

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE ECONOMIA

GIL BRACARENSE LEITE

VALOR DE SHAPLEY APLICADO EM PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO

RIO DE JANEIRO

2017

GIL BRACARENSE LEITE

VALOR DE SHAPLEY APLICADO EM
PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Economia, Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências, em Economia.

Orientador: Alexandre Barros da Cunha

RIO DE JANEIRO

2017

FICHA CATALOGRÁFICA

L533 Leite, Gil Bracarense.
Valor de Shapley aplicado em problemas de alocação / Gil Bracarense Leite. –
2017.
181 p. ; 31 cm.

Orientador: Alexandre Barros da Cunha.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de
Economia, Programa de Pós-Graduação em Economia da Indústria e da
Tecnologia, 2017.

Bibliografia: f. 174 – 181.

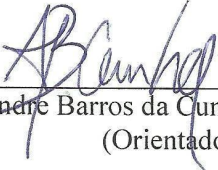
1. Valor de Shapley. 2. Problemas de alocação. 3. Meio ambiente. I. Cunha,
Alexandre Barros da, orient. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
Instituto de Economia. III. Título.

CDD 519.3

GIL BRACARENSE LEITE

VALOR DE SHAPLEY APLICADO EM PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO


Rio de Janeiro, 20, de fevereiro de 2017.



Alexandre Barros da Cunha, D. Sc., UFRJ
(Orientador)



Carlos Frederico Leão Rocha, D. Sc., UFRJ



Eduardo Pontual Ribeiro, D. Sc., UFRJ



José Gustavo Feres, D.Sc., IPEA



Wilson da Cruz Vieira, D.Sc., UFV

RESUMO

LEITE, Gil Bracarense. Valor de Shapley aplicado em problemas de alocação. Rio de Janeiro, 2017. Tese (Doutorado em Economia da Indústria e da Tecnologia) – Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

A existência de múltiplos agentes envolvidos nos problemas ambientais e a necessidade que eles negociem e coordenem suas ações abriram espaço para que fossem analisados por meio da teoria dos jogos cooperativos, onde o valor de Shapley é um conceito de solução que se destaca como método de alocação. Dessa forma, a presente Tese investiga como problemas de alocação relacionados a questões do meio ambiente podem ser solucionados cooperativamente pelo valor de Shapley. Para cumprir esse objetivo, a pesquisa se desenvolveu no formato de três artigos, que utilizam não só a metodologia do valor de Shapley, mas também reinterpretações e aprimoramentos da mesma – os jogos do aeroporto e do custo de infraestrutura. Antes, porém, são apresentados de forma acessória dois capítulos introdutórios que serão úteis para a compreensão do corpo da Tese. Em relação aos artigos, o primeiro artigo teve como objetivo utilizar o valor de Shapley na distribuição da compensação financeira que é paga aos municípios afetados pela construção de uma usina hidrelétrica (UHE). A distribuição atual da compensação financeira leva em conta apenas o critério da área inundada pelo reservatório, porém, muitos outros impactos decorrem da construção de UHEs e como não são considerados propôs-se um valor de Shapley que pode levar em conta conjuntamente diferentes critérios de alocação, sendo que cada critério tem um peso refletindo sua importância. Realizou-se um estudo de caso na UHE Itapebi, onde junto com a área inundada incluiu-se um critério chamado ônus adicionais, representando diversos outros impactos negativos. Foram simulados três cenários, sendo que os resultados indicam que a utilização apenas da área inundada pode ser um critério bastante restrito de distribuição da compensação financeira. O segundo artigo objetivou propor uma forma de alocar custos de projetos de despoluição na Baía de Guanabara entre os municípios que despejam esgotos sem tratamento em suas águas. Para esse objetivo utilizou-se o jogo do aeroporto, estrutura que modela os custos produzidos quando um conjunto de jogadores compartilha custos de construção, e o método de alocação adotado para distribuir os custos entre os municípios foi o valor de Shapley. Para a aplicação, foram empregados dados do Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM), o programa de despoluição atualmente em execução e que conta primordialmente com financiamento do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID). Ao realizar um exercício em que o ônus desse financiamento recai sobre os poluidores (os municípios), os resultados indicam como os custos deveriam ser compartilhados entre aqueles que não tratam seus esgotos domésticos. O terceiro artigo teve o objetivo de estudar o problema da alocação de custos dos consórcios públicos intermunicipais criados para gerenciar os serviços de resíduos sólidos urbanos. Foi empregado o jogo do custo de infraestrutura, classe de jogos que é utilizada em problemas de alocação de custos e modela custos de construção e manutenção produzidos quando um conjunto de jogadores de diferentes tipos faz uso de determinada infraestrutura. Estes jogos são estabelecidos como a soma do jogo do aeroporto (para custos de construção) e o jogo do custo de manutenção e utilizam o valor de Shapley como método de alocação entre os jogadores. Para a aplicação do modelo foram considerados dados do Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Estado do Rio de Janeiro (PERS/RJ), a respeito dos consórcios intermunicipais para tratamento e destinação de resíduos sólidos urbanos.

ABSTRACT

LEITE, Gil Bracarense. Valor de Shapley aplicado em problemas de alocação. Rio de Janeiro, 2017. Tese (Doutorado em Economia da Indústria e da Tecnologia) – Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

The existence of multiple agents involved in environmental problems and the need for them to negotiate and coordinate their actions opened space for them to be analyzed through cooperative game theory, where Shapley value is a solution concept that stands out as an allocation method. Thus, the present thesis investigates how allocation problems related to environmental issues can be solved cooperatively by the Shapley value. To meet this goal, the research was developed in the form of three papers, which use not only the Shapley value, but also reinterpretations and improvements of this methodology – like airport game and infrastructure cost game. Before, however, two introductory chapters are presented which will be useful for understanding the body of the thesis. In relation to the papers, the first aims to use the Shapley value to distribute the financial compensation that is paid to cities affected by the construction of a hydroelectric power station (HPS). The current distribution of compensation takes into account only the criterion of flooded area by the reservoir, however, many other impacts arise from the construction of HPS and since they are not considered was proposed a Shapley value that can take into account simultaneously different allocation criteria, where each criterion has a weight reflecting its importance. A case study was conducted at HPS Itapebi, where together with the flooded area was included a criterion called additional onus, representing many others negative impacts. Three scenarios were simulated by setting weights for the two criteria. The results indicate that the use of only the flooded area can be a very limited criterion for the distribution of financial compensation. The second paper proposes a way to allocate costs of pollution reduction projects in Guanabara Bay between the municipalities that throw untreated sewage into its waters. For this purpose was used the airport game, a structure that models costs produced when a group of players shares building costs, and the allocation method adopted to distribute costs among the municipalities was the Shapley value. For the application were used data from the PSAM, the pollution reduction program currently in progress and that is mostly funded by the Inter-American Development Bank (IDB). When doing an exercise in which the payment is made by the polluters (the municipalities), the results indicate how the costs should be shared among the municipalities that don't treat their sewage. The third paper had the objective of studying the problem of cost allocation of public intermunicipal consortia created to manage municipal solid waste services. It was used the infrastructure cost game, class of games that is used in cost allocation problems and model building costs and maintenance costs incurred when a set of players of different types makes use of a particular infrastructure. These games are established as the sum of airport game (used to building costs) and maintenance cost game, and use the Shapley value as allocation method among players. The data used to apply this model, regarding intermunicipal consortia for treatment and disposal of urban solid wastes, were taken from the Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Estado do Rio de Janeiro (PERS/RJ).

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO GERAL	8
CAPÍTULO 2 – INTRODUÇÃO AO VALOR DE SHAPLEY	11
1 Introdução	11
2 Jogos cooperativos: conceitos e definições	13
3 Conceitos de solução de jogos cooperativos	17
3.1 <i>Core</i>	18
3.2 Valor de Shapley	21
4 Exemplos e Aplicações	23
4.1 Exemplo: dilema dos prisioneiros	24
4.2 Exemplo: jogo de divisão do dólar	27
4.3 Aplicação: jogo de alocação de custos	30
4.4 Aplicação: jogos de votação	32
5 Considerações finais	35
6 Referências	36
ANEXOS	39
CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES DO VALOR DE SHAPLEY EM PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO: UMA REVISÃO DE LITERATURA	41
1 Introdução	41
2 Revisão de literatura: aplicações do valor de Shapley	43
2.1 Alocação do custo de um sistema regional de tratamento de esgoto	43
2.2 Jogo do aeroporto	46
2.3 Jogo do custo de infraestrutura	49
2.4 Jogo da rodovia	52
3 Considerações Finais	55
4 Referências	56
CAPÍTULO 4 – ARTIGO 1: UMA APLICAÇÃO DO VALOR DE SHAPLEY À DISTRIBUIÇÃO DA COMPENSAÇÃO FINANCEIRA HIDRELÉTRICA	59
1 Introdução	59
2 Metodologia	61
2.1 Teoria dos jogos cooperativos e valor de Shapley	61
2.2 Valor de Shapley aplicado à distribuição da compensação financeira hidrelétrica	65
2.3 Axioma da linearidade	66
2.4 Suposições sobre a função característica	67
3 A questão das usinas hidrelétricas	69
3.1 Conflitos e impactos negativos não considerados	69
3.2 Usina Hidrelétrica Itapebi	70
3.3 Fonte de dados	73
4 Resultados	74
4.1 Cenário 1: peso maior para o critério da área inundada	75
4.2 Cenário 2: peso maior para o critério dos ônus adicionais	77
4.3 Cenário 3: peso igual para os critérios da área inundada e dos ônus adicionais	79

4.4 Discussão sobre os resultados e o método proposto	81
5 Considerações Finais	84
6 Referências	86
ANEXOS	90
CAPÍTULO 5 – ARTIGO 2: ALOCAÇÃO DOS CUSTOS DE PROJETOS DE DESPOLUIÇÃO ENTRE OS MUNICÍPIOS DA BAÍA DE GUANABARA	102
1 Introdução	102
2 Metodologia	104
2.1 Valor de Shapley	104
2.2 Jogo do aeroporto para alocação de custos	107
3 Baía de Guanabara	112
3.1 Características da área	112
3.2 Fonte de dados	115
4 Resultados	117
4.1 Alocação de custos: caso geral	117
4.2 Alocação de custos: comparação com os dados do Instituto Trata Brasil	120
4.3 Alocação de custos: valores do Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM)	122
5 Considerações Finais	123
6 Referências	125
ANEXOS	128
CAPÍTULO 6 – ARTIGO 3: JOGO DO CUSTO DE INFRAESTRUTURA APLICADO À ALOCAÇÃO DOS CUSTOS DE GESTÃO DOS RESÍDUOS SÓLIDOS URBANOS	132
1 Introdução	132
2 Metodologia	135
2.1 Jogo do custo de infraestrutura	135
2.2 Valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura	140
3 Consórcios públicos intermunicipais de gestão de RSU no Estado do Rio de Janeiro	143
3.1 Fonte de Dados	146
3.2 Rateio dos custos dos consórcios intermunicipais conforme proposto no PERS/RJ	148
4 Estudo de Caso: Consórcio Sul Fluminense	149
4.1 Valor de Shapley do jogo do aeroporto (VSA) e valor de Shapley do jogo do custo de manutenção (VSM) para o Consórcio Sul Fluminense	152
4.2 Valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura (VSI) e comparação com os resultados do Rateio Atual para o Consórcio Sul Fluminense	153
5 Considerações Finais	155
6 Referências	157
ANEXOS	161
CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO GERAL	167
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	174

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

Um dos conceitos de solução mais difundidos dos jogos cooperativos é o valor de Shapley, método de alocação que prescreve um valor único para cada jogador envolvido em uma situação de cooperação. Por se basear em axiomas relativamente simples e ser um conceito de solução de fáceis entendimento e computação em comparação a outras soluções cooperativas, o valor de Shapley vem sendo aplicado em ampla variedade de contextos econômicos envolvendo problemas de alocação.

Um exemplo são os problemas econômicos relacionados a questões do meio ambiente. A existência de múltiplos agentes envolvidos nos problemas ambientais e a necessidade que eles negociem e coordenem suas ações, por vias próprias ou por determinação de uma autoridade, abriram espaço para que fossem analisados por meio da teoria dos jogos cooperativos. Apesar do amplo uso do valor de Shapley em problemas da economia do meio ambiente na literatura internacional, o mesmo não se verifica no Brasil, onde pesquisas semelhantes são escassas.

Dessa forma, esta Tese investiga como problemas de alocação relacionados a questões do meio ambiente podem ser solucionados cooperativamente pelo valor de Shapley. Para cumprir esse objetivo, a pesquisa se desenvolveu no formato de três artigos independentes, que utilizam não só a metodologia do valor de Shapley, mas também reinterpretações e aprimoramentos da mesma – como o jogo do aeroporto e o jogo do custo de infraestrutura – para melhor se adequar aos contextos estudados. Para que os artigos sejam compreendidos em sua plenitude apresentam-se também de forma acessória dois capítulos introdutórios. Um deles tem o objetivo de detalhar os conceitos e características da teoria dos jogos cooperativos e em especial do valor de Shapley, descrevendo as propriedades que o credenciam como um

importante conceito de solução cooperativa a ser utilizado na análise de problemas econômicos. Ademais, foram apresentados exemplos simples de jogos de forma a introduzir o conhecimento sobre os conceitos de solução cooperativa. O outro capítulo introdutório tem como objetivo fornecer uma revisão de literatura em relação a aplicações do valor de Shapley. Como esta literatura é bastante ampla, concentrou-se em analisar contribuições relevantes para o problema de alocação de custos, onde aplicações do valor de Shapley encontraram vasto campo.

Em relação aos três artigos que compõem a essência da Tese, o primeiro teve como objetivo utilizar o valor de Shapley na distribuição da compensação financeira que é paga aos municípios afetados pela construção de uma usina hidrelétrica (UHE). A distribuição atual da compensação financeira leva em conta apenas o critério da área inundada pelo reservatório, porém, muitos outros impactos decorrem da construção de UHEs e como não são considerados propôs-se um valor de Shapley que pode levar em conta conjuntamente diferentes critérios de alocação, sendo que cada critério tem um peso refletindo sua importância. Realizou-se um estudo de caso na UHE Itapebi, onde junto com a área inundada incluiu-se um critério chamado ônus adicionais, representando diversos outros impactos negativos. Foram simulados três cenários, sendo que os resultados indicam que a utilização apenas da área inundada pode ser um critério bastante restrito de distribuição da compensação financeira. Outros critérios podem ser incluídos e, para isso, o valor de Shapley representa uma proposta efetiva.

O segundo artigo objetivou propor uma forma de alocar custos de projetos de despoluição na Baía de Guanabara entre os municípios que despejam esgotos sem tratamento em suas águas. Para esse objetivo utilizou-se o jogo do aeroporto, estrutura que modela os custos produzidos quando um conjunto de jogadores compartilha custos de construção e o método de alocação adotado para distribuir os custos entre os municípios foi o valor de

Shapley. Para a aplicação, foram empregados dados do Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM), o programa de despoluição atualmente em execução e que conta primordialmente com financiamento do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID). Ao realizar um exercício em que o ônus desse financiamento recai sobre os poluidores (ou seja, os municípios), os resultados indicam como os custos deveriam ser compartilhados entre aqueles que não tratam seus esgotos domésticos.

