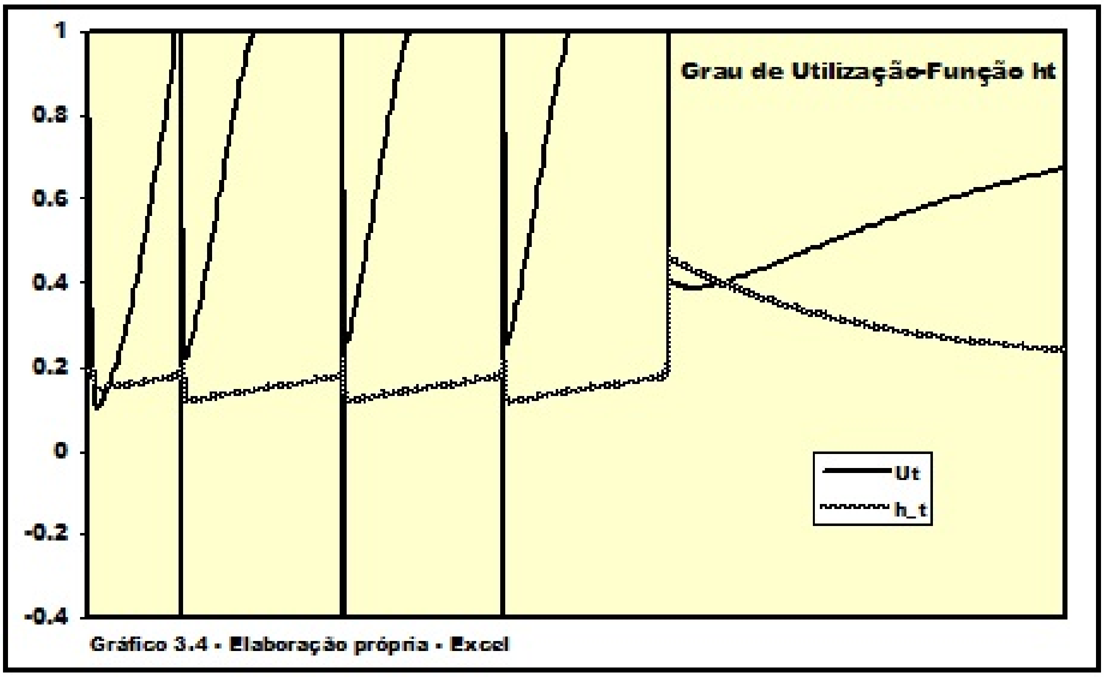

Gráfico 3.4 - Elaboração própria - Excel

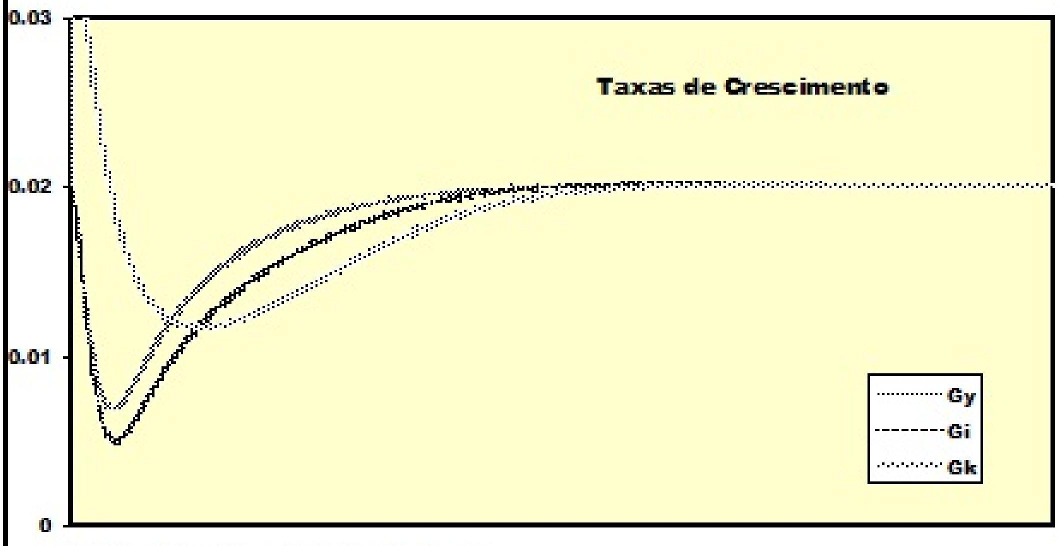

Gráfico 3.5 -Elaboração própria- Excel

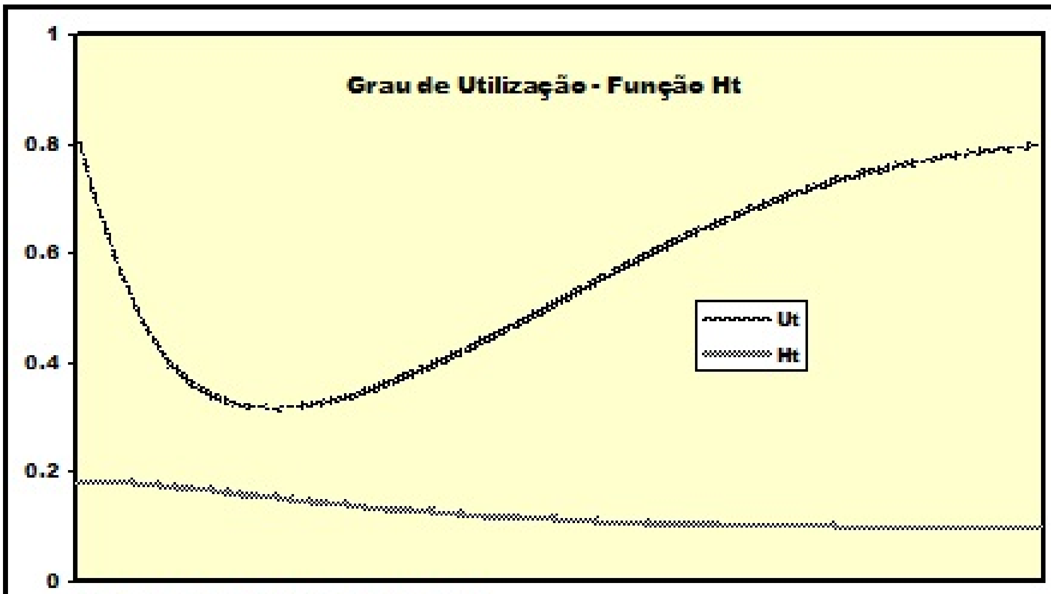

Gráfico 3.6 - Elaboração própria - Excel

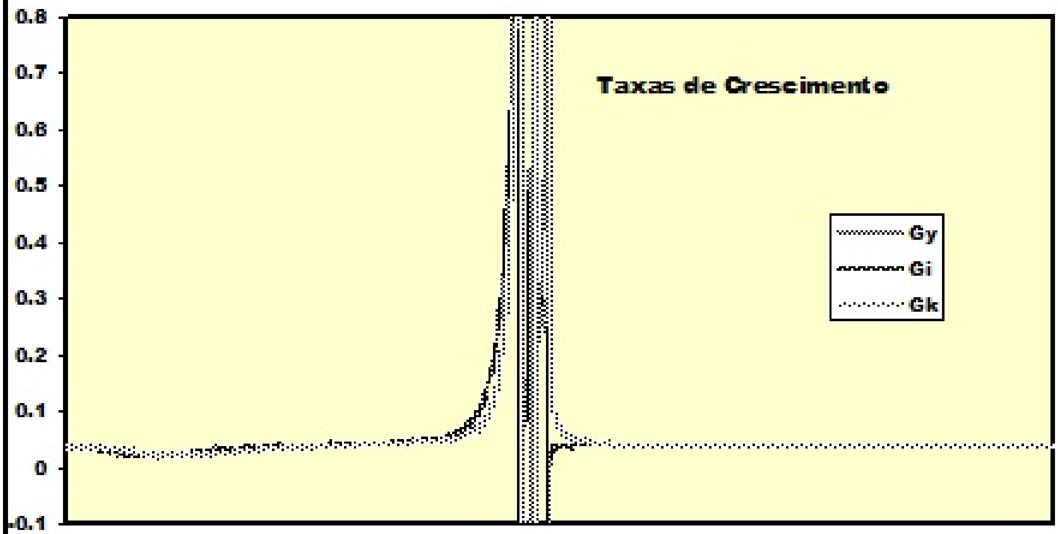

Gráfico 3.7 -Elaboração própria- Excel

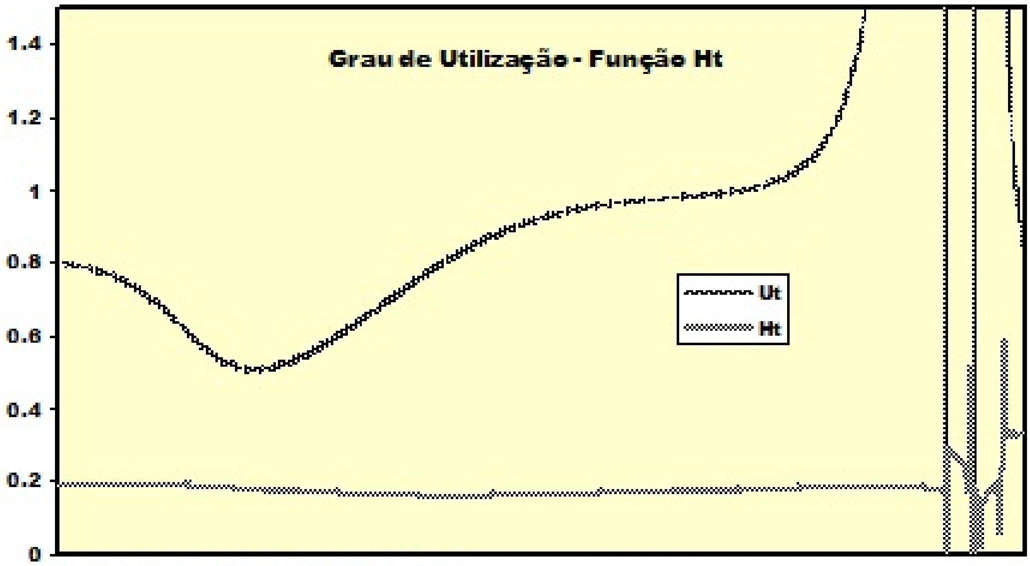

Gráfico 3.8 - Elaboração própria - Excel

Conclusão

Como dito no princípio desse trabalho, tentamos analisar alguns modelos de crescimento liderados pela demanda sob uma perspectiva formal e determinística que não é capaz de fornecer todas as respostas e diretivas para a dinâmica correta de um processo referente a uma ciência social aplicada como a economia. Logo não é demais repetir que essa dissertação não tem a pretensão de dar uma conclusão às controvérsias acerca desses modelos nem apresentar uma única direção a ser seguida.

Nesse sentido, considerando os modelos de crescimento liderados pela demanda fundamentados nos princípios da demanda efetiva e do excedente, buscamos, através da análise matemática formal, verificar se tais modelos podem descrever um processo dinâmico onde as duas seguintes condições:

- *que os modelos apresentem em longo prazo trajetórias estáveis onde as taxas de suas principais variáveis tendessem à igualdade, ou seja:* $g_y = g_i = g_k$, *e ainda que*
- *o grau de utilização da capacidade produtiva apresente uma tendência para o grau normal ou planejado da capacidade produtiva, este dado de forma exógena,*

fossem satisfeitas.

Com esse objetivo, no segundo capítulo, analisamos os modelos de crescimento liderados pela demanda via investimentos. Nesses modelos, pelo menos uma componente do investimento é autônomo, ou seja, não é induzida pela renda. Seria, portanto, oriundo de um espírito empreendedor dos agentes econômicos, cujo comportamento da demanda agregada não seria um fator preponderante para as decisões de investimento.

Em relação a esses modelos, chegamos às seguintes conclusões:

1. *a existência de equilíbrios estariam condicionados, em longo prazo, a não presença de gastos autônomos geradores de capacidade produtiva.*
2. *caso existisse a convergência para um atrator do grau de utilização da capacidade produtiva, esse só seria normal a partir de uma taxa específica, dada por:* $g_{I_A} = s\frac{u_n}{v}$, *onde* g_{I_A} *é a taxa de crecimento dos gastos autônomos.*