O terceiro artigo teve o objetivo de estudar o problema da alocação de custos dos consórcios públicos intermunicipais criados para gerenciar os serviços de resíduos sólidos urbanos. Emprega-se o jogo do custo de infraestrutura, classe de jogos que é utilizada em problemas de alocação de custos e modela custos de construção e manutenção produzidos quando um conjunto de jogadores de diferentes tipos faz uso de determinada infraestrutura. Estes jogos são estabelecidos como a soma do jogo do aeroporto (para custos de construção) e o jogo do custo de manutenção e utilizam o valor de Shapley como método de alocação entre os jogadores. Para a aplicação do modelo foram considerados dados do Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Estado do Rio de Janeiro (PERS/RJ), a respeito dos consórcios intermunicipais para tratamento e destinação de resíduos sólidos urbanos.

Visto isso, a Tese está organizada da seguinte forma. Uma parte introdutória, composta pela presente introdução geral e pelos capítulos 2 e 3. A parte principal da Tese, que engloba as três aplicações do valor de Shapley e estão nos capítulos 4, 5 e 6. Por fim, o capítulo 7 apresenta uma conclusão geral para o trabalho.

CAPÍTULO 2

INTRODUÇÃO AO VALOR DE SHAPLEY

1 Introdução

Os agentes econômicos têm a possibilidade de interagir estrategicamente em ampla variedade de formas e muitas delas estão sendo estudadas por meio da teoria dos jogos. Desde seu desenvolvimento formal a partir da segunda metade do século XX, a teoria dos jogos vem ganhando importância cada vez maior, e novas abordagens têm possibilitado sua aplicação não somente no campo da economia, mas também em diversas outras áreas.

Segundo Osborne e Rubinstein (1994), um jogo é definido como a descrição de um processo de interação estratégica entre agentes racionais, sendo que sua abordagem teórica pode ser dividida em jogos não cooperativos e jogos cooperativos. De acordo com Montet e Serra (2003), em um jogo não cooperativo a única coalizão que de fato pode se formar é a que envolve o conjunto de todos os jogadores. Além disso, como por definição os jogadores não se comunicam, há uma dificuldade em se manter acordos, ou, sob outra ótica, existe uma tentação em burlá-los. Por sua vez, nos jogos cooperativos considera-se que: é possível haver negociação entre jogadores; quaisquer coalizões intermediárias podem se formar – em que uma coalizão é um subconjunto não vazio do conjunto de jogadores; e os jogadores são capazes de se comprometer a seguir um curso de ações tão logo tenham alcançado um acordo.

Myerson (1991) explica que a possibilidade efetiva de existência de negociações entre coalizões de jogadores é a hipótese crucial que distingue jogos cooperativos dos não cooperativos¹. Afirmar que os integrantes de uma coalizão podem efetivamente negociar, significa dizer que se houvesse uma mudança factível nas estratégias dos seus membros que

¹ Conforme explicam Montet e Serra (2003), também é possível haver negociação em jogos não cooperativos, como a solução de barganha de Nash para n pessoas. Porém, a única coalizão que pode efetivamente negociar é a grande coalizão. Já nos modelos cooperativos gerais de n pessoas, assume-se que todas as coalizões intermediárias podem efetivamente negociar.

beneficiasse a todos, então eles concordariam em realizá-la. Nos jogos cooperativos os jogadores podem conversar entre si para chegarem a um acordo e, o que é mais importante, esses acordos são respeitados.

Um conhecido exemplo de jogo não cooperativo, o dilema dos prisioneiros, mostra de forma clara que quando não há estímulo para os jogadores adotarem uma estratégia cooperativa o resultado final é ineficiente. E caso os jogadores celebrassem um acordo, ambos teriam incentivo para burlá-lo, ou seja, há uma dificuldade em convencê-los a tornar a cooperação viável. São exatamente essas limitações que podem ser superadas pelas características do jogo cooperativo.

Um conceito de solução de destaque dos jogos cooperativos foi apresentado por Shapley (1953). De forma resumida, Serrano (2012) define o valor de Shapley como uma solução que prescreve um *payoff* único para cada jogador envolvido em uma situação de cooperação. Por se basear em axiomas relativamente simples, ser um conceito de solução de fácil entendimento e com vastas possibilidades de aplicação, o valor de Shapley se credencia como uma boa referência para ilustrar as características de um jogo cooperativo, bem como seus diferenciais frente às soluções não cooperativas.

Existem vários trabalhos que buscam apresentar de forma introdutória os jogos não cooperativos, dentre os quais se podem citar Dixit e Nalebuff (1991), Dixit, Skeath e Reiley Jr. (2004), e McMillan (1992). Como houve dificuldade em encontrar algo similar para a abordagem cooperativa, o presente capítulo tem como objetivo fazer um esforço inicial de popularização dos jogos cooperativos, apresentando-o de forma didática e minuciosa, com foco especial no conceito de solução do valor de Shapley, que tem suas propriedades descritas em detalhes. Para cumprir esse objetivo são apresentados exemplos teóricos – dilema dos prisioneiros e jogo de divisão do dólar – que podem ser resolvidos tanto cooperativamente quanto não cooperativamente, possibilitando uma comparação direta entre as duas

abordagens. Além disso, são descritas tradicionais aplicações do valor de Shapley em problemas práticos – jogos de alocação de custos e jogos de votação – de forma a aprofundar a compreensão sobre este conceito de solução e, como texto introdutório, lançar luz para futuras aplicações.

Após esta introdução, o capítulo está organizado da seguinte maneira. A seção 2 apresenta as principais definições necessárias para a compreensão dos jogos cooperativos. A seção 3 detalha o valor de Shapley. A seção 4 mostra exemplos em que é possível comparar jogos cooperativos e não cooperativos, além de apresentar casos de aplicação do valor de Shapley. Por fim, a seção 5 traz as conclusões obtidas.

2 Jogos cooperativos: conceitos e definições

A cooperação entre os jogadores ou a formação de coalizões é um caminho para se alcançar resultados mais eficientes em negociações. Mas porque alguns jogadores se associariam? A justificativa para a existência de coalizões, segundo Aliprantis e Chakrabarti (2000), está no fato de que as alternativas propostas e implementadas por seus membros podem garantir a eles *payoffs* maiores do que receberiam caso não se associassem a nenhum outro jogador, indicando que existem ganhos ao se formar uma coalizão. Ademais, diferente dos jogos não cooperativos, na cooperação há a premissa de que os jogadores podem conversar entre si para buscar acordos, o que faz toda diferença no processo de negociação.

Ainda que favoreçam as negociações, a existência de coalizões traz desafios ao estudo dos jogos cooperativos, pois, como explicam Montet e Serra (2003), dificuldades naturais surgem devido ao fato de tratarem simultaneamente de várias questões, tais como: o processo de formação de uma coalizão (quais coalizões irão se formar?), a estabilidade de coalizões que enfrentam a entrada e/ou saída de jogadores e a alocação do excedente da cooperação entre os membros de uma coalizão em problemas de partilha de recursos.

Existem diferentes formas de representação de jogos. Como se vê em Gibbons (1992), as mais comuns são as formas normal e extensiva, usuais em jogos não cooperativos. A forma normal é a representação para jogos simultâneos indicada em uma matriz de ganhos que mostra as estratégias disponíveis e o *payoff* recebido pelos jogadores em cada combinação de estratégias que poderia ser escolhida por eles. A forma extensiva é a representação para jogos sequenciais indicada no formato de uma árvore, em que as ramificações simbolizam as opções de movimento dos jogadores. Na forma extensiva, são de comum conhecimento tanto os movimentos anteriores ao se decidir pelo próximo passo, quanto os *payoffs* resultantes de cada possível combinação de movimentos².

Já a representação do jogo cooperativo se dá por meio da chamada função característica, que é a forma pela qual se indica o valor de cada coalizão e se descrevem as possibilidades de cooperação. De acordo com Mas-Colell et al. (1995), a função característica apresenta uma descrição dos *payoffs* disponíveis para diferentes grupos de jogadores em um contexto onde acordos de compromisso entre eles são viáveis, o que é exatamente a essência da cooperação.

Para caracterizar um jogo cooperativo, algumas definições iniciais devem ser apresentadas. Seja $N = \{1, \dots, n\}$ um conjunto finito que representa o universo de jogadores, conhecido como grande coalizão. Cada subconjunto finito e não vazio de N é chamado de coalizão. Para cada coalizão S , especifica-se um conjunto $v(S) \subset \mathbb{R}^S$ contendo vetores de *payoff* de s dimensões que são viáveis para a coalizão S . Tem-se que v é exatamente a função característica que designa um número real $v(S)$ para cada coalizão S , com $v(N)$ indicando o valor da grande coalizão e $v(\emptyset) = 0$ ³. Visto isso, um jogo cooperativo pode ser representado

² Gibbons (1992) afirma que essa separação é uma forma didática de simplificar a análise, mas, qualquer jogo pode ser representado na forma normal ou extensiva, embora sempre haja alguma mais conveniente.

³ Recordar-se que enquanto a indicação de um conjunto se dá por letra maiúscula, S , o número de elementos desse conjunto, s , é indicado por letra minúscula. De modo que $S = \{1, \dots, s\}$.

de forma resumida por (N, v) onde N é o conjunto de jogadores e v é a função característica que associa um número real $v(S)$ com cada subconjunto S de N .

Sobre $v(S)$, o valor da coalizão, Montet e Serra (2003) afirmam que ele representa o máximo *payoff* que os membros de S poderiam garantir independentemente das ações dos membros fora da coalizão, ou seja, assume-se que as ações tomadas pelos jogadores em $N \setminus S$ não podem impedir S de alcançar os vetores de *payoff* em $v(S)$. Roth (1988) lembra que $v(S)$ é exatamente a quantia que os integrantes de S dividirão entre eles, sendo que essa partilha pode acontecer de qualquer modo viável.

Uma importante restrição sobre a função característica v é que ela seja superaditiva (ou, equivalentemente, subaditiva se for uma função custo). De acordo com Roth (1988), jogos superaditivos são aqueles em que tudo que duas coalizões podem fazer de forma independente, a união delas pode fazer também, ou seja: $\forall S, T \subset N, S \cap T = \emptyset$, então $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. Montet e Serra (2003) afirmam que uma consequência da superaditividade é que é possível encontrar no conjunto viável de alocações da grande coalizão, uma alocação de *payoffs* que seja Pareto eficiente. Portanto, em jogos superaditivos, o princípio da eficiência força a cooperação total⁴.

Segundo Myerson (1991), uma vez que as interações entre as diferentes coalizões em jogos com n jogadores podem ser extremamente complexas (um jogo com $N = \{1, \dots, n\}$ jogadores tem $2^n - 1$ coalizões possíveis), a suposição simplificadora da utilidade transferível é utilizada nas análises dos jogos cooperativos representados na forma de função característica. O conceito de utilidade transferível assume a existência de um numerário, normalmente o dinheiro, que pode ser transferido livremente entre os jogadores, de modo que

⁴ Peleg e Sudholter (2007) lembram, todavia, que em certos contextos a superaditividade é violada. No caso de empresas, por exemplo, leis antitrustes podem existir, o que reduz os lucros de $S \cup T$. Além disso, coalizões muito grandes podem ser ineficientes, porque é mais difícil alcançar acordos sobre a distribuição de *payoffs*.

o *payoff* de um jogador aumenta em uma unidade para cada unidade de numerário que ele recebe.

Roth (1988) explica que isso significa que o *payoff* total da coalizão pode ser definido, simplesmente, como a soma dos *payoffs* de seus membros. Exatamente devido à suposição da utilidade transferível é que as possibilidades cooperativas de um jogo podem ser descritas por uma função característica v que designa um único número $v(S)$ para cada coalizão S , número esse suficiente para descrever as alocações que podem ser obtidas pelos seus membros. Problemas de alocação de custo, ou qualquer outra barganha de valores monetários, são típicos exemplos de jogos de utilidade transferível, em que o valor pode ser livremente negociado entre os jogadores. Foi Aumann (1960) quem formalizou o conceito ao mostrar que utilidade transferível significa que a utilidade de cada jogador é uma função linear da quantidade de dinheiro.

De acordo com Peleg e Sudholter (2007), visto que as funções de utilidade dos jogadores são lineares e aumentam com o dinheiro, quando uma coalizão S se forma ela pode dividir o valor $v(S)$ entre os seus membros de qualquer forma viável, ou seja, as transferências entre jogadores são irrestritas já que $v(S)$ é simplesmente a soma de vários valores monetários.

Deve-se observar que apesar de ser mais prático modelar situações como se fossem de utilidade transferível, esta é uma suposição forte que pode em algumas ocasiões obscurecer características do ambiente econômico. Para superar essas limitações a teoria dos jogos tem se preocupado também com os jogos de utilidade não transferível, que fogem do escopo deste trabalho, mas, podem ser vistos por exemplo em Aumann e Peleg (1960), que introduziram a questão, e em Peleg e Sudholter (2007).

As considerações vistas até aqui – cruciais para a compreensão dos jogos cooperativos e do valor de Shapley – devem muito ao trabalho de Jon von Neumann e Oskar Morgenstern

que lançaram a maioria dessas bases na obra *Theory of Games and Economic Behavior*, de 1944. Como o próprio Shapley (1953) destaca, embora seu trabalho seja matematicamente autossuficiente, do ponto de vista conceitual ele tem seu fundamento na teoria de von Neumann e Morgenstern, dos quais herdou justamente as hipóteses vistas anteriormente: (i) a utilidade é transferível; (ii) os jogos são cooperativos; (iii) dado (i) e (ii) os jogos podem ser representados de forma adequada por funções características. Roth (1988) também cita o pioneirismo de von Neumann e Morgenstern e destaca que eles mostraram de forma exitosa que uma coalizão pode determinar acordos para distribuir seu valor na forma combinada pelos seus membros, sem a necessidade de modelar explicitamente as ações que os jogadores devem tomar para a realização desses acordos.

Após a especificação dos conceitos iniciais da teoria dos jogos cooperativos, o passo seguinte consiste em buscar identificar qual será o resultado de um processo de negociação entre jogadores, ou seja, identificar os *payoffs* finais recebidos por cada jogador, o que demanda a presença de conceitos de solução.

3 Conceitos de solução de jogos cooperativos

Serrano (2012) explica que na maior parte dos problemas envolvendo negociações as soluções se sustentam na forma da grande coalizão, em que a cooperação total é alcançada, o que é uma consequência dos jogos superaditivos. Assumindo essa hipótese, um conceito de solução deve simplesmente designar vetores de *payoff* em $v(N)$ para cada jogo cooperativo (N, v) .

Os *payoffs* que cada jogador recebe podem ser encontrados seguindo uma abordagem positiva ou normativa. Montet e Serra (2003) afirmam que na ótica positiva o foco recai sobre as propriedades estratégicas de estabilidade das coalizões. Sob esse ponto de vista, os jogos cooperativos seriam parte de um estudo mais amplo sobre acordos diretos entre agentes

racionais negociando livremente. Por outro lado, na ótica normativa dos conceitos de solução a ênfase está nas propriedades das soluções que são atraentes de um ponto de vista ético. Sob essa visão, os jogos cooperativos são analisados como ferramenta para o estabelecimento do critério da justiça distributiva ou da equidade.

O *core* é um exemplo de solução positiva, enquanto o valor de Shapley é um exemplo de solução normativa. Contudo, mesmo que seja importante como fonte de conhecimento, Montet e Serra (2003) ressaltam que não se deve focar nessa separação, visto que não são necessariamente excludentes: considerações estratégicas podem estar presentes na interpretação normativa, assim como considerações de justiça e equidade na interpretação positiva.

3.1 Core

Ainda que o trabalho se concentre no valor de Shapley, é importante a título de comparação descrever o *core*. Montet e Serra (2003) afirmam que considerando os diversos conceitos de solução dos jogos cooperativos, possivelmente o *core* é o mais intuitivo e de mais fácil compreensão. De modo geral, uma vez que um acordo é alcançado no *core* nenhum jogador (ou conjunto de jogadores) pode se beneficiar se reagrupando, ou seja, a alocação de *payoff* encontrada via *core* é eficiente no sentido de Pareto.

Para definir formalmente o *core* apresenta-se os conceitos de imputação e relação de domínio. De acordo com Mas-Colell et al. (1995), as imputações são vetores de *payoff* naturalmente identificados para análise como o conjunto que contém todos os resultados razoáveis para um jogo cooperativo. Define-se uma imputação I em um jogo (N, v) , denotada por $I(N, v)$, como sendo um vetor de *payoffs* x que satisfaz as condições de racionalidade a seguir:

- i. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

ii. $x_i \geq v(\{i\}), \forall i$

A primeira condição, racionalidade do grupo, incorpora ao mesmo tempo os requisitos de que os membros da grande coalizão alcancem o resultado x (viabilidade): $\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$; e que não haja nenhum resultado melhor (eficiência de Pareto): $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$. A segunda condição, racionalidade individual, estabelece que a quantia alocada como *payoff* para qualquer indivíduo não deve ser menor do que ele ganharia atuando individualmente.

Por sua vez, a relação de domínio, conforme define Serrano (2012), refere-se ao poder que uma coalizão pode exercer por meio de sua habilidade de se manter, ou seja, de não ter seus resultados superados por nenhuma outra coalizão. Dessa forma, diz-se que x é dominado por y no âmbito da coalizão S se y é viável e proporciona maior *payoff* aos membros de S do que x . Formalmente, para $x, y \in I(N, v)$, y domina x via S se: $y > x$ e $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$. Quando y domina x significa que os membros de S podem melhorar seus *payoffs* por meio de seus próprios esforços.

Apresentados os conceitos de imputação e domínio tem-se, finalmente, a definição de *core*: o *core* de um jogo (N, v) é um subconjunto do conjunto de imputações $I(N, v)$ que não são dominadas.

Conforme Shapley (1971), o *core* é o conjunto de todos os *payoffs* viáveis para a grande coalizão sobre o qual nenhum indivíduo ou grupo pode melhorar. Ou seja, nenhum subconjunto de jogadores pode efetivamente reivindicar que eles obteriam resultados superiores atuando por conta própria. Segundo Osborne e Rubinstein (1994), um resultado do *core* é dito estável se nenhuma coalizão pode obter um resultado melhor para todos os seus membros. Caso contrário, se existe uma coalizão S que pode melhorar um determinado resultado, ele é considerado instável.

Deve-se ressaltar, entretanto, que para alguns jogos o *core* pode ser vazio. Serrano (2012) explica que um jogo com o *core* vazio deve ser entendido como uma situação de forte

instabilidade e vulnerabilidade dos *payoffs* propostos pela grande coalizão. Quando o *core* é vazio, Myerson (1991) afirma que não é possível esboçar qualquer conclusão sobre o jogo. Por outro lado, se o *core* consiste em um grande número de elementos, então também há dificuldade em indicar qualquer alocação em particular.

Conclui-se, então, que o *core* tem a importante propriedade da estabilidade, já que seus *payoffs* não podem ser superados, mas, apresenta as limitações citadas: pode ser um conjunto vazio ou pode indicar um conjunto muito grande de resultados, o que dificulta sua aplicação na predição da solução de um jogo. Nesses casos, Myerson (1991) afirma que seria desejável que um jogo na forma de função característica apresentasse como resultado uma alocação de *payoff* única para cada jogador. O valor de Shapley atende a esse requisito⁵.

Sobre a relação entre os dois conceitos de solução, Montet e Serra (2003) explicam que não obrigatoriamente o valor de Shapley precisa ser um membro do *core*, mesmo se o *core* não for vazio. Isso significa que o valor de Shapley pode fornecer uma alocação que não é estável. Entretanto, um tipo de jogo específico têm importantes propriedades que ajudam a superar essas limitações: os jogos convexos. Se o jogo for convexo o *core* é sempre não vazio e nesse caso foi mostrado por Shapley (1971) que o valor de Shapley não somente pertence ao *core* do jogo, como também é o centro de gravidade dos pontos extremos do mesmo⁶.

⁵ O *core* e o valor de Shapley são as soluções mais usadas nos jogos cooperativos, porém, não esgotam todas as possibilidades. Os conceitos de solução chamados de *like-core* objetivam superar algumas restrições do *core* e buscar avanços. Neste grupo se destacam *stable sets*, *kernel* e *nucleolus*. Do mesmo modo, extensões e aprimoramentos do valor de Shapley também foram apresentados, entre as quais se tem o valor de Shapley para jogos de utilidade não transferível e o valor de Aumann-Shapley para jogos com infinitos jogadores. Para mais detalhes, ver Myerson (1991) e Osborne e Rubinstein (1994).

⁶ Um jogo cooperativo (N, v) é dito ser convexo se $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \forall S, T \in N$. Segundo Shapley (1971), interpreta-se um jogo convexo como aquele em que os incentivos para se juntar a uma coalizão aumentam à medida que a coalizão cresce, de modo que se pode esperar um efeito que o autor chamou de “bola de neve”.

3.2 Valor de Shapley

Segundo Roth (1988), o valor de Shapley é um conceito de solução que resume as reivindicações conflitantes que cada jogador enfrenta em um jogo cooperativo por meio de um único número que representa exatamente o valor de jogar o jogo. De acordo com o próprio Shapley (1953), objetivando resumir as complexas possibilidades enfrentadas pelos jogadores num jogo na forma de função característica, ele se ateve à resolução representada por um valor único de problemas de alocação entre os agentes que fazem parte de um jogo, quando se leva em consideração o valor de cada coalizão S .

Shapley (1953), então, define o valor $\phi(v)$ do jogo v como sendo uma função que associa com cada jogador i em N , uma alocação de *payoff* representada por um número real $\phi_i(v)$ que deve atender as condições de quatro axiomas bastante simples e intuitivos:

A1: Eficiência. $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$. O axioma da eficiência diz que a soma das alocações de *payoffs* de todos os jogadores deve igualar $v(N)$, o valor total do jogo. Ou seja, a distribuição de *payoffs* se coloca na fronteira de bem-estar dos jogadores.

A2: Simetria. Para qualquer permutação π de v tem-se que $\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v)$, para todo i . Em que uma permutação π é uma função $\pi: N \rightarrow N$ que representa um rearranjo de jogadores. Isso significa que se houver um reordenamento de i no jogo, seu valor $\phi_i(v)$ não se altera, pois, o que importa na determinação do valor é como a função característica responde à presença de um jogador em uma coalizão. O axioma da simetria garante que jogadores tratados de forma idêntica pela função característica têm o mesmo valor.

A3: Aditividade. Para quaisquer jogos v e w , $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$ para todo i em N , em que o jogo $[v + w]$ é definido por $[v + w](S) = v(S) + w(S)$ para qualquer coalizão S . O axioma da aditividade diz que a solução para a soma de dois jogos deve ser igual à soma do que é recebido separadamente em cada um deles.

A4: Jogador *dummy*. Um jogador i é *dummy* se $v(S) - v(S - \{i\}) = v(\{i\})$ para cada coalizão S que i não faz parte, de modo que $\phi_i(v) = v(\{i\})$. Em que $v(S) - v(S - \{i\})$ é a contribuição marginal de i ao formar qualquer coalizão S , ou seja, é quanto ele acrescenta ao se unir a outros jogadores. O axioma do jogador *dummy* diz que se um jogador não contribui com nada adicional a uma coalizão (além do seu próprio valor), a solução lhe reservará apenas seu valor individual $v(\{i\})$.

Shapley (1953) demonstrou matematicamente que há um método de solução de valor único para jogos cooperativos de utilidade transferível satisfazendo esses quatro axiomas. É o que ficou conhecido como valor de Shapley, a função que designa para cada jogador i o *payoff*

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \times [v(S) - v(S - \{i\})], \forall i \in N, \quad (1)$$

onde n é o número de elementos do conjunto N de todos de jogadores, com $N = \{1, \dots, n\}$; s designa o número de jogadores na coalizão S ; e a expressão $v(S) - v(S - \{i\})$ representa a contribuição marginal do jogador i quando ele se associa a outros jogadores para formar a coalizão S . É notável, concluiu o próprio autor, que não é necessária nenhuma condição adicional, além desses axiomas relativamente simples, para determinar o valor de forma única.

Myerson (1991) e Roth (1988) utilizam uma alegoria para interpretar essa fórmula, imaginando uma situação em que se planeja juntar todos os jogadores em uma sala, com a ressalva de que apenas um entrará por vez. Os jogadores se alinharão aleatoriamente em uma fila em frente à porta, lembrando que para $N = \{1, \dots, n\}$ jogadores existem $n!$ formas diferentes deles se ordenarem nessa fila. Para qualquer conjunto S em que o jogador i não esteja contido, há $(s-1)!(n-s)!$ maneiras distintas de ordenar os jogadores, de tal modo que $(s-1)$ é o conjunto de jogadores que estão na fila à frente de i (e i se associará a eles) e $(n-s)$ os restantes que irão sucedê-lo. Dessa forma, se os vários ordenamentos são

considerados igualmente prováveis, $(s - 1)!(n - s)!/n!$ é a probabilidade de que, quando i entrar na sala, ele encontrará a coalizão $S - i$ à sua frente, sendo que nesse caso sua contribuição marginal para a coalizão $S - i$ (aqueles que já estão na sala) é $v(S) - v(S - \{i\})$.

Considerando a alegoria da entrada aleatória, o valor de Shapley $\phi_i(v)$ de um jogador pode ser interpretado como sendo a contribuição marginal esperada a cada coalizão que ele puder se associar. Assim, segundo Hart (1989), se for esperado que um indivíduo acrescente pouco (muito) às coalizões, então o *payoff* alocado a ele tende a ser pequeno (grande). Nesse sentido, o valor de Shapley é classificado como uma regra que busca dividir um excedente de forma justa entre os participantes, em que o conceito de justiça não é o de equidade, mas a ideia de que o *payoff* que o indivíduo recebe é determinado por sua contribuição⁷.

De acordo com Roth (1988), o valor de Shapley desde sua publicação em 1953 tem sido usado como conceito de solução em ampla variedade de contextos econômicos e despertado contínuo interesse dos estudiosos dos jogos cooperativos. Montet e Serra (2003) lembram que o valor de Shapley é uma medida relativamente fácil de computar e existe para todos os jogos cooperativos, o que é uma vantagem em relação ao *core*, que pode ser vazio. Para Hart (1989), a fórmula desenvolvida para o valor de Shapley é impressionante porque ela é consequência de axiomas básicos e porque a ideia de contribuição marginal na qual ela se baseia é fundamental em muitas análises econômicas.

4 Exemplos e Aplicações

A fim de compreender as características de uma solução cooperativa, esta seção apresenta exemplos de cálculo do valor de Shapley em problemas que também podem ser resolvidos não cooperativamente, possibilitando que as duas abordagens dos jogos sejam

⁷ O termo “justo” foi a tradução mais adequada que se encontrou para a palavra inglesa *fair*.

confrontadas. Os exemplos são relativamente simples, o dilema dos prisioneiros e o jogo da divisão do dólar, se adequando ao objetivo desse capítulo de introduzir de forma acessível os jogos cooperativos. Todavia, acredita-se que podem servir de ponto de partida para a análise de problemas mais complexos. Ademais, são apresentados também os jogos de alocação de custos e jogos de votação, aplicações tradicionais do valor de Shapley que podem contribuir para aprofundar a compreensão deste conceito de solução e vislumbrar futuras aplicações.

4.1 Exemplo: dilema dos prisioneiros

a) Jogo não cooperativo

Por ser bastante conhecido, o dilema dos prisioneiros é um bom começo para demonstrar os obstáculos que a não possibilidade de se buscar acordos traz ao resultado de um jogo não cooperativo. Um exemplo comum do dilema dos prisioneiros, adaptado de Osborne e Rubinstein (1994) e Myerson (1991), é na análise de cartéis. Duas empresas de um mesmo ramo montam um cartel para aumentar os lucros por meio de um acordo em que ambas manteriam elevados os preços de seus produtos. A matriz de ganhos e as possibilidades de estratégias estão na Tabela 1, que indica o lucro em milhões de dólares⁸. “*Cooperar*” significa manter um preço elevado e “*Não Cooperar*” significa reduzir o preço unilateralmente para capturar o mercado.

⁸ Para ler corretamente os ganhos do jogo deve-se lembrar que cada linha indica uma provável estratégia para a Empresa A e as colunas indicam o mesmo para B. O par de números dentro de cada quadrado da matriz deve ser interpretado da seguinte forma: o número à esquerda (o primeiro dentro de cada quadrado) indica o *payoff* de A e o número à direita (o segundo) indica o *payoff* de B.

Tabela 1 – O jogo do dilema dos prisioneiros

		Empresa B	
		Cooperar	Não Cooperar
Empresa A	Cooperar	6 ; 6	- 1 ; 8
	Não Cooperar	8 ; -1	0 ; 0

Se as empresas cooperarem cada uma terá um lucro de \$ 6 milhões. Contudo, elas não têm incentivos para cumprir o acordo do cartel⁹. Se a Empresa A cobrar um preço elevado (*Cooperar*), valerá a pena para B empreender uma política de redução de preços (*Não Cooperar*) para conquistar o mercado e obter lucros individuais maiores (\$ 8 milhões). Mas se B desconfia que A não vai cumprir o que foi acordado (ou seja, irá reduzir o preço), será melhor B também reduzir para não acabar com prejuízo de \$1 milhão. No fim, se ambas seguirem esse raciocínio, o único equilíbrio de Nash deste processo de interação estratégica é quando as duas empresas escolhem “*Não Cooperar*”, resultando em um lucro zero para cada uma. Lembrando que um conjunto de estratégias é um equilíbrio de Nash se cada uma representa a melhor resposta para a estratégia do outro jogador, conforme definição de Gibbons (1992).

O equilíbrio de Nash desse jogo é um resultado não eficiente se comparado ao acordo do cartel, em que as empresas estariam em melhor situação ao obter um lucro de \$ 6 milhões cada. O que o dilema dos prisioneiros mostra é que quando não há estímulo para que se adote uma estratégia cooperativa o resultado final é ineficiente, visto que há um incentivo para burlar o acordo. Essa limitação pode ser superada em uma estrutura de jogo cooperativo em que há a chance dos jogadores atingirem um acordo e, acima de tudo, respeitá-lo¹⁰.

⁹ Considerando que as decisões são tomadas de forma simultânea, sem qualquer comunicação entre as partes e em uma única rodada.