3. *no caso de modelos onde inexistem investimentos produtivos induzidos, a convergência, caso a taxa de crescimento dos investimentos autônomos se mantivesse constante por um prazo suficientemente adequado para a convergência do grau de utilização, então o processo se estabilizaria. Naturalmente essa condição também é válida para os outros modelos de investimento híbrido, desde que fosse garantido, em longo prazo, o ponto de equilíbrio.*

Nessas condições chegamos à conclusão que para esses modelos, a menos de uma taxa garantida, a segunda condição, acima descrita, não é verificada. A primeira condição, isto é, a existência de trajetórias é passível de existir. Naturalmente, o que se pode garantir é uma tendência, uma vez que as taxas autônomas podem sofrer mudanças ao longo do processo.

Considerando agora os modelos de crescimento onde existem os gastos autônomos não geradores de capacidade produtiva e os investimentos são todos induzidos, cujo principal representante é o modelo Supermultiplicador Sraffiano temos, relembrando as equações descritas em (3.8):

$$S^* = \begin{cases} \dfrac{du_t}{dt} & = \quad u_t\big(g_{z_t} + \dfrac{\frac{dh_t}{dt}}{s-h_t} - \dfrac{h_t}{v}u_t + \delta\big) \\ \\ \dfrac{dh_t}{dt} & = \quad h_t(g_{i_t} - g_{y_t}) \end{cases}$$

que se considerarmos a propensão marginal a investir como a função constante definida por:

$$h_t = (g_z + \delta)\frac{v}{u_n},$$

com a condição de que $0 < (g_z + \delta) < \dfrac{u_n}{v}$*, implicando em* $0 < h_t < 1$*, o processo de crescimento econômico apresenta uma trajetória de equilíbrio estável, com o grau de utilização da capacidade produtiva convergindo para o grau normal. Isso porque, como* h_t *é constante,* $\dfrac{dh_t}{dt} = 0$ *e , então* $g_{i_t} = g_{y_t} = g_z = g_k$*, e dessa forma* $u_t = u_n$*.*

Contudo, a ideia de uma propensão marginal a investir constante e dependente da taxa de crescimento dos gastos autônomos não é razoável, uma vez que o que pode ser observado, em termos macroeconômicos, é o comportamento da demanda e, individualmente o grau de utilização da capacidade produtiva e não o comportamento de uma das componentes da DA, principalmente a exógena. Dessa forma, é mais razoável que a função que defina essa propensão seja dependente de uma variável que convirja para a taxa de crescimento dos tais gastos e não exatamente deles.

Como os modelos com supermultiplicador variam em relação à definição da função h_t*, uma análise em linhas gerais desses modelos e, especificamente dessas funções foi realizada. Nessa* *direção, a análise feita sobre os modelos de Bortis, White, DeJuan e de Serrano resultaram nas seguintes conclusões:*

- *A função do modelo de DeJuan apresenta uma relação negativa o grau de utilização da capacidade, logo dificilmente convergirá para o valor necessário.*
- *As funções de Bortis e de White, apresentam convergência local para o equilíbrio necessário, mas não são definidas de forma economicamente viáveis, uma vez que apresentam as expectativas de crescimento da economia, por parte dos empreendedores, fundamentadas em observações da taxa de crescimento dos gastos autônomos, fenômeno que se configura pouco realista e que não define de forma satisfatória o processo de ajustamento da capacidade à demanda*
- *A fução de Serrano(1995) apresenta convergência local, mas não apresenta explicitamente um acelerador flexível para possibilitar o ajustamento completo quando em mudan-ças nos parâmetros estruturais do modelo, como por exemplo, a taxa de crescimento dos gastos autônomos.*
- *A definição mais precisa da função investimento do modelo de Cesaratto, Serrano, Stirati,(2003), fundamentada em expectativas adaptativas e dotada de um parâmetro que a torna as decisões de investimento flexíveis, ao convergir para o valor necessário, a partir de condições iniciais bem definidas, permite um completo ajustamento quando da mudança na taxa de crescimento dos gastos autônomos, esses últimos satisfazendo um limite superior para sua variação. Nessas condições, o grau real de utilização da capacidade de longo prazo, mantendo a constância da taxa de crescimento dos gastos autônomos, apresenta trajetória tendente ao grau normal.*
- *Por último, o modelo de Serrano e Freitas(2013), ao definir uma variação para a função* h_t, *apresenta um sistema dinâmico, com ponto de equilíbrio que, localmente, é estável e assintótico. Por outro lado, o estudo das equações que definem o modelo leva à conlcusão que a o modelo apresenta um completo ajustamento - face à mudanças nos parâmetros -, fazendo com que o grau de utilização real apresente uma tendência em direção ao grau normal.*

Em resumo, esse estudo mostrou que em linhas gerais, um modelo de crescimento liderado pela demanda, para economias fechadas, com distribuição da renda dada exogenamente, para exibir uma trajetória de equilíbrio estável são necessárias as seguintes condições:

- *A demanda agregada deve apresentar gastos autônomos.*

- *Se existir investimento autônomo, todos os outros gastos devem ser induzidos.*

Por outro lado para que esse equilíbrio estável apresente grau real de utilização normal/planejado, ou tendendo para ele, as seguintes condições são necessárias:

- *Deve existir gastos autônomos que não criem capacidade produtiva.*
- *O investimento produtivo, em termos macro econômicos, deve ser todo induzido.*

Por último é ainda necessário para o completo ajustamento frente a mudanças dos parâmetros estruturais do modelo, que o acelerador do supermultiplicador seja flexível.

Em vista disso, o modelo do supermultiplicador definido originalmente por Serrano(1995) e com as contribuições posteriores, apresenta tais condições.

4 Apêndice

Soluções de algumas equações diferenciais

Nessa parte do apêndice vamos resolver a equação de Bernoulli do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = (x+a)(b-x). \tag{4.1}$$

A equação acima pode ser resolvida através do método de variáveis separáveis da seguinte forma:

Considerando $t_0 = 0$, *temos* $\frac{dx}{dt} = (x+a)(b-x) \Longrightarrow \int_0^t \frac{1}{(x+a)(b-x)}\frac{dx}{dt}dt = \int_0^t 1dt$, *que com a mudança de variáveis* $x = x(t) \Longrightarrow x(o) = x_o,$ *e* $x(t) = x_t$, *se torna:*

$$\int_{x_o}^{x_t} \frac{1}{(x+a)(b-x)}dx = \int_0^t dt = t$$

Por outro lado, a integral indefinida $\int \frac{1}{(x+a)(b-x)}dx$, *tem como solução:*

$$\frac{1}{b+a}ln(\frac{|x+a|}{|b-x|}) + m, \ m \ constante.$$

Resolvendo a integral definida, temos:

$$\int_{x_o}^{x_t} \frac{1}{(x+a)(b-x)}dx = \frac{1}{b+a}\big[ln(\frac{|x_t+a|}{|b-x_t|}) - ln(\frac{|x_o+a|}{|b-x_o|})\big] =$$

$$= \frac{1}{b+a}\big\{ln\big[(\frac{|x_t+a|}{|b-x_t|})(\frac{|b-x_o|}{|x_o+a|})\big]\big\}$$

e nesse caso :

$$\int_{x_o}^{x_t} \frac{1}{(x+a)(b-x)}dx = \frac{1}{b+a}\big\{ln\big[(\frac{|x_t+a|}{|b-x_t|})\frac{1}{m}\big]\big\}, \ onde \ m = (\frac{|x_o+a|}{|b-x_o|}).$$

Nessas condições:

$$\int_{x_o}^{x_t} \frac{1}{|x+a||b-x|}dx = \frac{1}{b+a}\big\{ln\big[(\frac{|x_t+a|}{|b-x_t|})\frac{1}{k}\big]\big\} = t,$$

e, portanto:

$$\{ln[(\frac{|x_t+a|}{|b-x_t|})\frac{1}{m}]\} = t(b+a) \Longrightarrow (\frac{|x_t+a|}{|b-x_t|}) = me^{t(b+a)}$$

Logo, resolvendo essa equação modular, obtemos as soluções da equação de Bernoulli, com as respectivas condições iniciais:

$$x_t = \begin{cases} \dfrac{-a+mbe^{t(b+a)}}{1+me^{t(b+a)}} & se \quad -a < x_o < b \\ \\ \dfrac{-a-mbe^{t(b+a)}}{1-me^{t(b+a)}} & se \quad x_o > -a \; e \; x_o > b \\ \\ \dfrac{a+mbe^{t(b+a)}}{-1+me^{t(b+a)}} & se \quad b < x_o < -a \\ \\ \dfrac{a-mbe^{t(b+a)}}{-1-me^{t(b+a)}} & se \quad x_o < -a \; e \; x_o > b \\ -a & se \quad x_o = -a \\ b & se \quad x_o = b \end{cases} \tag{4.2}$$

Nota: *Caso a equação seja do tipo:*

$$\frac{dx}{dt} = (x)(b-x), \tag{4.3}$$

As soluções são da forma:

$$x_t = \begin{cases} \dfrac{mbe^{t(b)}}{1+me^{t(b)}} & se \quad o < x_o < b \\ \\ \dfrac{-mbe^{t(b)}}{1-me^{t(b)}} & se \quad x_o > o \; e \; x_o > b \\ \\ \dfrac{mbe^{t(b)}}{-1+me^{t(b)}} & se \quad b < x_o < o \\ \\ \dfrac{mbe^{t(b)}}{-1-me^{t(b)}} & se \quad x_o < o \; e \; x_o > b \\ 0 & se \quad x_o = 0 \\ b & se \quad x_o = b \end{cases} \tag{4.4}$$

Considerando agora a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y_t f(t), \tag{4.5}$$

temos:

$$\frac{1}{y_t}\frac{dy}{dt} = f(t) \Longrightarrow \int_{y_o}^{y_t} \frac{dy}{y} = \int_o^t f(s)ds \Longrightarrow ln\frac{|y_t|}{|y_o|} = \int_o^t f(s)ds.$$

Supondo $y_o > o$ e $y_t > o$, temos que as soluções de (4.5), são dadas por:

$$y_t = y_o e^{\int_o^t f(s)ds} \quad onde\ y_o = y(o).$$

Nota: *Caso $f(t) = b - x_t$, onde x_t é solução da equação (4.1) e b a respectiva constante dessa mesma equação, temos que as soluções da equação (4.5), acima são obtidas, resolvendo primeiramente a integral definida: $\int_o^t (b - x_s)ds$. Utilizando as soluções (4.2), temos:*

$$\int_o^t (b - x_s)ds. = \begin{cases} \int_o^t (\frac{(b+a)}{1+me^{s(b+a)}})ds = \int_o^t (\frac{(b+a)e^{-s(a+b)}}{m+e^{-s(b+a)}})ds & se \quad -a < x_o < b \\ \\ \int_o^t (\frac{(b+a)}{1-me^{s(b+a)}})ds = \int_o^t (\frac{(b+a)e^{-s(a+b)}}{m-e^{-s(b+a)}})ds & se \quad x_o > -a\ e x_o > b \\ \\ \int_o^t (\frac{-(b+a)}{-1+me^{t(b+a)}})ds = \int_o^t (\frac{-(b+a)e^{-s(a+b)}}{-m+e^{-s(b+a)}})ds & se \quad b < x_o < -a \\ \\ \int_o^t (\frac{-(b+a)}{-1-me^{s(b+a)}})ds = \int_o^t (\frac{-(b+a)e^{-s(a+b)}}{-m-e^{-s(b+a)}})ds & se \quad x_o < -a\ e\ x_o > b \\ \int_o^t (b+a)ds = \infty & se \quad x_o = -a \\ \int_o^t (b-b)ds = o & se \quad x_o = b \end{cases} \tag{4.6}$$

que resulta em:

$$\int_o^t (b - x_s)ds = \begin{cases} ln\frac{|m+1|}{|m|} = ln\big(\frac{a+b}{x_o+a}\big) & se \quad -a < x_o < b \\ \\ ln\frac{|m|}{|m-1|} = ln\big(\frac{x_o+a}{a+b}\big) & se \quad x_o > -a\ e\ x_o > b \\ \\ ln\frac{|m|}{|-m+1|} = ln\frac{|x_o+a|}{|a+b|} & se \quad b < x_o < -a \\ \\ ln\frac{m}{|m+1|} = ln\big(\frac{a+b}{x_o+a}\big) & se \quad b < x_o < -a \\ \infty & se \quad x_o = -a \\ o & se \quad x_o = b \end{cases} \tag{4.7}$$