¹⁰ Considera-se aqui um jogo simultâneo com uma única rodada, pois, sabe-se que existem formas de encontrar um resultado mais eficiente abandonando algumas hipóteses como, por exemplo, permitindo que o jogo se repita por infinitas rodadas.

b) Jogo cooperativo

Pode-se encontrar um resultado cooperativo para o dilema dos prisioneiros através do valor de Shapley. Ressaltando que não se trata de um exemplo com todas as características observadas no jogo não cooperativo, pois, existem propriedades diferentes. O que se tem é um cálculo do valor de Shapley que aproveita os mesmos *payoffs* do exemplo do cartel. Há pelo menos duas formas de se pensar um jogo cooperativo com os dados da Tabela 1:

1) Duas empresas de um mesmo ramo e com estruturas de custo idênticas formam um cartel e devem chegar a um acordo de como partilhar entre elas o lucro total da cooperação (\$ 12 milhões). Caso não alcancem consenso elas acabarão com lucro zero, o resultado de desacordo.

2) Duas empresas de um mesmo ramo e com estruturas de custo idênticas têm a opção de atuarem individualmente como concorrentes no mercado, o que as levaria a obter um lucro zero, ou então, podem se unir e formar um cartel para atuar como uma só empresa monopolista, alcançando um lucro de \$ 12 milhões que deve ser repartido entre elas.

Independente da interpretação escolhida o resultado do jogo cooperativo e sua estrutura não mudam, de modo que a função característica v tem os seguintes valores:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = 0 \quad \text{e} \quad v(\{A, B\}) = \$ 12$$

Ou seja, atuando conjuntamente as empresas A e B alcançam um lucro de \$ 12 milhões e atuando de forma individual (como concorrentes) elas obtêm apenas o lucro normal. Com essas informações, o valor de Shapley determina as seguintes alocações:

$$\phi_A(v) = \frac{0!1!}{2!} [v(\{A\}) - v(0)] + \frac{1!0!}{2!} [v(\{A, B\}) - v(\{B\})] = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 12 = \$ 6$$

$$\phi_B(v) = \frac{0!1!}{2!} [v(\{B\}) - v(0)] + \frac{1!0!}{2!} [v(\{A, B\}) - v(\{A\})] = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 12 = \$ 6$$

Em um jogo cooperativo o resultado seria a manutenção do acordo do cartel, com ambas as empresas obtendo um lucro de \$ 6 milhões, repartindo igualmente os ganhos da

cooperação. Foi visto que o equilíbrio de Nash do jogo não cooperativo não foi capaz de apontar essa solução, visto a dificuldade de se respeitar o acordo.

4.2 Exemplo: jogo de divisão do dólar

a) Jogo não cooperativo

Outra conhecida ilustração de jogo não cooperativo é o jogo de divisão do dólar, em que dois jogadores devem chegar num acordo sobre como dividir uma quantia de \$ 1. Esse problema também pode ser analisado pelos jogos cooperativos, possibilitando mais uma vez uma comparação dos resultados.

Tem-se o seguinte exemplo adaptado de Gibbons (1992). Os jogadores A e B estão barganhando sobre como dividir uma nota de dólar. Ambos divulgam simultaneamente a quantia que eles desejariam, indicadas respectivamente por s_A e s_B , com a restrição de que $0 \leq s_A, s_B \leq 1$. Se $s_A + s_B \leq 1$, então os jogadores recebem exatamente a quantia que divulgaram. Contudo, se $s_A + s_B > 1$, ambos recebem zero. Com essas informações pode-se encontrar o equilíbrio de Nash em estratégias puras para esse jogo¹¹.

Descrevendo de um modo formal, o conjunto de estratégias é dado por $s_i \in [0,1]$, os jogadores são $i = A, B$ e os *payoffs* são indicados como:

$$u_i(s_A, s_B) = \begin{cases} s_i, & \text{se } s_A + s_B \leq 1 \\ 0, & \text{se } s_A + s_B > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Para encontrar o resultado do jogo, inicia-se a análise sob a ótica do jogador A , mas, tendo em vista sua reação às escolhas de B . Se $s_B = 1$, qualquer ponto no conjunto $[0,1]$ é uma estratégia ótima para o jogador A . A explicação é como segue: se o jogador A jogar 0, tem-se que $s_A + s_B = 1$. Logo, o jogador A receberá 0 e B receberá \$ 1. Qualquer outro valor

¹¹ No equilíbrio em estratégias puras o jogador faz sua escolha e a mantém, não podendo randomizá-las (o que seria uma estratégia mista).

que o jogador A jogar, a soma $s_A + s_B$ será maior que 1, de modo que ambos não ganharão nada. Portanto, se $s_B = 1$, seja qual for a estratégia que A adote entre $[0,1]$ ele receberá zero¹². Por outro lado, se $s_B < 1$, então a estratégia ótima para o jogador A é dada por $1 - s_B$. A explicação é que ao jogar $1 - s_B$, o jogador A atende à restrição $s_A + s_B \leq 1$ e recebe um valor positivo ao invés de um valor nulo. Dada essa descrição, a correspondência de melhor resposta de A é dada por¹³:

$$\beta_A(s_B) = \begin{cases} 1 - s_B, & \text{se } s_B < 1 \\ [0,1], & \text{se } s_B = 1 \end{cases} \quad (3)$$

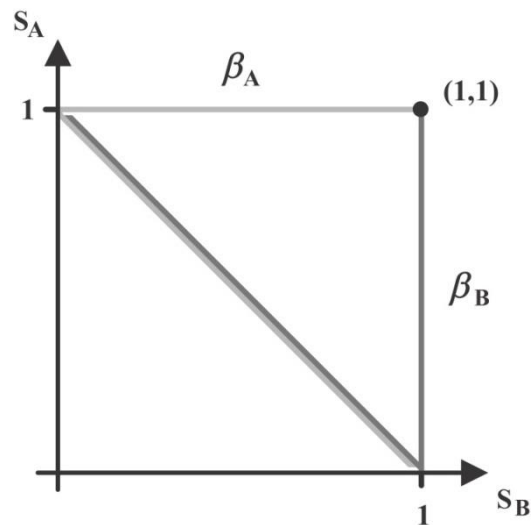
Analisando sob o ponto de vista do jogador B os procedimentos são análogos. Se $s_A = 1$, qualquer ponto no conjunto $[0,1]$ é uma estratégia ótima para B , pois ele sempre receberá 0. Por outro lado, se $s_A < 1$, a estratégia ótima para B é dada por $1 - s_A$, pois, assim ele ganhará um valor positivo. Tem-se a seguinte correspondência de melhor resposta para B :

$$\beta_B(s_A) = \begin{cases} 1 - s_A, & \text{se } s_A < 1 \\ [0,1], & \text{se } s_A = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Pode-se encontrar o resultado desse processo de negociação representando graficamente as duas correspondências, onde $\beta_A(s_B)$ é indicado pela linha cinza em tom claro e $\beta_B(s_A)$ pela linha cinza em tom mais escuro.

¹² O jogador A , visto que de qualquer forma não ganhará nada, pode penalizar seu adversário jogando uma estratégia maior do que zero para que ambos tenham um ganho nulo.

¹³ A correspondência de melhor resposta mostra a estratégia escolhida por um jogador como reação à expectativa que ele tem sobre a escolha do outro.



Fonte: Elaboração própria

Figura 1 – Correspondência de melhor resposta e equilíbrio de Nash no jogo de divisão do dólar

Os equilíbrios de Nash são identificados como as interseções das duas correspondências (quando as estratégias dos jogadores são reciprocamente as melhores respostas), o que inclui toda a linha diagonal em que a estratégia de um jogador é complementada pela do outro, somando o total de \$ 1, e o ponto (1,1), em que ambos não ganham nada. Os resultados são indicados por $\{(s_A, s_B) \in \mathbb{R}_+^2: s_A + s_B = 1\} \cup \{(1,1)\}$.

Portanto, a solução não cooperativa para a divisão do dólar não é única. Ela prevê como equilíbrio qualquer divisão de valores que somem \$ 1 ou o resultado ineficiente em que ninguém ganha nada (porque ambos desejam tudo), fruto da dificuldade em se chegar a um acordo. Novamente, essas limitações podem ser evitadas em uma estrutura de jogo cooperativo.

b) Jogo cooperativo

Continuando com o caso dos dois jogadores que devem chegar num acordo sobre a divisão de uma nota de dólar, pode-se encontrar uma solução cooperativa para esse problema

por meio do valor de Shapley. Claramente tem-se um jogo de utilidade transferível, visto que o *payoff* é uma função linear da quantidade de dinheiro.

Um jogo cooperativo de divisão do dólar pode ser pensado da seguinte forma. Os jogadores A e B devem obrigatoriamente chegar a um acordo sobre como partilhar a nota de dólar. Não havendo consenso, ambos não recebem valor algum. A função característica desse jogo pode ser descrita como:

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = 0 \quad \text{e} \quad v(\{A, B\}) = 1$$

E as alocações do valor de Shapley são dadas por:

$$\phi_A(v) = \frac{0!1!}{2!} [v(\{A\}) - v(0)] + \frac{1!0!}{2!} [v(\{A, B\}) - v(\{B\})] = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\phi_B(v) = \frac{0!1!}{2!} [v(\{B\}) - v(0)] + \frac{1!0!}{2!} [v(\{A, B\}) - v(\{A\})] = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Na prática, um só cálculo seria suficiente, pois, o axioma da simetria garante a igualdade de valores entre os jogadores. Vê-se que o valor de Shapley provê uma solução perfeitamente razoável para um jogo como esse, dividindo igualmente a nota de dólar entre os dois participantes. Novamente reitera-se que esse resultado não acontece na solução não cooperativa para um exemplo idêntico.

4.3 Aplicação: jogo de alocação de custos

Deixando de lado comparações com jogos não cooperativos e concentrando-se nas aplicações, os jogos de alocação de custos representam um campo fértil para a utilização do valor de Shapley. Segundo Peleg e Sudholter (2007) um problema de alocação de custos pode ser resumido em um jogo (N, c) onde N é o conjunto de jogadores e c é a função característica, que simboliza uma função custo. Para todo subconjunto $S \subseteq N$, $c(S)$ – o valor da coalizão – representa o menor custo de servir os membros de S da forma mais eficiente.

Um exemplo interessante está em Young (1994) que analisou um plano do governo dos Estados Unidos de planejamento na bacia do rio Tennessee que consistiu na construção de

uma série de barragens que atenderiam a múltiplos usos. O problema é exatamente como alocar os custos entre os diferentes usos dos recursos hídricos.

No projeto do governo americano foram estabelecidos níveis que uma barragem deveria atingir para atender a três usos: navegação (n), controle de inundação (f) e geração de energia (p) (cada barragem pode ser construída em diferentes alturas, dependendo dos usos a serem atendidos) e estimou-se o menor custo de construir uma barragem que atendesse aos diferentes alvos. Mais precisamente, para cada combinação dos três usos foi estimado o custo que cada coalizão teria para atingir os níveis almejados, conforme mostra a Tabela 2 (em milhares de dólares). Caracterizando como um jogo de alocação, os jogadores seriam exatamente os três diferentes usos da água, que estariam representados por agências ou empresas responsáveis por fornecer o serviço e às quais seriam alocados os custos do projeto.

Tabela 2 – Jogo de alocação de custos: exemplo do reservatório de múltiplos usos

Coalizões	Custo (mil \$)
\emptyset	0
$c(\{n\})$	163.520,00
$c(\{f\})$	140.826,00
$c(\{p\})$	250.096,00
$c(\{n, f\})$	301.607,00
$c(\{n, p\})$	378.821,00
$c(\{f, p\})$	367.370,00
$c(\{n, f, p\})$	412.584,00

Fonte: Young (1994)

A Tabela 2 pode ser lida da seguinte forma. Para construir uma barragem que atenda só a navegação, o custo seria de \$ 163.520,00. Para atender apenas ao controle de inundação, o custo seria de \$ 140.826,00. E assim sucessivamente até chegar à última linha, que mostra que para construir uma barragem que atenda simultaneamente aos três usos, o custo seria de \$ 412.584,00. Por que é possível utilizar o conceito de jogo cooperativo nesse exemplo? Os dados mostram que ao tratar os custos de forma conjunta, pode-se atender a cada uso da água

um com um custo individual menor, visto que $c(\{n, f, p\}) < c(\{n\}) + c(\{f\}) + c(\{p\})$. Ou seja, existem ganhos oriundos da coalizão. Com esses dados, o valor de Shapley para cada uso dos recursos hídricos é indicado por (os cálculos estão no Anexo 1):

$$\text{Navegação: } \phi_n(c) = \$ 117.829,00$$

$$\text{Controle de inundação: } \phi_f(c) = \$ 100.756,5$$

$$\text{Geração de energia: } \phi_p(c) = \$ 193.998,5$$

As alocações do valor de Shapley denotam exatamente o custo a ser alocado para cada uso como parte do custo total de se realizar os projetos que atendam aos três objetivos simultaneamente. Percebe-se que a soma das alocações esgotam o custo conjunto (\$ 412.584,00), como requer o axioma da eficiência. Além disso, cada alocação do valor de Shapley para determinado uso é inferior ao seu respectivo custo individual, o que significa que existem incentivos para a cooperação, ou, para tratar dos custos de forma conjunta.

Várias outras aplicações do valor de Shapley em problemas de alocação de custos são encontradas na literatura. Littlechild e Owen (1973) aplicaram o valor de Shapley no cálculo de taxas para a aterrissagem de aviões em aeroportos, estudando a divisão dos custos de infraestrutura de construção de uma pista de pouso. Fragnelli et al. (2000) estudaram a divisão dos custos de infraestrutura de construção de uma ferrovia na Europa. Loehman et al. (1979) trataram da alocação do custo da construção de um sistema regional de tratamento de água na bacia do rio Meramec, no estado americano do Missouri. E Young et al. (1982) estudaram a alocação do custo da construção de um sistema de abastecimento de água na região de Skane, na Suécia.

4.4 Aplicação: jogos de votação

Outra aplicação usual dos jogos cooperativos e do valor de Shapley é em jogos de votação. Este tipo de aplicação é uma situação particular do valor de Shapley quando ele é

utilizado para calcular o poder de um jogador dentro de um jogo e é chamado de índice Shapley-Shubik, devido ao trabalho de Lloyd Shapley e Martin Shubik, de 1954, que propôs a aplicação do valor de Shapley à classe dos chamados jogos simples. Segundo Shapley e Shubik (1954), um jogo simples é representado por uma função característica v que assume somente os valores 0 e 1, tal que uma coalizão S é dita vencedora se $v(S) = 1$ e perdedora se $v(S) = 0$. Os jogos simples são modelos naturais para situações de votação.

Um típico cenário de votação com n jogadores pode ser representado pelo vetor $[q; w_1, \dots, w_n]$, onde w_i denota o número de votos do jogador i e q denota o número de votos necessários para uma coalizão ser vencedora. As coalizões vencedoras são aquelas com votos suficientes, isto é, S é vencedor se e somente se $\sum_{i \in S} w_i \geq q$.

De acordo com Roth (1988), como a contribuição marginal $v(S) - v(S - \{i\})$ em um jogo simples é sempre 0 ou 1, então um índice Shapley-Shubik de um jogador equivale à proporção de ordenamentos aleatórios no qual ele é um jogador essencial, ou seja, a proporção de ordenamentos nos quais o conjunto de jogadores $S - \{i\}$ que o precede forma uma coalizão perdedora que é transformada em vencedora (coalizão S) exatamente pela chegada de i (em cada ordenamento de jogadores somente um é essencial). O índice Shapley-Shubik conta o número de vezes em que o jogador é essencial, ou seja, quantas vezes ele transforma uma coalizão perdedora em vencedora, o que representa o poder desse jogador.