E por fim as soluções de $\frac{dy}{dt} = y_t(b - x_t)$ *são dadas por:*

$$y_t = y_o e^{\int_o^t (b - x_s) ds} = \begin{cases} y_o(\dfrac{a+b}{x_o+a}) & se \quad -a < x_o < b \\ \\ y_o(\dfrac{x_o+a}{a+b}) & se \quad x_o > -a \; e \; x_o > b \\ \\ y_o\dfrac{|x_o+a|}{|a+b|} & se \quad b < x_o < -a \\ \\ y_o(\dfrac{a+b}{x_o+a}) & se \quad b < x_o < -a \\ \infty & se \quad x_o = -a \\ y_o & se \quad x_o = b \end{cases} \tag{4.8}$$

Equação de Diferenças Finitas Linear de Segunda Ordem

Uma equação de diferenças finitas linear de segunda ordem é definida por:

$$K_t + aK_{t-1} + bK_{t-2} = C, com\; b \neq 0. \tag{4.9}$$

Quando $C = 0$, *a equação é denominada homogênea.*

A solução geral da equação de diferenças finitas de segunda ordem é formada pela soma de duas componentes. A primeira, denominada solução de equilíbrio, é obtida através da resolução da seguinte equação:

$$K^* + aK^* + bK^* = C, onde\; (1 + a + b) \neq 0,$$

implicando em que $K^* = \frac{C}{1+a+b}$.

A segunda parte da solução geral é a solução da equação homogênea: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, *cujas raízes são da forma:*

$$\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

que podem conduzir às seguintes soluções gerais:

1. *Se* $a^2 - 4b > 0$,

$$K_t = \frac{C}{1+a+b} + A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t.$$

2. *Se* $a^2 - 4b = 0$,

$$K_t = \frac{C}{1+a+b} + (A_1 + A_2)\lambda^t.$$

3. *Se* $a^2 - 4b < 0$,

$$K_t = \frac{C}{1+a+b} + r^t(A_1 cos(\theta t) + A_2 sen(\theta t)),$$

onde $r = \sqrt{b}$ *e* $cos(\theta) = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$.

Em todas as soluções gerais, A_1 *e* A_2 *dependem das condições iniciais*[1].

Nota: *Na terceira solução geral, acima, foi usado que as raízes complexas da equação homogênea podem ser expressas da seguinte forma:*

$$\lambda_1 = r(cos(\theta) + isen(\theta)) = re^{i\theta} \Longrightarrow \lambda_1^t = r^t(cos(\theta t) + isen(\theta t))$$

$$\lambda_2 = r(cos(\theta) - isen(\theta)) = re^{-i\theta} \Longrightarrow \lambda_2^t = r^t(cos(\theta t) - isen(\theta t)),$$

logo: $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = r^t(cos(\theta t)$ *e* $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2i} = r^t(sen(\theta t)$ *são também soluções da equação à diferenças finitas homogênea* $K_t + aK_{t-1} + bK_{t-2} = 0$ *e, portanto,* $r^t(A_1 cos(\theta t) + A_2 sen(\theta t))$ *é também uma solução da equação homogênea.*

Definição 4.0.1 **Equilíbrio estável** *A solução de equilíbrio* K^*, *é uma solução estável da equação de diferenças finitas, independentemente das condições iniciais, se a solução geral, convergir no decorrer do tempo, para esse equilíbrio, isto é:*

$$\lim_{t\to\infty} K_t = K^*.$$

Teorema 4.0.1 *A solução de equilíbrio* K^* *é uma solução de equilíbrio estável da equação de diferenças finitas de segunda ordem,* $K_t + aK_{t-1} + bK_{t-2} = C$, *se, e somente se:*

$$1 + a + b > 0, \quad 1 - a + b > 0 \quad e \quad 1 - b > 0.$$

[1]Para mostrar que essas expressões definem realmente soluções gerais da equação (4.9), basta substitui-las na equação e verificar que a igualdade é satisfeita

Prova: ($\Longrightarrow$) *Suponha que a solução de equilíbrio, $K^* = \frac{C}{1+a+b}$, da equação de diferencas finitas de segunda ordem (4.9) seja estável. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} K_t = K^*.$$

e, portanto,

$$(1) \lim_{t\to\infty}\{K_t = \frac{C}{1+a+b} + A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t.\} = \frac{C}{1+a+b}, \text{ ou}$$

$$(2) \lim_{t\to\infty}\{K_t = \frac{C}{1+a+b} + (A_1+A_2)\lambda^t\} = \frac{C}{1+a+b}, \text{ ou}$$

$$(3) \lim_{t\to\infty}\{K_t = \frac{C}{1+a+b} + r^t(A_1cos(\theta t) + A_2sen(\theta t))\} = \frac{C}{1+a+b},$$

A partir dos limites (1) e (2), temos que λ_1 e λ_2 são, em valor absoluto, menores do que 1, caso contrário a segunda parcela de cada um dos limites não tenderia para zero.

Considerando, agora, a função convexa $f(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda_1 + b$, se suas raízes são em valor absoluto menores do que 1, temos que $f(\lambda) > 0$ para todo $|\lambda| \geq 1 \Longrightarrow f(1) = 1+a+b > 0$ e $f(-1) = 1-a+b > 0$. Portanto as primeiras condições estão satisfeitas. Naturalmente essas duas condições são válidas também, caso as soluções sejam complexas, uma vez que, nesse caso, a função $f(\lambda)$ tem imagem estritamente positiva.

No caso, ainda, de as raízes serem complexas, observe que

$$\lim_{t\to\infty}\{K_t = \frac{C}{1+a+b} + r^t(A_1cos(\theta t) + A_2sen(\theta t))\} = \frac{C}{1+a+b},$$

implica em que

$$r^t(A_1cos(\theta t) + A_2sen(\theta t)) \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty.$$

Porém, essa última implicação é válida se e somente se $\lim_{t\to\infty} r^t = 0$.

De fato, se $\lim_{t\to\infty} r^t = 0$, como

$$|r^t||(A_1cos(\theta t) + A_2sen(\theta t))| \leq |r^t|(|(A_1cos(\theta t)| + |A_2sen(\theta t))| \leq |r^t|(|A_1| + |A_2|),$$

segue que

$$r^t(A_1cos(\theta t) + A_2sen(\theta t)) \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty.$$

Por outro lado, se esse último limite é zero, temos, tomando a sequência $t_n = \frac{2n\pi}{\theta}$, que

$$r^{t_n}(A_1cos(2n\pi) + A_2sen(2n\pi)) = r^{t_n}A_1 \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

portanto, $r^t \longrightarrow 0, \quad t \longrightarrow \infty$, *o que nos leva a que* $r < 1$.

Porém, se $r < 1$, *temos* $r = \sqrt{b} < 1 \Longrightarrow b < 1 \Longrightarrow 1 - b > 0$. *E, portanto, a última condição está garantida.*

$(\Longleftarrow)$ *Supondo as três condições válidas, isto é,*

$$1 + a + b > 0, \quad 1 - a + b > 0 \quad e \quad 1 - b > 0,$$

é trivial mostrar que todas as raízes de $f(\lambda)$ *são, em valor absoluto, menores do que 1 e* $r < 1$. *Em vista disso, as soluções gerais convergem para a solução de equilíbrio, nesse caso, estável.*

■

Uma aplicação das equações de diferenças finitas de segunda ordem

Segundo Franklin Serrano,

> *... o estudo do papel dual do investimento requer que tratemos o investimento não como autônomo e exógeno mas como sendo induzido pelo chamado princípio de ajuste do estoque de capital, através do qual o investimento vai ajustando a capacidade produtiva da economia à evolução da demanda efetiva. (Serrano:2004,p.2).*

Dessa forma, consideramos $I_{t+1} = K^d - K_t$, *onde* K^d *é o capital desejado. Naturalmente esse capital desejado é uma aproximação para um nível considerado ótimo em relação ao comportamento da demanda. Logo, supondo temporariamente expectativas adaptativas, temos* $K^d = \beta v Y^e_{t+1} = \beta v Y_t$, *onde v é a razão entre capital e produto potencial e* $0 < \beta \leq 1$. *Em vista disso, temos as seguintes definições:*

Definição 4.0.2 **Acelerador rígido** *Dizemos que o sistema possui um acelerador rígido quando* $\beta = 1$. *Nesse caso o investimento produtivo responde integralmente à variação do nível da demanda agregada, ou seja,* $I_t = v\Delta Y_{t-1}$.

Definição 4.0.3 **Acelerador flexível** *O sistema possui acelerador flexível quando* $0 < \beta < 1$. *Nesse caso o investimento produtivo responde em menor grau a uma variação da demanda, ou seja,* $I_t = \beta v \Delta Y_{t-1} < v\Delta Y_{t-1}$.

A idéia do acelerador flexível significa, em outro aspecto, considerar que as expectativas sejam parcialmente adaptativas, na medida em que a demanda esperada não é exatamente a demanda observada em período anterior, mas uma fração que pode aumentar de forma gradual. Esse conceito é mais realista uma vez que a um aumento da demanda, os investidores tendem *a não reagir prontamente com a mesma intensidade. Isso porque sempre existe a possibilidade de esse aumento ser um choque passageiro e, então, o investimento, para suprir totalmente esse aumento da demanda, resultaria em prejuízos futuros.*

O próximo resultado implica na necessidade de que o acelerador seja flexível, considerando a indução via ajuste ao estoque de capital, para que em nível seja mantida a estabilidade do modelo.

Teorema 4.0.2 *Considerando as seguintes hipóteses em um modelo, com multiplicador Keynesiano, que descreve o processo de acumulação de capital:*

1. *Presença de gastos autônomos na demanda agregada.*
2. *Investimento líquido determinado pelo processo pelo qual as firmas tentam adequar o estoque de capital fixo existente ao desejado:* $I_t = \beta v \Delta Y_{t-1}$, *com* $0 < \beta \leq 1$.
3. $v > 1$ [2].

Então existe uma solução estável se e somente se, $\beta < \frac{1-c}{v} < 1$, *onde* $0 < c < 1$, *considerada constante, é a propensão marginal a consumir.*

Prova: *Considere um sistema econômico fechado, liderado pela demanda, onde tenhamos o equilíbrio entre DA e Y:*

$$Y = DA = Z + I + C = Z + I + cY \Longrightarrow Y = \frac{Z+I}{1-c}, \tag{4.10}$$

o investimento dado pela variação do estoque de capital:

$$I_t = K_t - K_{t-1}. \tag{4.11}$$

e ainda:

$$I_t = K^d - K_{t-1} = \beta v Y_{t-1} - \beta K_{t-1}. \tag{4.12}$$

Nessas condições, isolando K_t *em (4.11) e utilizando (4.12), temos:*

$$K_t = K_{t-1} + \beta v Y_{t-1} - \beta K_{t-1}.$$

Utilizando a equação (4.10) na expressão de K_t, *acima:*

$$K_t = K_{t-1} + \beta v Y_{t-1} - \beta K_{t-1} = K_{t-1} + \beta \left[v \frac{Z + I_{t-1}}{1-c} - K_{t-1} \right].$$

[2] O fato de a razão entre capital e produto potencial variar nesse intervalo, segundo Serrano(2004), é comprovado empiricamente. "... em todas as estimativas empíricas v costuma aparecer como um número bem maior do que a unidade (variando conforme época e país de um mínimo em torno de 2 e um máximo de mais de quatro)."(Serrano:2004, p.7)

Utilizando a equação(4.11) em I_{t-1} e considerando Z constante:

$$K_t = K_{t-1} + \beta\left[v\frac{Z + K_{t-1} - K_{t-2}}{1-c} - K_{t-1}\right].$$

de onde resulta:

$$K_t + \left[-1 + \beta - \frac{\beta v}{1-c}\right]K_{t-1} + \frac{\beta v}{1-c}K_{t-2} = \frac{\beta v}{1-c}Z,$$

que é uma expressão da forma $K_t + aK_{t-1} + bK_{t-2} = C$, caracterizando uma equação de diferenças finitas linear de segunda ordem.

Em acordo com o Teorema (4.0.1), demonstrado nas linhas anteriores, temos que essa equação a diferenças finitas apresenta uma solução de equilíbrio K^*, estável, se $b < 1$. No caso em questão temos: $b = \frac{\beta v}{1-c}$ e, como estamos supondo $v > 1$, segue que a única possibilidade para que a condição de estabilidade seja satisfeita, é a de que $0 < \beta < \frac{1-c}{v} < 1$.

Naturalmente se $0 < \beta < \frac{1-c}{v} < 1$, temos:

1. $1 + a + b = 1 + \left[-1 + \beta - \frac{\beta v}{1-c}\right] + \frac{\beta v}{1-c} = \beta - \frac{\beta v}{1-c} + \frac{\beta v}{1-c} = \beta > 0,$
2. $1 - a + b = 1 - \left[-1 + \beta - \frac{\beta v}{1-c}\right] + \frac{\beta v}{1-c} = 2 - \beta + \frac{\beta v}{1-c} + \frac{\beta v}{1-c} = 2 + \beta[\frac{2v}{1-c} - 1] > 2 + \beta.1 > 2 > 0,$
3. $1 - b = 1 - \frac{\beta v}{1-c} > 1 - \beta > 0,$

que são as três condições para que o sistema seja estável.

Logo, a partir da hipótese de que $v > 1$, para que o processo apresente um comportamento estável, o acelerador necessariamente tem que ser flexível. ■

Definições básicas sobre Sistemas Dinâmicos e estabilidade

Definição 4.0.4 **Sistemas Dinâmicos.** *Um sistema dinâmico contínuo pode ser descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ fornecendo um campo vetorial estacionário no espaço fase varrido pelas componentes do vetor x. Tais equações podem ser lineares ou não. Quando são lineares, diz-se que o sistema dinâmico é linear.*

Definição 4.0.5 **Sistemas Dinâmicos Autônomos** *Um sistema dinâmico contínuo descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias é autônomo se o tempo não aparece explicitamente nas equações. Equações não autônomas podem se tornar autônomas pela identificação do tempo como uma variável adicional governado pela equação $t = 1$.*

Considere, agora, um sistema dinâmico composto por equações diferenciais não lineares:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)),$$

e $\overline{x}$ *um ponto crítico do sistema, isto é,* $\overline{x}$ *é tal que* $f(\overline{x}) = 0$*, então:*

Definição 4.0.6 **Ponto crítico estável** *O ponto crítico* $\overline{x}$ *é estável se existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para qualquer* $0 < \delta < \varepsilon$*, temos que se* $x(o) \in B(\overline{x}, \delta)$*, então* $x(t) \in B(\overline{x}, \varepsilon)$*, para todo* $t > 0$*. Em outros têrmos, temos que* $\overline{x}$ *é estável se uma solução com condição inicial dada numa vizinhança desse ponto, a solução que passa por esse ponto, para todo* $t > 0$ *está também nessa vizinhança.*