Para compreender as características de um jogo de votação considera-se o processo de decisão em um parlamento, num exemplo adaptado de Serrano (2012) e Hart (1989). Suponha que existam 100 assentos e as decisões são tomadas por maioria simples: 51 votos são suficientes para uma lei ser aprovada. Existem 3 jogadores neste parlamento: dois grandes partidos (Partidos 1 e 2) e um pequeno partido (Partido 3). Cada um dos grandes partidos tem 48 assentos, enquanto o partido pequeno tem apenas 4.

Como a maioria simples torna uma coalizão vencedora (no sentido de aprovar uma lei), tem-se que a função característica dá origem aos valores de coalizão indicados pela Tabela 3. Uma coalizão tem valor 0 se ela não alcança a maioria para a aprovação da lei e tem valor 1 – tornando-se uma coalizão vencedora – se ela atinge a maioria necessária.

Tabela 3 – Jogo de votação: exemplo do índice Shapley-Shubik

Coalizões	Valor
\emptyset	0
$v(\{1\})$	0
$v(\{2\})$	0
$v(\{3\})$	0
$v(\{1,2\})$	1
$v(\{1,3\})$	1
$v(\{2,3\})$	1
$v(\{1,2,3\})$	1

Fonte: Elaboração do autor

Com esses dados obtêm-se as alocações do valor de Shapley (os cálculos estão no Anexo 2):

$$\phi_1(v) = 0,33$$

$$\phi_2(v) = 0,33$$

$$\phi_3(v) = 0,33$$

O resultado indica 33,33% de poder no parlamento para cada partido, com um poder total dos jogadores igual a 1, respeitando o axioma da eficiência. Apesar da elevada diferença de assentos entre os partidos grandes e o pequeno, os três são idênticos em termos de contribuição marginal para tornar uma coalizão vencedora. Para $i = 1, 2, 3$ a contribuição marginal do jogador i é positiva somente quando ele é o segundo a compor em sequência uma coalizão. Se for assumido que os Partidos 1 e 2 são rivais, o apoio do Partido 3 é determinante para tornar uma coalizão vencedora, o que explica a igual distribuição de poder entre os três,

mesmo tendo quantidades diferentes de assentos. Ou seja, a rivalidade entre os partidos maiores pelos votos do pequeno aumenta o poder deste último.

Se houvesse uma mudança no sistema de voto de modo que fosse necessário $2/3$ dos assentos para passar uma lei, a situação seria diferente. Os Partidos 1 e 2 dividiriam o poder entre eles (50% para cada) e o Partido 3 seria um jogador *dummy*, pois, em nenhuma situação ele faria uma coalizão se tornar vencedora. Nota-se claramente como o valor de Shapley capta as mudanças na distribuição de poder devido a cada cenário político diferente. E percebe-se, novamente, que o poder de um partido não reflete a exata proporção de seus votos.

Exemplos do jogo de votação podem ser vistos no próprio artigo pioneiro de Shapley e Shubik (1954) que aplicaram sua metodologia na definição de poder dentro do conselho de segurança da ONU. Widgrén (1994) analisou o poder de voto no parlamento da União Europeia. Por sua vez, Straffin Jr. (1988) fez algumas simulações considerando a estrutura política e partidária americana.

5 Considerações finais

Este capítulo teve o objetivo de fazer um esforço introdutório de caracterização dos jogos cooperativos, especialmente do conceito de solução do valor de Shapley. Foram descritas as principais propriedades dessa solução, além de se apresentar exemplos que possibilitaram uma comparação direta entre as duas abordagens da teoria dos jogos, visto que podem ser solucionados tanto cooperativamente quanto não cooperativamente. Ademais, com o intuito de aprofundar a compreensão sobre o valor de Shapley, foram apresentadas algumas importantes aplicações em problemas práticos.

Na comparação direta entre as duas abordagens dos jogos, viu-se que a falta de incentivo para manter um acordo, ou, a tentação em burlar, faz com que o resultado na teoria dos jogos não cooperativos não seja o melhor para os jogadores. Já em um jogo cooperativo,

com a possibilidade dos jogadores negociarem e manterem um acordo pode-se alcançar um resultado mais eficiente, ou seja, melhoram-se as perspectivas dos jogadores envolvidos em algum processo de barganha.

Isso pode de alguma forma ser trazido para a realidade, indicando que em circunstâncias onde há problemas econômicos ou disputas políticas para serem resolvidas por um conjunto de agentes, ainda que estes tenham interesses opostos, espera-se que a solução em que eles se encontram para estabelecer um acordo – desde que esteja em conformidade com a lei – forneça resultados melhores para todos os agentes envolvidos em comparação a um cenário em que eles tomariam decisões individualmente.

Em relação aos exemplos e aplicações que foram vistos, nos jogos do dilema dos prisioneiros, da divisão do dólar e da alocação de custos estão claros os ganhos oriundos da cooperação mostrando que os acordos são compensatórios. Já o jogo de votação tem características diferentes, o que não deixa de ser interessante, pois, mostra a versatilidade do valor de Shapley.

Apesar de bastante difundido em publicações internacionais, ainda existem poucas obras no Brasil que tratam dos jogos cooperativos e seus conceitos de solução. Ao mostrar a praticidade e os aspectos introdutórios do valor de Shapley acredita-se que este capítulo possa servir de ponto de partida para futuras aplicações e maiores aprofundamentos, em que se pode analisar jogos mais complexos e abandonar algumas hipóteses simplificadoras que foram assumidas.

6 Referências

ALIPRANTIS, C. D.; CHAKRABARTI, S. K. **Games and decision making**. New York: Oxford University Press, 2000.

AUMANN, R. J. Linearity of unrestrictedly transferable utilities. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 7, n. 3, p. 281-284, 1960.

AUMANN, R. J.; PELEG, B. Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 66, n. 3, p. 173-179, 1960.

DIXIT, A.; NALEBUFF, B. **Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life**. New York: W. W. Norton & Company, 1991.

DIXIT, A.; SKEATH, S.; REILEY JR., D. **Games of Strategy**. New York: W. W. Norton & Company, 2004.

FRAGNELLI, V.; GARCÍA-JURADO, I.; NORDE, H.; PATRONE, F.; TIJS, S. How to share railways infrastructure costs? In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 91-101.

GIBBONS, R. **Game theory for applied economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992.

HART, S. Shapley value. In: EATWELL, J.; MILGRATE, M.; NEWMAN, P. **The New Palgrave: Game Theory**. New York: W W Norton, 1989. p.210-216.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A simple expression for the Shapley value in a special case. **Management Science**, v. 20, n. 3, 370-372, 1973.

LOEHMAN, E.; ORLANDO, J.; TSCHIRHART, J.; WHINSTON, A. Cost allocation for a regional wastewater treatment system. **Water Resources Research**, v. 15, n. 2, 193-202, 1979.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.; GREEN, J. **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

MCMILLAN, J. **Games, Strategies and Managers: How Managers Can Use Game Theory to Make Better Business Decisions**. New York: Oxford University Press, 1992.

MONTET, C.; SERRA, D. **Game theory and economics**. New York: Palgrave Macmillan, 2003.

MYERSON, R. B. **Game theory: an analysis of conflict**. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **A course in game theory**. Cambridge: MIT Press, 1994.

PELEG, B.; SUDHÖLTER, P. **Introduction to the theory of cooperative games**. New York: Springer Science & Business Media, 2007.

ROTH, A. **The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

SERRANO, R. Cooperative Games. In: **Computational Complexity**. New York: Springer, 2012. p. 666-674.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. **Contributions to the Theory of Games**, v. 2, n. 28, p. 307-317, 1953.

SHAPLEY, L. S. Cores of convex games. **International journal of game theory**, v. 1, n. 1, p. 11-26, 1971.

SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. **American Political Science Review**, v. 48, n. 3, p. 787-792, 1954.

STRAFFIN JR., P. D. The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilities. In: ROTH, A. **The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 71-81.

WIDGRÉN, M. Voting power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements. **European Economic Review**, v. 38, n. 5, p. 1153-1170, 1994.

YOUNG, H.P. Cost allocation. In: AUMANS, R.J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 2. New York: Elsevier Science, 1994. p. 1192-1235.

YOUNG, H.P.; OKADA, N.; HASHIMOTO, T. Cost allocation in water resources development. **Water resources research**, v. 18, n. 3, 463-475, 1982.

ANEXO 1

Cálculos do jogo de alocação de custos

1) Navegação

$$\phi_n(c) = \frac{0!2!}{3!} \times [v(\{n\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{n, f\}) - v(\{f\})] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{n, p\}) - v(\{p\})] + \frac{2!0!}{3!} \times [v(\{n, f, p\}) - v(\{f, p\})]$$

$$\phi_n(c) = \frac{2}{6} \times 163.520,00 + \frac{1}{6} \times 160.781,00 + \frac{1!1!}{3!} \times 128.725,00 + \frac{2!0!}{3!} \times 45.214,00$$

$$\phi_n(c) = 117.829,00$$

2) Controle de inundação

$$\phi_f(c) = \frac{0!2!}{3!} \times [v(\{f\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{n, f\}) - v(\{n\})] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{f, p\}) - v(\{p\})] + \frac{2!0!}{3!} \times [v(\{n, f, p\}) - v(\{n, p\})]$$

$$\phi_f(c) = \frac{2}{6} \times 140.826,00 + \frac{1}{6} \times 138.087,00 + \frac{1!1!}{3!} \times 117.274,00 + \frac{2!0!}{3!} \times 33.763,00$$

$$\phi_f(c) = 100.756,5$$

3) Geração de energia

$$\phi_p(c) = \frac{0!2!}{3!} \times [v(\{p\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{n, p\}) - v(\{n\})] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{f, p\}) - v(\{f\})] + \frac{2!0!}{3!} \times [v(\{n, f, p\}) - v(\{n, f\})]$$

$$\phi_p(c) = \frac{2}{6} \times 250.096,00 + \frac{1}{6} \times 215.301,00 + \frac{1!1!}{3!} \times 226.544,00 + \frac{2!0!}{3!} \times 110.997,00$$

$$\phi_p(c) = 193.998,5$$

ANEXO 2

Cálculos do jogo de votação

1) Partido 1

$$\phi_1(v) = \frac{0!2!}{3!} \times [v(\{1\}) - v(0)] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \frac{2!0!}{3!} \times [v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})]$$

$$\phi_1(v) = \frac{2}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{2}{6} \times 0 = \frac{1}{3} = 0,33$$

2) Partido 2

$$\phi_2(v) = \frac{0!2!}{3!} \times [v(\{2\}) - v(0)] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{2,3\}) - v(\{3\})] + \frac{2!0!}{3!} \times [v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})]$$

$$\phi_2(v) = \frac{2}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{2}{6} \times 0 = \frac{1}{3} = 0,33$$

3) Partido 3

$$\phi_3(v) = \frac{0!2!}{3!} \times [v(\{3\}) - v(0)] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + \frac{1!1!}{3!} \times [v(\{2,3\}) - v(\{2\})] + \frac{2!0!}{3!} \times [v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})]$$

$$\phi_3(v) = \frac{2}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{2}{6} \times 0 = \frac{1}{3} = 0,33$$

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES DO VALOR DE SHAPLEY EM PROBLEMAS DE ALOCAÇÃO: UMA REVISÃO DE LITERATURA

1 Introdução

O valor de Shapley – introduzido pelo autor em questão na sua importante obra de 1953 – tem sido aplicado em áreas bastante diversas, se destacando como conceito de solução da teoria dos jogos cooperativos. Conseqüentemente, a literatura a seu respeito é significativamente ampla. Por exemplo, o valor de Shapley é utilizado em jogos de votação para analisar o poder de partidos e coalizões políticas em parlamentos, como se vê em Shapley e Shubik (1954) e Widgrén (1994). Também se encontram aplicações – especialmente em Moulin (1992) – no estudo da divisão de bens entre diferentes agentes quando compensações monetárias entre eles são permitidas. E em um movimento mais recente o valor de Shapley vem sendo usado em aplicações na biologia e epidemiologia em decorrência do aprimoramento de estudos e pesquisa na área da saúde que passaram a explorar ferramentas estatísticas e matemáticas com mais intensidade, para as quais se recomenda ver Cox Jr. (1985) e Land e Gefeller (2000).

Neste capítulo, porém, o foco está nas aplicações do valor de Shapley em problemas de alocação de custos, provavelmente o terreno em que houve maior disseminação das soluções cooperativas. Segundo Tijss e Driessen (1986), em um problema de alocação de custos um grupo de jogadores se reúne para realizar um projeto conjunto. A questão principal é como alocar os custos oriundos da cooperação entre os jogadores, se adequando às características específicas dos agentes e respeitando as propriedades dos jogos cooperativos¹. Uma importante observação feita por Fiestras-Janeiro et al. (2011) refere-se à alocação de

¹ Um detalhamento dessas propriedades pode ser visto, por exemplo, em Myerson (1991) e Osborne e Rubinstein (1994).

benefícios. Uma vez que o benefício de uma coalizão de jogadores é a soma dos custos individuais menos o custo de toda a coalizão, então conclui-se que um problema de alocação de custos gera um problema de alocação de benefícios e vice-versa. Todavia, como podem existir diferenças de interpretação, o presente texto se desenvolve apenas sob o ponto de vista dos custos.

Portanto, o objetivo deste capítulo é fornecer uma revisão de literatura de aplicações do valor de Shapley em problemas de alocação de custos. Foram escolhidas aplicações que lidam com questões concretas encontradas no mundo real, ou seja, com foco em jogos práticos². Patrone et al. (2000) definem jogo práticos como sendo aplicações da teoria dos jogos que abordam problemas reais enfrentados por tomadores de decisão fora do mundo acadêmico. Assim, o objetivo não é disponibilizar um levantamento dos conceitos do valor de Shapley na alocação de custos, nem suas propriedades e desenvolvimentos teóricos. Para trabalhos com esse foco pode-se citar Tijss e Driessen (1986), Young (1994) e Winter (2002).

A revisão de literatura empreendida neste capítulo compreende a análise das seguintes aplicações após esta breve introdução. Loehman et al. (1979), que estudaram a construção de um sistema regional de tratamento de esgotos (Seção 2.1). Littlechild e Owen (1973), que desenvolveram o jogo do aeroporto a partir da análise de um problema de alocação dos custos de construção de uma pista de pouso (Seção 2.2). Fragnelli et al. (2000), que estabeleceram o jogo do custo de infraestrutura ao estudar a alocação de custos relacionados ao sistema ferroviário (Seção 2.3). E Kuipers et al. (2013) que, mais recentemente, criaram o jogo da rodovia para estudar a alocação dos valores de pedágio entre os veículos que utilizam uma estrada (Seção 2.4).

² “Jogos práticos” foi a tradução mais adequada que se encontrou para a expressão em inglês *game practice*.

2 Revisão de literatura: aplicações do valor de Shapley

2.1 Alocação do custo de um sistema regional de tratamento de esgoto

Os jogos cooperativos têm sido freqüentemente aplicados na alocação de custos de projetos relacionados aos recursos hídricos, como reservatórios de água, sistemas de irrigação, tratamento de esgotos, etc. Uma contribuição relevante para essa área foi dada por Loehman et al. (1979) que estudaram o problema da alocação do custo de um sistema regional de tratamento de esgoto empregando o valor de Shapley como método de alocação. A aplicação ocorreu para a Bacia do Rio Meramec, nos Estados Unidos, onde foram identificados oito poluidores que levavam seus resíduos para várias pequenas estações de tratamento, justificando a necessidade de um estudo sobre um único sistema regional que forneça benefícios ambientais e econômicos a todos.