Definição 4.0.7 **Ponto crítico assintoticamente estável** *Um ponto crítico se diz assintoticamente estável se além de estável* $\lim_{t\to\infty} x(t) = \overline{x}$*.*

Definição 4.0.8 **Ponto crítico marginalmente estável** *Um ponto crítico é marginalmente estável se é estável, mas não assintoticamente estável.*

Definição 4.0.9 **Ponto crítico instável** *Um ponto crítico é instável se para qualquer vinhança em torno desse ponto, existir pelo menos uma condição inicial de tal forma que a solução que passa por essa condição, a partir de um certo* $t > 0$*, sair da vizinhança do ponto crítico.*

Em um sistema dinâmico não linear, onde todas as equações são autônomas, um método de análise da estabilidade de pontos fixos - ou soluções constantes -, é feito através do processo de linearização do sistema, onde a parte linear definida por uma matriz com ordem dada pelo número de varíaveis que compõem o sistema, elevado ao quadrado, é diagonalizada no corpo dos números complexos. A análise dos autovalores dessa matriz dão as condições necessárias e suficientes para a estabilidade estrutural local dos pontos críticos.

A linearização de um sistema autônomo é feita considerando que, em linhas gerais, um sistema é definido da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... & = & ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} & = & f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

onde f_i *são funções diferenciáveis.*

Supondo primeiramente que S é composto apenas por uma equação temos:

$$S = \frac{dx}{dt} = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

com $f : R^n \longrightarrow R$. *Assim linearizar esse sistema* S, *significa linearizar a função f em torno de um dos seus zeros, ou melhor de um ponto crítico do sistema:* $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$. *A linearização de* f *nos dá:*

$$f(\overline{x_1}+y_1, \overline{x_2}+y_2, ..., \overline{x_n}+y_n) \simeq f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) y_1 +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_1} f(\overline{x_2}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) y_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) y_n.$$

ou em notação matricial:

$$f(\bar{x}+y) \simeq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T y,$$

$$\text{onde} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ ... \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} \quad \nabla f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\bar{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(\bar{x}) \\ ... \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(\bar{x}) \end{bmatrix}.$$

Considerando, agora, um sistema com n equações teremos n funções $f_i : R^n \longrightarrow R$, *para* $i = 1, 2, 3, ..., n$, *por hipótese, diferenciáveis. A linearização dessas funções é descrito da seguinte forma:*

$$f_1(\bar{x}+y) \simeq f_1(\bar{x}) + \nabla f_1(\bar{x})^T y$$
$$f_2(\bar{x}+y) \simeq f_2(\bar{x}) + \nabla f_2(\bar{x})^T y$$
$$..$$
$$f_n(\bar{x}+y) \simeq f_n(\bar{x}) + \nabla f_n(\bar{x})^T y,$$

ou em forma matricial:

$$F(\bar{x}+y) = (f_1(\bar{x}+y), f_2(\bar{x}+y), ..., f_n(\bar{x}+y)) \simeq F(\bar{x}) + Jy,$$

onde J é a matriz jacobiana de F avaliada em $\bar{x}$.

A partir da linearização do sistema, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.0.3 *Considerando um sistema de n equações diferenciais autônomo, onde a função* $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ *é analítica em torno do equilíbrio* $\bar{x}$, *temos:*

1. $\overline{x}$ *é assintoticamente estável se todos os autovalores,* λ_i*, de J possuírem parte real negativa:* $Re\{\lambda_i\} < 0, i = 1, ..., n$.

2. $\overline{x}$ *é instável se ao menos um autovalor de J possuir parte real positiva:* $Re\{\lambda_i\} > 0$ *para algum* $i = 1, 2, ..., n$.

3. *Se todos os autovalores de J possuírem parte real não-positiva,* $Re\{\lambda_i\} \leq 0, i = 1, ..., n$, *e pelo menos um possuir parte real nula, então o ponto de equilíbrio* $\overline{x}$ *pode ser estável, assintoticamente estável ou instável.*

Proposição 4.0.1 *Em um sistema de equações diferenciais de duas equações, temos que* $\overline{x}$ *é estável se e somente se o determinante da matriz jacobiana avaliada em* $\overline{x}$ *for estritamente positivo, isto é,* $Det(J) > 0$ *e o traço dessa matriz, no mesmo ponto avaliado, é estritamente negativo, ou seja,* $Tr(J) < 0$.

Exemplo de um sistema com solução estável

Vamos considerar o sistema descrito nesse capítulo, presente no trabalho de Serrano e Freitas(2013). Mostraremos que, sob uma determinada condição ele exibe um equilíbrio assitoticamente estável.

Considere, então:

$$S^* = \begin{cases} \dfrac{dh_t}{dt} & = & h_t\gamma(u_t - u_n) \\ \\ \dfrac{du_t}{dt} & = & u_t\big(g_z + \dfrac{h_t\gamma(u_t - u_n)}{s - h_t} - \dfrac{h_t}{v}u_t + \delta\big) \end{cases} \tag{4.13}$$

Observe primeiramente que esse sistema define, a priori, dois pontos críticos, isto é pontos que satisfazem $\big(\dfrac{dh_t}{dt} = 0, \dfrac{du_t}{dt} = 0\big)$, *também chamados de soluções constantes. O primeiro é o ponto crítico trivial,* $(h^* = 0, u^* = 0)$. *Contudo, essa solução constante define uma situação que, em termos econômicos, se configura em uma situação irrealista uma vez que apresenta uma solução de equilíbrio onde o nível de produto e investimento produtivo são nulos. Além disso, é fácil verificar que essa solução é um ponto de sela para o sistema, que divide o espaço em duas variedades: uma estável e outra instável, não sendo, portanto, um atrator. Além disso é um ponto de equilíbrio instável.*

Dessa forma, considerando $h^* > 0$, *temos que* $u_t = u_n > 0$, *anula a equação definida por* $\dfrac{dh_t}{dt}$. *Observe que* u_n *é um valor definido exogenamente, isto é, não depende do mecanismo do* *processo de acumulação de capital. Antes, a necessidade de se manter o grau de utilização da capacidade próximo a esse valor, é que define a variação da propensão marginal a investir e então o possível ajuste do processo em direção a um equilíbrio.*

Substituindo, agora, u_t *por* u_n *e* h_t *por* h^* *na primeira equação de* S^*, *temos, uma vez que* $u_n > 0$ *e* $h^* > 0$, *que*

$$0 = \frac{du_t}{dt} = u_n\big(g_z + \frac{h^*\gamma(u_n - u_n)}{s - h^*} - \frac{h^*}{v}u_n + \delta\big) = u_n\big(g_z - \frac{h^*}{v}u_n + \delta\big),$$

e então,

$$h^* = \frac{v}{u_n}(g_z + \delta).$$

Assim obtemos a solução constante $(h^* = \frac{v}{u_n}(g_z + \delta), u^* = u_n)$, *para o sistema, com relevante significância ecônomica tendo em vista que a partir da substituição dessa solução nas equações:*

$$\begin{cases} g_{y_t} &= g_z + \dfrac{h_t\gamma(u_t - u_n)}{s - h_t} \\ g_{k_t} &= \dfrac{h_t}{v}u_t - \delta \\ g_{i_t} &= g_{y_t} + \gamma(u_t - u_n) \end{cases}$$

obtemos, em equilíbrio:

$$g_y = g_i = g_k = g_z,$$

ou seja, para uma dada taxa de crescimento dos gastos autônomos g_z*, em situação de equilíbrio as taxas de crescimento do produto, do investimento produtivo e da capacidade produtiva se igualam a essa taxa de crescimento dos gastos autônomos. Logo a trajetória de crescimento econômico, em torno de um grau de utilização da capacidade normal, apresenta a característica máxima do modelo: o crescimento econômico é liderado pela demanda via componente referente aos gastos autônomos, determinando uma trajetória sustentável.*

Vejamos agora, uma condição suficiente para que o ponto crítico, $(h^* = \frac{v}{u_n}(g_z + \delta), u^* = u_n)$, *seja um atrator localmente estável para o sistema definido em (4.13).*

Proposição 4.0.2 *Para que a solução constante* $(h^* = \frac{v}{u_n}(g_z + \delta), u^* = u_n)$, *do sistema definido em (4.13), seja um atrator localmente estável é necessário e sufuciente que* $h^* + c + \gamma v < 1$.