Para a cooperação ocorrer Loehman et al. (1979) lembram que são necessárias economias de escala na construção e operação da estação de tratamento, o que implica que o custo de uma grande estação é menor que a soma dos custos para n estações individuais, ou seja, $\sum_{i \in N} c(\{i\}) > c(N)$, em que $N = \{1, \dots, n\}$ é o total de jogadores (a grande coalizão).

Atendida essa condição, resta alocar o custo total $c(N)$ entre os jogadores, o que foi feito utilizando o valor de Shapley, mas, em uma forma generalizada explicada como segue. Partindo da alegoria da construção sequencial da grande coalizão pela adição de um jogador por vez, quando i entra nessa sequência ele se associa a uma coalizão S e gera um custo incremental dado por $c(S \cup \{i\}) - c(S)$. Um esquema razoável de *payoff* seria ao poluidor i ser cobrado esse incremento, uma vez que ele é o responsável. Entretanto, devido às economias de escala esse custo incremental depende de qual das n posições i ocupa quando a grande coalizão se forma. No cálculo do valor de Shapley é assumido que todas as coalizões são possíveis e cada um dos $n!$ ordenamentos são igualmente prováveis de ocorrer. Por

consequência, ao poluidor i é cobrado o custo incremental médio (valor esperado) que ele gera em todos os ordenamentos.

Contudo, os autores fazem uma ressalva em relação aos ordenamentos. Com frequência existem informações a priori sobre quais coalizões são possíveis, de modo que seria irreal assumir que todos os ordenamentos de usuários são igualmente prováveis (como implica o valor de Shapley). Assim, foi desenvolvida uma generalização do valor de Shapley em que a alocação para um jogador i é indicada por:

$$\phi_i(c) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} p(S, S - \{i\}) [c(S) - c(S - \{i\})], \quad (1)$$

que é uma soma ponderada dos custos incrementais. A sugestão dos autores é obter os pesos a partir das probabilidades de certos ordenamentos ocorrerem [$p(S, S - \{i\})$ é interpretado como a probabilidade de que i se junte à coalizão $S - \{i\}$ e substitui os coeficientes usuais da fórmula tradicional $(n - s)!(s - 1)/n!$]. Portanto, o valor de Shapley generalizado permanece como o custo incremental esperado, mas, os ordenamentos não são todos igualmente prováveis. Se certos ordenamentos não são viáveis (por exemplo, i não se associa a $S - \{i\}$), essa informação pode ser incorporada na equação (1) fazendo $p(S, S - \{i\}) = 0$. Para computar $p(S, S - \{i\})$ assume-se que todos os demais ordenamentos (aqueles não excluídos) são igualmente prováveis.

Um exemplo de ordenamento que pode ser eliminado por ser improvável é a coalizão que inclui os jogadores que estão em extremos opostos no curso do Rio Meramec, ou seja, os que estão mais distantes rio abaixo e rio acima. Devido à longa distância entre ambos, as economias de escala na construção de uma única estação de tratamento de esgoto são mais que superadas por outros custos (bombeamento, canalização, etc.). Portanto, uma solução de menor custo iria exigir duas estações de tratamento separadas.

No que tange aos dados, foram examinados custos de tratamento primário, secundário e avançado para satisfazer os padrões de qualidade de água na Bacia do Rio Meramec ao

menor custo. Como o tipo de tratamento que se exige em cada localidade pode variar e isso tem um impacto direto sobre os custos de qualquer coalizão, foi assumido que a exigência para uma coalizão seria a mesma que a do poluidor onde ocorre o tratamento conjunto e esse tratamento ocorreria no usuário municipal mais rio abaixo³.

Sobre os resultados, Loehman et al. (1979) destacam alguns pontos: (1) Dois poluidores têm custos negativos indicando que deveriam receber subsídios por se associarem à grande coalizão. Ainda que isso possa parecer injusto com os demais jogadores, estes estão em melhor situação mesmo pagando o subsídio. A razão para essa circunstância é que o custo marginal de permitir que os dois poluidores se associem a certas coalizões é negativo, de modo que os demais devem encorajá-los a se associarem ao sistema; (2) Para todos os oito poluidores, a alocação do valor de Shapley é menor que o custo do tratamento individual, portanto cada jogador tem um incentivo econômico para se associar ao sistema regional; (3) o valor de Shapley apresenta uma melhor distribuição dos ganhos oriundos da cooperação em comparação à alocação de custos de métodos alternativos.

O valor de Shapley generalizado satisfaz as mesmas propriedades da fórmula tradicional, tais como: os custos conjuntos totais são cobertos; a alocação é baseada no custo incremental esperado de um poluidor; e as propriedades de equidade são atendidas, pois, consideram-se todas as possíveis coalizões como sendo igualmente prováveis. E ainda tem as vantagens de que uma informação a priori sobre a formação de coalizões pode ser utilizada e o número de cálculos é reduzido (caso certos ordenamentos sejam excluídos por serem inviáveis).

Junto aos resultados, Loehman et al. (1979) fazem um interessante resumo das reações de agentes econômicos reais que foram solicitados a emitir parecer sobre esse método. As reações sugerem que métodos de alocação de custos da teoria dos jogos devem ser de fácil

³ Portanto usuários como indústrias e grandes fazendas presentes entre os oito poluidores não poderiam ser a sede do tratamento conjunto, somente os usuários municipais.

apelo compreensivo e intuitivos se quiserem ser aceitos pelos tomadores de decisão e que descrever a alocação final como “custo incremental esperado que um usuário contribui para todas as coalizões” parece não ser transparente para os agentes que não dominam conceitos econômicos. Os autores terminam o artigo analisando as restrições que são impostas às novas metodologias por lei, apontando evidências de que a adoção de abordagens incorretas vem perpetuando cenários ineficientes. Seria necessária uma atualização da legislação para considerar características de métodos de alocação como o valor de Shapley.

2.2 Jogo do aeroporto

Desenvolvido de forma pioneira por Littlechild e Owen (1973), o jogo do aeroporto é um dos exemplos mais citados da teoria dos jogos cooperativos. Para entendê-lo parte-se das seguintes características do setor aéreo: os aviões normalmente precisam pagar uma taxa para fazerem uso da pista de pouso de um aeroporto e, na maioria dos casos, essas taxas são formadas por vários componentes, sendo que um deles está relacionado com o custo de construção da pista utilizada (ou equivalentemente, o custo de capital que precisa ser coberto). Littlechild e Owen (1973) propõe distribuir o custo de construção modelando a situação como um problema de alocação de custos e utilizando o valor de Shapley⁴.

Assim, o problema é: como dividir os custos de construção de uma pista de pouso de um aeroporto entre os aviões que a utilizam? Para estabelecer o jogo, a abordagem de Littlechild e Owen (1973) define que os jogadores são os pousos que ocorrem durante a vida útil da pista, sendo que esses pousos podem ser separados em diferentes grupos (de acordo com o tipo de avião).

Formalmente o jogo do aeroporto é descrito da seguinte maneira. Considerando um aeroporto com uma pista de pouso, os aviões que pousam nessa pista podem ser divididos em

⁴ Em trabalho posterior Littlechild e Owen (1976) analisaram o mesmo problema do jogo do aeroporto, mas, utilizando o conceito de solução do *nucleolus*.

k tipos, em que g_i é o conjunto de pousos de aviões do tipo i em um determinado período de tempo, tal que $N = \bigcup_{i=1}^k g_i$ é o conjunto de todos os pousos; e n_i denota o número de pousos por aviões do tipo i , tal que $n = \sum_{i=1}^k n_i$ é o total de pousos.

Para definir a função custo desse jogo, Littlechild e Owen (1973) estabeleceram a hipótese conhecida como custo do maior jogador: o custo de construção de uma pista de pouso depende do maior avião para o qual a pista é projetada. Assim, considerando c_i como o custo de fazer uma pista adequada para pousos de aviões do tipo i e supondo que esses tipos possam ser ordenados tal que $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_k$, a função custo c do jogo de custo (N, c) é então determinada por $c(\emptyset) = 0$ e para toda coalizão $S \subset N$

$$c(S) = \max\{c_i\}, \quad (2)$$

onde $i = \{1, \dots, k\}$ e $g_i \cap S \neq \emptyset$. A hipótese do custo do maior jogador retrata exatamente a existência de economias de escala na cooperação. É mais vantajoso que os aviões de todos os tipos se reúnam para utilizarem uma mesma pista.

Antes da formalização da hipótese do custo do maior jogador por meio do jogo do aeroporto o conceito já havia surgido nos trabalhos de Baker (1965 apud LITTLECHILD e OWEN, 1973, p.370) e Thompson (1971 apud LITTLECHILD e OWEN, 1973, p.370). Em seus respectivos trabalhos, os autores sugeriram que o custo de prover uma pista de pouso depende do maior tipo de avião que irá utilizar o aeroporto e propuseram uma regra bastante simples para alocar custos: divide-se o custo de prover uma pista que atenderá ao menor tipo de aeronave igualmente entre o número de pousos de todos os tipos de aeronaves. Posteriormente, divide-se o custo incremental de prover uma pista que atenda ao segundo menor tipo de aeronave igualmente entre o número de pousos de todos os tipos de aeronaves, menos a primeira que não necessitaria dessa melhoria. E daí por diante até chegar ao custo incremental do maior tipo de aeronave que será dividido igualmente entre o número de pousos feitos apenas por aeronaves do maior tipo.

Porém, Littlechild e Owen (1973) explicam que a fórmula tradicional do valor de Shapley é computacionalmente complexa em jogos com essas características, pois, a opção de modelar os jogadores como sendo pousos pode dar origem a um jogo com uma quantidade significativamente grande de jogadores.

Assim, os autores desenvolveram uma aproximação da fórmula original que pode ser calculada com relativa facilidade. Considerando (N, c) como o jogo do aeroporto correspondente aos grupos g_1, \dots, g_k com respectivamente n_1, \dots, n_k jogadores e dada a existência dos números não negativos b_i , com $i = 1, \dots, k$, tal que $b_i = c_i - c_{i-1}$, então, tem-se que:

$$\phi_j(c) = \sum_{h=1}^i \frac{b_h}{n_h + \dots + n_k}, j \in g_i, i = 1, \dots, k \quad (3)$$

em que j é o jogador, sendo que $j \in g_i$ para $i = 1, \dots, k$ significa que o jogador j pertence ao tipo i e que existem k tipos de aviões; e b_h é o custo incremental de prover uma pista de pouso que atenda ao tipo h em relação ao tipo $h - 1$.

Como nas hipóteses do jogo do aeroporto todos os jogadores de um determinado tipo terão o mesmo valor de Shapley, Littlechild e Owen (1973) consideram que pode ser conveniente ajustar a equação (3) para que seus resultados sejam apresentados diretamente em relação ao tipo de avião. Desse modo, fazendo $\phi_j(c) = \Phi_i$ para $j \in g_i$, tem-se

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} + b_i / \sum_{h=i}^k n_h, \quad (4)$$

em que Φ_{i-1} representa o valor acumulado até então, ou seja, a soma do valores dos tipos anteriores.

Os resultados são obtidos para um conjunto de dados extraídos do aeroporto de Birmingham, Inglaterra. No período de 1968-69 houve 13.572 pousos de 11 diferentes tipos de aeronave. Ou seja, conforme a equação (4) apenas 11 taxas precisam ser calculadas para os tipos. De fato seria computacionalmente inviável calcular o valor de Shapley para todos os pousos.

Identificou-se a presença de custos de manutenção da pista de pouso (que estavam sujeitos a outra base de cálculo) e custos de construção que dependiam do maior tipo de aeronave. Foi assumido que a taxa por pouso da aeronave do tipo i compreende uma cobrança pela manutenção mais uma cobrança pelo capital, onde esta última é computada exatamente como o valor de Shapley do jogo do aeroporto e deve cobrir o custo total de construção da pista de pouso. Comparando a taxa calculada pelos autores com a taxa de pouso vigente na época do estudo conclui-se que as duas estruturas de taxas não são muito diferentes e recuperam o mesmo custo total, ainda que a alocação do valor de Shapley tenha apresentado valores mais elevados para o menor e o maior tipo de aeronave.

2.3 Jogo do custo de infraestrutura

Influenciados pelo jogo do aeroporto, Fragnelli et al. (2000) forneceram uma generalização dessa linha de raciocínio para responder à pergunta: como alocar os custos de infraestrutura do sistema ferroviário entre os diferentes tipos de trens? Esse questionamento foi apresentado aos autores pela companhia ferroviária nacional italiana, motivada pela reorganização do setor ferroviário europeu nos anos 1990. A análise do jogo do custo de infraestrutura foi aprofundada nos trabalhos posteriores de Norde et al. (2002) e Fragnelli e Iandolino (2004) que trouxeram importantes contribuições para a discussão vista nessa seção.

O problema em questão está relacionado com a chamada tarifa de acesso que os operadores de transporte ferroviário devem pagar ao realizar uma viagem. Esta tarifa deve levar em conta vários aspectos, tais como a rentabilidade da viagem, problemas de congestionamento, o número de passageiros e/ou mercadorias transportadas, os custos de infraestrutura, etc., e é concebida de forma aditiva, isto é, como a soma de várias tarifas correspondentes aos vários aspectos a serem considerados. O foco da investigação de Fragnelli et al. (2000) é a forma de definir a parte da tarifa relacionada com os custos de

infraestrutura. Para fazer isso, os autores propõe modelar o problema como um problema de alocação de custos e definir a tarifa utilizando o valor de Shapley.

Considera-se que a infraestrutura pode ser decomposta em diferentes instalações (pistas, sistemas de sinalização, estações, etc.) e, para cada instalação, os custos de infraestrutura consistem na soma dos custos de construção – que são fixos – e os custos de manutenção, que são proporcionais ao número de trens que utilizam as instalações. O problema do custo de construção para uma instalação é exatamente aquele colocado pelo jogo do aeroporto. Assim, resta saber como calcular o valor de Shapley para os custos de manutenção de uma instalação. Supõe-se que os custos de manutenção são crescentes com o nível de sofisticação da infraestrutura exigido por cada tipo de trem e são proporcionais ao número de viagens realizadas.

A definição formal do jogo do custo de manutenção é a seguinte. Dado k tipos de trens g_1, \dots, g_k contando respectivamente com n_1, \dots, n_k elementos e considerando a existência de $k(k+1)/2$ números não negativos $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j \in \{1, \dots, k\}, j \geq i}$, o jogo do custo de manutenção correspondente é o jogo cooperativo (N, c) com $N = \bigcup_{i=1}^k g_i$ e função custo de manutenção c definida por:

$$c(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} |S \cap g_i| A_{i,j(S)}, \forall S \subseteq N, \quad (5)$$

onde $A_{i,j} = \alpha_{i,i} + \dots + \alpha_{i,j}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ com $j \geq i$; e $j(S) = \max\{i: S \cap g_i \neq \emptyset\}$ é o grupo com mais alto custo contendo membros em S . Percebe-se que (N, c) é um problema de alocação no qual $c(N) = \sum_{i=1}^k |g_i| A_{i,k}$ é o custo total alocado aos trens que utilizam a instalação.

O significado dos números α_{ij} é o seguinte. Assume-se que um trem pertencente ao tipo i utilizou determinada infraestrutura. Para restaurá-la até o nível j (com $j \geq i$), os custos de manutenção são $A_{ij} = \alpha_{i,i} + \dots + \alpha_{i,j}$, sendo que quanto maior for j , e por consequência o nível da restauração, maiores serão os custos. Assim, $c(S)$ expressa o custo de manutenção

correspondente ao restabelecimento da infraestrutura até o nível $j(S)$ (ou seja, o nível mais sofisticado requerido pelos jogadores em S).

Fraggelli et al. (2000) fornecem uma fórmula para o cálculo do valor de Shapley para um jogo de custo de manutenção, pois, tal qual o jogo do aeroporto, o grande número de jogadores (trens) pode trazer dificuldades ao cálculo. Portanto,

$$\phi_i(c) = \alpha_{l,l} + \sum_{h=l+1}^k \alpha_{l,h} \frac{n_h + \dots + n_k}{n_h + \dots + n_{k+1}} + \sum_{h=2}^l \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_k)(n_h + \dots + n_{k+1})}, \quad (6)$$

onde i é o jogador e l é o grupo ao qual ele pertence. Isto é, $i \in g_l$, para $l = 1, \dots, k$.

Assim, explorando a propriedade da aditividade do valor de Shapley, o resultado final do processo de alocação do custo de infraestrutura pode ser calculado como a soma, para cada jogador, do valor de Shapley do jogo do aeroporto e o valor de Shapley do jogo do custo de manutenção.

Fraggelli et al. (2000) ilustram os resultados com um conjunto de dados provenientes das ferrovias italianas. Os autores se concentram em um único elemento da infraestrutura, a pista, mas, esta foi dividida em duas instalações: “renovação de pista” e “reparação de pista”. Em resumo, há dois tipos de custos (custo de renovação da pista e custo de reparação da pista), que dependem do tipo de trem (lento ou rápido) e do número de trens que circulam.

Para os dois tipos de trem foram estimadas as funções “custo de renovação de pista” e “custo de reparação de pista”. Cada uma delas contém um elemento fixo e uma parte que é proporcional ao número de trens circulando, calculadas respectivamente pelo valor de Shapley do jogo do aeroporto e o valor de Shapley do jogo do custo de manutenção, que em conjunto formam o jogo do custo de infraestrutura.

Então, considerando que a pista será utilizada durante um ano por aproximadamente 20.000 trens (ou viagens), sendo 5.000 trens rápidos e 15.000 lentos, e de posse dos dados sobre o sistema ferroviário foram estimadas as funções custo e posteriormente encontradas as alocações finais, que são as taxas cobradas de cada tipo de trem por quilômetro utilizado de

pista. O resultado mostra uma diferença de 0,50 (em francos suíços) a favor dos trens rápidos que, conforme explicam Fragnelli et al. (2000), de fato precisam de uma pista mais sofisticada em comparação aos trens lentos (ou locais) para os quais os serviços mais importantes são aqueles relacionados às estações de passageiros.

2.4 Jogo da rodovia

Em uma tendência verificada mais recentemente, o valor de Shapley e outros conceitos de solução cooperativa vêm sendo utilizados na análise de custos relacionados a rodovias. Por exemplo, Castaño-Pardo e Garcia-Diaz (1995), utilizando dados de estradas no Texas (EUA), investigaram a alocação dos custos de construção e reparação de rodovias entre seus usuários, sendo um dos primeiros trabalhos a identificar os jogadores como equivalente às viagens realizadas na rodovia. Grahn-Voorneveld (2012) estudou o problema de alocação dos custos de estradas particulares entre seus usuários na Suécia, onde grande parte do sistema rodoviário é de propriedade privada. E Kuipers et al. (2013) estabeleceram o chamado jogo da rodovia e o aplicaram na definição dos valores do pedágio em uma estrada na Espanha.

Concentrando a análise no trabalho de Kuipers et al. (2013), os autores consideram que um jogador é cada viagem realizada (sendo que uma viagem é delimitada por um par entrada/saída da rodovia), e os resultados para os pedágios calculados com base no valor de Shapley – e também no *nucleolus* – são comparados com os valores cobrados na prática. As características e suposições do jogo da rodovia estão descritas a seguir.

Em uma dada rodovia linear (sem ramificações) existem vários pontos de entrada e saída que são considerados de forma ordenada e dividem a rodovia em um conjunto de seções, de modo que cada viagem que ocorre faz uso de um conjunto consecutivo dessas seções. Para cobrir os custos oriundos da construção da rodovia (ou equivalentemente, o custo de cada seção que a forma), a empresa concessionária cobra um pedágio das viagens que são

realizadas, assumindo que a direção em que acontecem as viagens não tem importância no estabelecimento do valor. Kuipers et al. (2013) buscam uma forma de alocar esse pedágio por meio da teoria dos jogos cooperativos.

Um problema que possui essas características é representado por (N, M, C, T) , onde N é o conjunto de todas as viagens que acontecem na rodovia; $M = \{t_1, \dots, t_m\}$ é o conjunto ordenado de seções que formam a rodovia, tal que $(t_1 \leq \dots \leq t_m)$; $C: M \rightarrow R$ é a função que indica o custo de cada seção da rodovia; e $T: N \rightarrow 2^m$ é uma função que a cada viagem $i \in N$ designa o conjunto de seções $T(i) \subseteq M$ da rodovia que foram utilizadas. Uma vez que toda viagem usa um conjunto de seções consecutivas, estabelece-se que cada $T(i)$ é da forma $\{t \in M | a_i \leq t \leq b_i\}$, onde a_i é a primeira seção (mínima no ordenamento) usada pelo agente i , e b_i é a última seção (máxima no ordenamento) usada por i . Também foi estabelecido que cada seção tem que ser utilizada por pelo menos uma viagem, isto é, deve ser atendida a condição $\bigcup_{i \in N} T(i) = M$.

Dadas essas suposições, a questão investigada por Kuipers et al. (2013) é como atribuir o pedágio a cada viagem realizada, ou, como alocar os custos da rodovia entre as diferentes viagens. Para isso, a cada problema (N, M, C, T) define-se o jogo da rodovia (N, c) pela seguinte função custo.

$$c(S) = C(T(S)), \forall S \subseteq N, \quad (7)$$

em que para cada $S \subseteq N$, a notação $T(S)$ significa $\bigcup_{i \in S} T(i)$ e para cada $M' \subseteq M$, a notação $C(M')$ significa $\sum_{t \in M'} C(t)$. Isto é, o custo $c(S)$ incorrido pela coalizão S é definido como o custo total das seções usadas por membros de S .

Kuipers et al. (2013) afirmam que, no caso de jogos de rodovia⁵, o valor de Shapley tem interpretação intuitiva e pode ser representado por expressão bastante simples e fácil de

⁵ Ou, de um modo geral, jogos em que vários agentes usam o mesmo recurso público, onde o recurso consiste em um número finito de seções ordenadas (cada uma com seu custo correspondente) e em que cada agente faz uso de um conjunto consecutivo dessas seções.

calcular. Os autores verificaram que o valor de Shapley aloca o custo de cada seção igualmente entre os veículos que a utilizam, de modo que ele pode ser representado pela fórmula a seguir.

$$\phi_i(c) = \sum_{t \in T(i)} \frac{c(t)}{|\{j \in N | t \in T(j)\}|} \quad (8)$$

para cada problema (N, M, C, T) e cada viagem $i \in N$. Percebe-se que o valor ϕ aloca o custo total, o que decorre do fato de que $\bigcup_{i \in N} T(i) = M$. O termo $\sum_{t \in M} C(t)$ é o custo total de um problema de rodovia (N, M, C, T) .

Essa interpretação do valor de Shapley tem a influência do jogo do aeroporto. De fato, Kuipers et al. (2013) afirmam que a classe de jogos do aeroporto é uma subclasse especial de jogos da rodovia, que podem ser vistos como uma forma generalizada.

Os autores aplicam o modelo em dados de uma rodovia com pedágio localizada no norte da Espanha que conecta as cidades de Bilbao e Zaragoza e em sua extensão (295 km) tem 23 pontos de entrada/saída (portanto, 23 seções). Na prática existem três taxas diferentes para serem estabelecidas conforme o tipo de veículo – veículos leves, caminhões leves e caminhões pesados – mas, para simplificar restringiu-se a análise aos veículos leves (carros e motos).

Na realização dos cálculos os autores consideraram o número total de viagens que utilizaram cada seção da rodovia ao longo do ano de 2007 em qualquer direção. Para estimar os custos supôs-se que o custo total de cada seção é precisamente o valor total que a empresa concessionária coletou nessa seção com a cobrança do pedágio. Portanto, como os autores consideraram o mesmo valor, o que o trabalho propõe é uma nova forma de alocar esses custos entre os veículos.

Os resultados mostram que a cobrança de pedágio seguindo a metodologia estabelecida do valor de Shapley apresenta valores bem perto das taxas oficiais. Kuipers et al. (2013) consideram que tal resultado era de se esperar, uma vez que a taxa oficial utilizou

premissa semelhante: alocar em separado o custo de cada seção entre as viagens que a utilizam. Já o *nucleolus* apresentou resultados distintos, pois, gerou uma cobrança de pedágio quase fixa nas diferentes seções que são percorridas na rodovia, o que está relacionado com características específicas desse conceito de solução não analisadas neste capítulo.

3 Considerações Finais

Este capítulo teve o objetivo de fazer uma revisão de literatura com o intuito de fornecer exemplos de aplicações e adaptações do valor de Shapley, especialmente aquelas relacionadas com o problema de alocação de custos quando diferentes jogadores se reúnem para realizar um projeto conjunto, um dos campos onde houve mais disseminação dos conceitos de solução cooperativa.

Embora haja reconhecidamente na literatura uma quantidade mais significativa de estudos no ramo não cooperativo da teoria dos jogos, os jogos cooperativos se destacam pelo elevado número de aplicações envolvendo problemas e situações do mundo real. Conseqüentemente, além daqueles relacionados com problemas de alocação de custos vistos nesse trabalho, muitos outros modelos e aplicações práticas podem ser estudados em futuras revisões.

Foram revisadas nesse capítulo quatro aplicações do valor de Shapley: alocação dos custos de um sistema regional de tratamento de esgoto; alocação dos custos de construção de uma pista de pouso (jogo do aeroporto); alocação dos custos de infraestrutura do sistema ferroviário (jogo do custo de infraestrutura); e estabelecimento dos valores do pedágio em uma estrada (jogo da rodovia). Em comum, as quatro aplicações apresentam uma adaptação da fórmula do valor de Shapley para jogos com grande quantidade de jogadores com a intenção de reduzir o número de cálculos em comparação à fórmula original.

Ademais, observou-se a grande influência que o jogo do aeroporto teve sobre aplicações posteriores que utilizaram o valor de Shapley, como o jogo do custo de infraestrutura e o jogo da rodovia, entre outras. De fato, o jogo do aeroporto é provavelmente um dos problemas de distribuição de custos mais estudados e citados nas últimas décadas, contribuindo ainda mais para a disseminação e consolidação do método de alocação do valor de Shapley.

4 Referências

- CASTAÑO-PARDO, A.; GARCIA-DIAZ, A. Highway cost allocation: An application of the theory of nonatomic games. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 29, n. 3, p. 187-203, 1995.
- COX JR, L. A. A new measure of attributable risk for public health applications. **Management Science**, v. 31, n. 7, p. 800-813, 1985.
- FIESTRAS-JANEIRO, M. G.; GARCÍA-JURADO, I.; MOSQUERA, M. A. Cooperative games and cost allocation problems. **Top**, v. 19, n. 1, p. 1-22, 2011.
- FRAGNELLI, V.; GARCÍA-JURADO, I.; NORDE, H.; PATRONE, F.; TIJS, S. How to share railways infrastructure costs? In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 91-101.
- FRAGNELLI, V.; IANDOLINO, A. A cost allocation problem in urban solid wastes collection and disposal. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 59, n. 3, p. 447-463, 2004.
- GRAHN-VOORNEVELD, S. Sharing costs in Swedish road ownership associations. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 46, n. 4, p. 645-651, 2012.
- KUIPERS, J.; MOSQUERA, M.; ZARZUELO, J. Sharing costs in highways: A game theoretic approach. **European Journal of Operational Research**, v. 228, n. 1, p. 158-168, 2013.

LAND, M.; GEFELLER, O. A multiplicative variant of the Shapley value for factorizing the risk of disease. In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 143-158

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A simple expression for the shapley value in a special case. **Management Science**, v. 20, n. 3, 370-372, 1973.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A further note on the nucleolus of the airport game. **International Journal of Game Theory**, v. 5, n. 2-3, p. 91-95, 1976.

LOEHMAN, E.; ORLANDO, J.; TSCHIRHART, J.; WHINSTON, A. Cost allocation for a regional wastewater treatment system. **Water resources research**, v. 15, n. 2, p. 193-202, 1979.

MOULIN, H. An application of the Shapley value to fair division with money. **Econometrica**, v. 60, n. 6, p. 1331-1349, 1992.

MYERSON, R. B. **Game theory: an analysis of conflict**. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

NORDE. H.; FRAGNELLI, V.; GARCIA-JURADO, I.; PATRONE, F.; TIJS. S.; Balancedness of Infrastructure Cost Games, **European Journal of Operational Research**, v. 136, n. 3, p. 635-654, 2002.

OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **A course in game theory**. Cambridge: MIT Press, 1994.

PATRONE, F.; GARCÍA-JURADO, I.; TIJS, S (Ed.). **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer Science & Business Media, 2000.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. **Contributions to the Theory of Games**, v. 2, n. 28, p. 307-317, 1953.

SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. **American Political Science Review**, v. 48, n. 3, p. 787-792, 1954.

TIJS, S.; DRIESSEN, T. Game Theory and Cost Allocation Problems. **Management Science**, v. 32, n. 8, 1015-1028, 1986.

WIDGRÉN, M. Voting power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements. **European Economic Review**, v. 38, n. 5, p. 1153-1170, 1994.

WINTER, E. The shapley value. In: AUMANN, R. J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 3. New York: Elsevier Science, 2002. p. 2025-2054.

YOUNG, H.P. Cost allocation. In: AUMANN, R.J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 2. New York: Elsevier Science, 1994. p. 1192-1235.

CAPÍTULO 4

ARTIGO 1: UMA APLICAÇÃO DO VALOR DE SHAPLEY À DISTRIBUIÇÃO DA COMPENSAÇÃO FINANCEIRA HIDRELÉTRICA

1 Introdução

A Constituição Federal brasileira de 1988 assegurou que os municípios com áreas atingidas pela construção de uma usina hidrelétrica (UHE) devem receber uma compensação financeira, que é uma indenização mensal que as empresas de energia hidrelétrica pagam a estados, municípios e órgãos da União pela exploração de recursos hídricos. A primeira regulamentação sobre o tema foi publicada na Lei nº 7.990/1989, sendo que atualmente vigoram alterações da Lei nº 9.984/2000. A Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) é o órgão que arrecada e distribui os recursos entre os beneficiários.