Nota: *Aqui é necessário que* γ *seja suficientemente pequeno para que* $\gamma v < 1$, *uma vez que* $v > 2$. *Confirma-se então a condição necessária de que o acelerador do investimento produtivo seja flexível.*

Prova: *Para mostrar essa proposição, vamos usar o Teorema e a Proposição (4.0.3) des-*

critos nas linhas anteriores, que define as condições para que um ponto crítico de um sistema de equações diferenciais autônomo, seja um atrator localmente estável.

Vale ressaltar que um ponto crítico de um sistema de equações diferenciais é um atrator localmente estável se dadas condições iniciais (h_o, u_o) *suficientemente próximas de* (h^*, u_n), *então a curva solução que passa por* (h_o, u_o), *convergirá para o referido ponto crítico. Além disso, pertubações pequenas no sistema - mais especificamente na taxa de crescimento dos gastos autônomos-, dentro do limite definido pela condição de estabilidade, produzirá novos pontos críticos suficientemente próximos ao ponto crítico* (h^*, u_n). *Particularmente nesse sistema, como o ajuste se dá via propensão marginal a investir* h, *pequenas mudanças na taxa de crescimento dos gastos autônomos, produzirá novos pontos críticos, com nova componente* h^{**}, *próximas a* h^*, *e o mesmo grau de utilização normal.*

Dessa forma, usando o Teorema (4.0.3), temos que a solução é um atrator localmente estável se a matriz jacobiana do sistema, obtida a partir da linearização de primeira ordem do sistema e avaliada no ponto referido ponto crítico, apresente autovalores com parte real negativa. No caso de um sitema de apenas duas equações e duas incógnitas, a condição de autovalores com parte real negativa é equivalente a que o traço da matriz seja negativo e seu determinante seja positivo.

Vejamos então a obtenção da matriz jacobiana relativa às funções que definem o sistema. Em linhas gerais o sistema, não considerando a variável tempo nas funções f *e* g, *é definido da seguinte forma:*

$$G = \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = g(h,u) \\ \\ \dfrac{du}{dt} = f(h,u) \end{cases} \tag{4.14}$$

Nessas condições, a matriz jacobiana, parte linear do sistema linearizado é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial h} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial h} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix}$$

Assim, no sistema definido pelo modelo do supermultiplicador Sraffiano de Freitas e Serrano (2013), a matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \gamma(u_t - u_n) & h_t\gamma \\ \\ u_t\big(\frac{\gamma(u_t-u_n)}{(s-h_t)} + \frac{h_t\gamma(u_t-u_n)}{(s-h_t)^2} - \frac{u_t}{v}\big) & \big(g_z + \frac{h_t\gamma(u_t-u_n)}{s-h_t} - \frac{h_t}{v}u_t + \delta\big) + u_t\big(\frac{h_t\gamma}{s-h_t} - \frac{h_t}{v}\big) \end{bmatrix}$$

que avaliada no ponto crítico $(h^* = \frac{v}{u_n}(g_z+\delta), u^* = u_n)$, *resulta em:*

$$J_{|(h^*,u_n)} = \begin{bmatrix} 0 & h^*\gamma \\ \\ \frac{-u_n^2}{v} & \big(g_z - \frac{h^*}{v}u_n + \delta\big) + u_n\big(\frac{h^*\gamma}{s-h^*} - \frac{h^*}{v}\big) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Observe, contudo, que

$$\frac{\partial f}{\partial u}_{|(h^*,u_n)} = \big(g_z - \frac{h^*}{v}u_n + \delta\big) + u_n\big(\frac{h^*\gamma}{s-h^*} - \frac{h^*}{v}\big) = \big(g_z + \delta\big) - 2u_n\frac{h^*}{v} + u_n\big(\frac{h^*}{s-h^*}\big),$$

logo,

$$\frac{\partial f}{\partial u}_{|(h^*,u_n)} = \big(g_z + \delta\big)\frac{u_n}{v}\frac{v}{u_n} - 2u_n\frac{h^*}{v} + u_n\big(\frac{h^*\gamma}{s-h^*}\big) = u_n\frac{h^*}{v} - 2u_n\frac{h^*}{v} + u_n\big(\frac{h^*}{s-h^*}\big).$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial f}{\partial u}_{|(h^*,u_n)} = -u_n\frac{h^*}{v} + u_n\big(\frac{h^*\gamma}{s-h^*}\big) = -g_z - \delta + \big(\frac{u_nh^*\gamma}{s-h^*}\big).$$

que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f}{\partial u}_{|(h^*,u_n)} = -g_z - \delta + \big(\frac{u_nh^*\gamma + s\gamma u_n - s\gamma u_n}{s-h^*}\big) = -g_z - \delta + \frac{u_n\gamma(h^*-s)}{s-h^*} + \frac{s\gamma u_n}{s-h^*},$$

e então,

$$\frac{\partial f}{\partial u}_{|(h^*,u_n)} = \frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - g_z - \delta.$$

Nessas condições, reescrevemos a matriz jacobiana avaliada no ponto crítico:

$$J_{|(h^*,u_n)} = \begin{bmatrix} 0 & h^*\gamma \\ \\ \frac{-u_n^2}{v} & \frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - g_z - \delta \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Observe, agora, que o determinante da matriz jacobiana definida em (4.16), é dado por:

$$Det(J_{|(h^*,u_n)}) = \frac{u_n^2}{v}h^*\gamma = \frac{u_n^2}{v}\frac{v}{u_n}(g_z+\delta) = u_n(g_z+\delta) > 0.$$

Por outro lado, o traço dessa matriz é descrito por:

$$Tr(J_{|(h^*,u_n)}) = \frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - g_z - \delta.$$

Logo,

$$Tr(J_{|(h^*,u_n)}) < 0 \Longleftrightarrow \frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - g_z - \delta < 0 \Longrightarrow h^* + c + \gamma v < 1.$$

De fato, uma vez que $s = 1 - c$, *segue que:*

$$\frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - g_z - \delta \Longrightarrow \frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - (g_z + \delta)\frac{u_n}{v}\frac{v}{u_n} = \frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - h^*\frac{u_n}{v} < 0.$$

Como,

$$\frac{s\gamma u_n}{s-h^*} - u_n\gamma - h^*\frac{u_n}{v} < 0 \Longrightarrow \frac{s\gamma}{s-h^*} - \gamma - h^*\frac{h^*}{v} < 0,$$

temos:

$$\frac{s\gamma}{s-h^*} < \gamma\frac{v}{v} + \frac{h^*}{v} \Longrightarrow \frac{s\gamma}{s-h^*}v < \gamma v + h^*,$$

e então:

$$s\gamma v < \gamma v(s-h^*) + h^*(s-h^*) \Longrightarrow s(\gamma v - \gamma v - h^*) < h^*(-\gamma v - h^*),$$

e, portanto,

$$-s < -\gamma v - h^* \Longrightarrow s > \gamma v + h^* \Longrightarrow 1 - c > \gamma v + h^* \Longrightarrow h^* + c + \gamma v < 1.$$

Assim, fica demonstrado a proposição (4.0.2). ■

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] **Amadeo, E. J. (1986)** *Crescimento, Distribuição e Utilização da Capacidade Produtiva: um modelo neo-Steindliano. Pesquisa e Planejamento Econômico, v.16, n.3, p. 689-712.*

[2] **Araújo, C.H.V. (2013)** *Regime de Metas de Inflação para o Brasil. Série Perguntas mais Freqüentes. Banco Central - Brasília - DF.*

[3] **Bhaduri, A.; Marglin, S. (1990)** *Unemployment and the real wage: the economic basis for contesting political ideologies. Cambridge Journal of Economics, v. 14, p. 375-93.*

[4] **Barbosa, F. H. (2005)** *Apostila de Macroeconomia. Fundação Getúlio Vargas - São Paulo.*

[5] **Bortis, H. (1984)** *Employment in Capitalist Economy Jornal of Post Keynesiab Economics, v.6 , n.4.*

[6] **Carvalho,V. R. (2005)** *A restrição externa e a perda de dinamismo da economia brasileira: invetigando as relações entre estrutura produtiva e crescimento econômico. Tese de Mestrado - Faculdade de Economia e Contabilidade - USP, São Paulo.*

[7] **Cesaratto, S.; Serrano, F. ; Stirati, A. (2003)** *Technical Change, Effective Demand and Employment. Review of Political Economy, vol. 15, n. 1, pp. 33 52.*

[8] **Couto, M. (2011)** *Milagre Econômico: concentração da renda e retomada do crescimento no Brasil (1968-1973). Monografia de Graduação - Instituto de Economia, UFRJ, Rio de Janeiro.*

[9] **DeJuan, O. (2005)** *Paths of accumulation and growth: Towards a Keynesian longperiod theory of output. Review of Political Economy, Volume 17, Issue 2 April 2005, pages 231 - 252.*

[10] **Fagundes, L. S. (2005)** *Demanda Efetiva e Investimento, Taxas de Lucro e de Juros: Breve análise Sraffiana da Macroeconomia Pós-Keynesiana. Tese de Mestrado - Instituto de Economia, UFRJ, Rio de Janeiro.*

[11] **Freitas, F.; Dweck, E. (2011)** *The Pattern of Economic Growth of the Brazilian Economy 1970-2005: a demand-led growth perspective. mimeo - UFRJ- Rio de Janeiro.*

[12] **Freitas, F. (2014)** *Growth Rate and Level Effects, the Adjustment of Capacity to Demand and the SraffianSupermultiplier VII encontro internacional da AKB.*

[13] **Garegnani, P. (1992)** *Somes notes for an analysis of accumulation, in: J. Halevi, D. Laibman and E.J. Nell (Eds) Beyond the Steady State: A Revival of Growth Theory. St.Martin´s Press, New York.*

[14] **Garrido, V. (2007)** *Demanda Efetiva e Crescimento na Abordagem Sraffiana: Fundamentos Teóricos e Aplicações. Dissertação de Mestrado - Instituto de Economia, UFRJ, Rio de Janiero.*

[15] **Giambiagi, F; Alem, A. C. (2008)** *Finanças Públicas: teoria e prática no Brasil. 3ª Edição - Editora Campus - Rio de Janeiro.*

[16] **Gobetti, S. W. (2010)** *Política Fiscal e Sustentabilidade do Crescimento.Finanças Públicas - XV Prêmio Tesouro Nacional - Brasília.*

[17] Harrod, R. ([1939] 1970) Dynamic Theory in Sen (ed.)

[18] **Hobsbawm, E. (2005)** *Era dos Extremos: O breve século XX 1914-1991.Companhia das Letras, São Paulo.*

[19] **Kalecki, M. (1983)** *Teoria da dinâmica econômica. Abril Cultural, São Paulo.*

[20] **Paulani, L. M.; Braga, M. B. (2007)** *A nova contabilidade social, uma introdução à macroeconomia.* 3ª *edição - Editora Saraiva, São Paulo.*

[21] **Pivetti, M. (2008)** *Interest and inflation: some critical notes on the new consensus monetary policy model. Apresentado no Simpósio Internacional do Centro Celso Furtado - Perspectivas do Desenvolvimento para o Século XXI, Rio de Janeiro.*

[22] **Santiago, M.C. (2008)** *Uma análise Sraffiana do Modelo Steinliano-Kaleckiano de crescimento e distribuição Dissertação de Mestrado - Instituto de Economia, UFRJ, Rio de Janeiro.*

[23] **Serrano, F. (1995)** *Long period effective demand and the Sraffian supermultiplierContributions to Political Economy, 14, pp. 67 -90.*

[24] **Serrano, F. (1996)** *The Sraffian supermultiplier, tese de doutorado: Faculty of Economics and Politics, University of Cambridge.*

[25] **Serrano, F; Willcox, D. (2000)** *O Modelo dos dois hiatos e o supermultiplicador Revista de Economia Contemporânea. UFRJ- Rio de Janeiro.*

[26] **Serrano, F. (2004)** *Notas Sobre o Ciclo, A Tendencia e o Supermultiplicador. mimeo,IE-UFRJ. Rio de Janeiro*

[27] **Serrano, F. (2007)** *Acumulação de Capital, Convergência e Polarização: Notas Sobre o Curso de Teorias do Crescimento. Oficina Sobre Teorias do Desenvolvimento: Novas Visões e as Perspectivas para a América Latina e o Brasil. Novembro/2007. DF- Brasília.*

[28] **Serrano, F. (2008b)** *Acumulação de capital, poupança e crescimento. mimeo, IE-UFRJ. Rio de Janeiro.*

[29] **Serrano,F.; Freitas, F. (2010)** *O Supermultiplicador Sraffiano e o papel da Demanda Efetiva nos Modelos de Crescimento.*

[30] **Serrano, F. (2011)** *Observações sobre as Teorias do Crescimento. mimeo - IE - UFRJ - Rio de Janeiro.*

[31] **Serrano,F.; Freitas, F. (2013)** *Growth,Distribution and Effective Demand: the super-multiplier growth model alternative. Seminário de Pesquisa - IE - UFRJ - Rio de Janeiro.*

[32] **Serrano, F.; Medeiros, C. (2004)** *O Desenvolvimento Econômico e a Retomada da Abordagem Clássica do Excedente.Revista de Economia Política, vol. 24, n^o 2 (94), abril-junho. Rio de Janeiro*

[33] **Summa, R. F. (2010)** *Um modelo alternativo ao 'Novo Consenso"para economia aberta. Tese de Doutorado. Instituto de Economia - UFRJ - Rio de Janeiro.*

[34] **Summa, R. F. (2013)** *Apostila do curso de Macroeconomia II. Instituto de Economia - UFRJ - Rio de Janeiro.*

[35] **Summa, R. F.; Lucas, G. (2010)** *Estimativas de produto potencial para a economia brasileira: algumas observações críticas. III Encontro da Associação Keynesiana Brasileira(AKB).*

[36] **Summa, R.F.; Serrano, F. (2011)** *Política Macroeconômica, crescimento e distribuição de renda na Economia Brasileira dos anos 2000. IV Encontro Internacional da Associação Keynesiana Brasileira (AKB).*

[37] **Summa , R.F.; Serrano, F. (2012)** *A Desaceleração Rudimentar da Economia Brasileira desde 2011.Versão preliminar. Rio de Janeiro.*

[38] **Summa, R.F.; Serrano, F. (2014)** *Mundell-Fleming without the LM curve: the exogenous interest rate in an open economy. Review of Keynesian Economics, vol. 2 n.4.*

[39] **Trezzini, A. (1995)** *Capacity utilisation in the longo run and the autonomous components of aggregate demand. Contributions to Political Economy, 14, pp. 33-66.*

[40] **Trezzini, A. (1998)** *Capacity uytilisation in the logn run: some further considerations. Contributions to Political Economy, 17, pp. 53-67*

[41] **White, G. (2004)** *Demand-led growth and the classical approach to value and distribution: are they compatible? in Economic Growth and Distribution: On the Nature and Causes of the Wealth of Nations. Edward Elgar Cheltenham, UK Northampton, MA, USA .*

[42] **Zuben,V. (2007)** *Estudo da Estabilidade em Sistemas não Lineares. DCA-FEEC-Unicamp- Campinas.*