Conforme estabelecido pela legislação, as empresas de geração hidrelétrica devem reservar 6,75% do valor total da energia produzida mensalmente para o pagamento da compensação financeira. Destes, 6% são repartidos entre estados, municípios e órgãos da União da seguinte forma: 45% desse valor destinam-se aos municípios beneficiários, enquanto que os estados têm direito a outros 45%. Os 10% restantes são repartidos entre os Ministérios do Meio Ambiente e de Minas e Energia, e o Fundo Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico¹. Informações disponíveis até dezembro de 2014 em ANEEL (2014) indicam que 183 UHE's pagam compensação financeira no Brasil a 22 estados e 719 municípios. Para o ano de 2014 foi arrecadado um total de R\$ 2.259.397.867,83.

A alocação do valor entre os municípios atingidos é proporcional à área inundada, que equivale ao nível associado à vazão de cheia máxima prevista no respectivo projeto da UHE a

¹ O percentual de 0,75% restante do valor da energia produzida é repassado ao Ministério do Meio Ambiente para a implantação da Política Nacional de Recursos Hídricos e do Sistema Nacional de Gerenciamento de Recursos Hídricos, sob a responsabilidade da Agência Nacional das Águas (ANA).

partir do leito original dos rios². Porém, a distribuição da compensação financeira feita de forma proporcional apenas à área inundada é discutível, visto que o processo de construção e operação das UHE's gera significativa quantidade de impactos negativos – ambientais, sociais, econômicos, entre outros – que vão além da perda territorial, como retratam McCully (2004), Tilt et al. (2009) e Pereira (2013). Dado que estes impactos não são incluídos como critérios diretos de alocação, abre-se espaço para o questionamento da atual forma de distribuição da compensação financeira.

Visto que problemas de alocação podem ser analisados por meio da teoria dos jogos cooperativos, o presente trabalho tem como objetivo propor uma forma de distribuir a compensação financeira entre os municípios beneficiários utilizando o valor de Shapley, conceito de solução cooperativa comumente utilizado como método de alocação. Acredita-se que esta seja uma metodologia com características que permitem sua inclusão nas discussões sobre as indenizações pagas pelas hidrelétricas, uma vez que a proposta apresentada do valor de Shapley possibilita que se leve em conta conjuntamente diferentes critérios de alocação. A inclusão de vários critérios se justifica na hipótese de que a distribuição da compensação financeira como está determinada na legislação brasileira não considera (e não permite incluir) os diversos danos sofridos pelos municípios no processo de construção e operação das usinas. A utilização do valor de Shapley em problemas de alocação relacionados com recursos hídricos é recorrente na literatura. Pode-se citar, por exemplo, Loehman et al. (1979), Young et al. (1982), Dinar et al. (1986) e Leite e Vieira (2010).

O caso analisado foi a UHE Itapebi, localizada na divisa entre a Bahia e Minas Gerais, onde os estudos de Gavião (2006) e Pereira (2011) deixam em evidência a existência de

² Existe outro critério, o repasse por ganho de energia por regularização de vazão, que está relacionado ao fato de que o total de energia gerada em algumas usinas não se deve apenas à água existente em seu próprio reservatório, parte dessa energia produzida só é possível devido à água represada nos reservatórios de outras usinas no mesmo rio ou na mesma bacia (ANEEL, 2014). Todavia, esse caso é uma exceção, pois, a maior parte dos municípios recebe somente conforme o critério da área inundada (como no estudo de caso descrito na seção 3).

muitos impactos negativos além da perda territorial. Dado que o montante a ser distribuído já foi fixado pela legislação (6,75% do valor total da energia gerada mensalmente em cada UHE) a análise feita nesse trabalho tem como foco apenas a alocação do recurso. Com o grande potencial hidrelétrico do Brasil a tendência é que a discussão sobre a distribuição da compensação financeira hidrelétrica permaneça relevante. A maior parte dos trabalhos existentes³ que tratam do assunto discute o destino dado ao recurso ou seu impacto sobre o orçamento municipal. Porém, não foram localizados trabalhos debatendo a metodologia de alocação desse benefício entre os municípios afetados.

O artigo está dividido em mais quatro seções após esta introdução. Na segunda seção é apresentado o valor de Shapley, bem como as características da sua adoção nesse trabalho. A terceira seção mostra o panorama das hidrelétricas, em especial a UHE Itapebi, e a fonte de dados. Na quarta seção, apresentam-se os resultados do valor de Shapley para três diferentes cenários de distribuição da compensação financeira, comparando-os com a distribuição verificada no ano de 2014. Também faz parte dessa seção um debate a respeito das vantagens e limitações da metodologia de alocação adotada. Por fim, a quinta seção traz as principais conclusões.

2 Metodologia

2.1 Teoria dos jogos cooperativos e valor de Shapley

A análise de problemas econômicos de alocação tem se baseado de forma recorrente na utilização de conceitos de solução da teoria dos jogos cooperativos como o valor de Shapley⁴. Ainda que as publicações mais difundidas na área se concentrem em analisar custos

³ Ver, por exemplo, Silva (2007), Oliveira (2008) e Quintela e Carvalho (2010).

⁴ De acordo com Myerson (1991), teoricamente o jogo cooperativo se distingue do não cooperativo devido ao fato de que os jogadores podem negociar entre si (ou seja, buscar acordos) e formar coalizões de modo que a cooperação traga a eles algum ganho.

– como Lemaire (1984), Tijs e Driessen (1986) e Young (1994) – um problema de alocação de benefícios é equivalente. Como lembram Fiestras-Janeiro et al. (2011) uma vez que o benefício de uma coalizão de jogadores é a soma dos custos individuais menos o custo de toda a coalizão, então conclui-se que um problema de alocação de custos gera um problema de alocação de benefícios e vice-versa⁵.

A representação de um jogo cooperativo se dá por meio da chamada função característica, que é a forma pela qual se indica o valor de uma coalizão de jogadores e se descrevem as possibilidades de cooperação. De acordo com Mas-Colell et al. (1995), a função característica apresenta uma descrição dos *payoffs* disponíveis para diferentes grupos de jogadores em um contexto onde acordos de compromisso entre eles são viáveis.

Em termos de notações, um jogo cooperativo é caracterizado como segue. Seja $N = \{1, \dots, n\}$ um conjunto finito que representa o universo de jogadores, a grande coalizão. Cada subconjunto não vazio de N é uma coalizão. Para cada coalizão S , especifica-se um conjunto $v(S) \subset \mathbb{R}^S$ contendo vetores de *payoff* de s dimensões⁶ que são viáveis para a coalizão S . Tem-se que v é exatamente a função característica que designa um número real $v(S)$ para cada coalizão S , com $v(N)$ indicando o valor da grande coalizão e $v(\emptyset) = 0$. O par (N, v) é utilizado para resumir um jogo cooperativo.

Montet e Serra (2003) afirmam que na maior parte das vezes, as coalizões possíveis e o conjunto viável de *payoffs* disponível para seus membros são dados, de modo que a questão a ser tratada é a identificação do *payoff* alocado a cada jogador em determinada negociação. Ademais, Serrano (2012) observa que a maioria dos casos concentra-se nas soluções

⁵ A título de informação, além dos problemas de alocação o valor de Shapley é bastante utilizado como ferramenta nos jogos simples, que são modelos naturais de regras de votação em parlamentos, conselhos de acionistas, etc. Nesse tipo de aplicação, contribuição de Shapley e Shubik (1954), o valor de Shapley é empregado para calcular o poder de um jogador dentro de um jogo. Os jogos simples trabalham com conceitos como coalizão vencedora (aquela que consegue aprovar um projeto de lei em um parlamento, por exemplo), coalizão perdedora e jogador essencial (que ao entrar em uma coalizão a torna vencedora) que não são características encontradas em um problema de alocação e, por este motivo, não são abordados neste trabalho.

⁶ Lembrando que enquanto a indicação de um conjunto se dá por letra maiúscula, S , o número de elementos desse conjunto, s , é indicado por letra minúscula. De modo que $S = \{1, \dots, s\}$.

sustentadas na forma da grande coalizão, em que a cooperação total é alcançada e $v(N)$ é o montante a ser alocado entre os N jogadores. Ambas as definições abrem espaço para que se apresente uma forma de encontrar o resultado de um problema de alocação. Para isso, um importante conceito de solução é o valor de Shapley.

Com o intuito de resumir as diversas possibilidades enfrentadas pelos jogadores em um jogo na forma de função característica, Shapley (1953) propôs em seu trabalho pioneiro um método de solução representado por um valor único de problemas de alocação entre os agentes que fazem parte de um jogo, quando se leva em conta o valor de cada coalizão S .

Shapley (1953) definiu o valor $\phi(v)$ do jogo (N, v) como sendo uma função que associa com cada i em N , um número real $\phi_i(v)$ que deve atender as condições de um conjunto de quatro axiomas:

A1: Eficiência: $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$, que diz que a soma dos *payoffs* de todos os jogadores deve igualar $v(N)$, o valor total do jogo.

A2: Simetria: para qualquer permutação π de v e cada jogador i tem-se que $\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v)$, em que a permutação simboliza apenas um rearranjo de jogadores no jogo. Isso significa que se houver um reordenamento de i no jogo, seu valor $\phi_i(v)$ não se altera, pois, o que importa na determinação do valor é como a função característica responde à presença de um jogador em uma coalizão.

A3: Aditividade: para quaisquer jogos v e w , $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$ para todo i em N , em que o jogo $[v + w]$ é definido por $[v + w](S) = v(S) + w(S)$ para qualquer coalizão S . Ou seja, o valor da soma de dois jogos deve ser igual à soma do que é recebido separadamente em cada um deles.

A4: Jogador *dummy*. Um jogador i é *dummy* se $v(S) - v(S - \{i\}) = v(\{i\})$ para cada coalizão S em que ele não estiver, de modo que $\phi_i(v) = v(\{i\})$. O axioma do jogador *dummy*

diz que se um jogador não contribui com nada adicional ao se associar a uma coalizão (além do seu próprio valor), a solução lhe reservará apenas seu valor individual $v(\{i\})$.

Shapley (1953) mostrou que há um método de solução de valor único para problemas de alocação que satisfazem esses quatro axiomas. O valor de Shapley, como passou a ser conhecido desde então, é a função que determina para cada jogador i o *payoff*:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \times [v(S) - v(S - \{i\})], \forall i \in N, \quad (1)$$

em que n é o número de elementos do conjunto N ; s é o número de jogadores na coalizão S ; e a expressão $v(S) - v(S - \{i\})$ representa a contribuição marginal do jogador i quando ele se associa a outros jogadores para formar a coalizão S . Conforme afirmou o próprio Shapley (1953), não é preciso nenhuma condição adicional, além desses quatro axiomas, para determinar o valor de um jogo cooperativo de forma única.

Segundo Roth (1988), o valor de Shapley desde sua publicação em 1953 tem sido usado como regra de alocação em ampla variedade de contextos econômicos e despertado contínuo interesse dos estudiosos dos jogos cooperativos, fazendo com que problemas de alocação – como a distribuição da compensação financeira hidrelétrica – sejam um campo fértil para sua aplicação. Montet e Serra (2003) lembram que o valor de Shapley é uma medida relativamente fácil de computar e existe para todos os jogos cooperativos, o que é uma vantagem em relação ao *core*, que pode ser vazio. Para Hart (1989), a fórmula desenvolvida para o valor de Shapley é impressionante porque ela é consequência de axiomas básicos e porque a ideia de contribuição marginal na qual ela se baseia é fundamental em muitas análises econômicas.

2.2 Valor de Shapley aplicado à distribuição da compensação financeira hidrelétrica

Observando a equação (1) e a interpretando pela ótica da distribuição da compensação financeira hidrelétrica, tem-se que o valor $v(S)$ de cada possível coalizão S está relacionado com o critério escolhido para alocar o recurso entre os municípios. Se for levada em conta a legislação atual sobre o assunto, esse critério é exatamente a área inundada.

Contudo, acredita-se que distribuir a compensação financeira hidrelétrica seguindo apenas um critério seria demasiadamente restritivo, pois, a perda territorial não retrata todos os danos sofridos pelas populações afetadas. Como o processo de construção e operação das hidrelétricas tem gerado considerável quantidade de impactos negativos que vão além da área inundada há uma multiplicidade de fatores que deveriam ser incluídos como critérios de alocação da compensação no momento de indenizar os municípios. Como lembram Brown et al. (2009), para atender às demandas simultâneas de água, energia e proteção ambiental será cada vez mais necessária uma visão multidisciplinar nos estudos sobre hidrelétricas e represas.

Visto isso, propõe-se a obtenção do valor de Shapley de um problema de alocação, indicado agora por $\Phi(v)$, como sendo uma combinação convexa de diversos critérios identificados como relevantes em determinada localidade em que se instalou uma hidrelétrica. Esses critérios são reunidos por meio de uma função de utilidade linear que também pode ser vista como uma função de *payoff*, na linguagem característica da teoria dos jogos. Assim, tem-se a seguinte expressão para o jogador i :

$$\Phi_i(v) = \alpha_1 \times \phi_i(v_1) + \alpha_2 \times \phi_i(v_2) + \dots + \alpha_{m-1} \times \phi_i(v_{m-1}) + \alpha_m \times \phi_i(v_m) \quad (2)$$

A equação (2) indica a existência de m critérios de alocação (m jogos), v_1, \dots, v_m , e seus respectivos “valores” de Shapley $\phi_i(v_1), \dots, \phi_i(v_m)$, em que o subscrito i indica o jogador (o município beneficiário). Os termos α_j com $j = 1, \dots, m$ são ponderações pertencentes ao intervalo $[0,1]$ e que devem seguir a restrição $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. Essas ponderações indicam o peso relativo de cada critério, simbolizando sua importância. Portanto, a

distribuição da compensação financeira hidrelétrica pode levar em conta agora diversos critérios possíveis de serem mensurados e tidos como relevantes. Estes critérios representam diferentes jogos que, ao serem somados, exploram a propriedade da aditividade que caracteriza o valor de Shapley, como se vê em Fragnelli et al. (2000) e Fragnelli e Iandolino (2004).

Percebe-se que a legislação brasileira assume que os municípios têm uma função de *payoff* bastante específica, pois, estabeleceu um único critério de distribuição da compensação. Basicamente o que a equação (2) diz é que existe a possibilidade de se considerar outros critérios e eles serão combinados por meio de uma função de utilidade linear. Essa representação possibilita que se leve em conta simultaneamente diferentes critérios de alocação, surgindo a oportunidade de retratar a multiplicidade de impactos oriundos da instalação e operação das hidrelétricas. Ademais, a existência das ponderações possibilita a construção de diferentes cenários, alterando os pesos conforme características da região em análise e adequando-se a uma variedade de contextos. As vantagens e limitações desse método são discutidas na seção 4.4, após a obtenção dos resultados da aplicação.

2.3 Axioma da linearidade

Em relação aos pesos que indicam a importância de cada critério, a possibilidade de incluí-los é consequência do axioma da linearidade, que comprova que a soma ponderada dos “valores” de Shapley equivale a uma simples soma de diferentes jogos. De acordo com Myerson (1991), este axioma pode substituir o axioma da aditividade, pois, são intimamente relacionados. Considerando que v e w são dois diferentes jogos na forma de função característica do conjunto de jogadores N e que p é qualquer número entre 0 e 1, a linearidade pode ser compreendida considerando um jogo $pv + (1 - p)w$ em que para cada coalizão S ,

$$(pv + (1 - p)w)(S) = pv(S) + (1 - p)w(S).$$

Myerson (1991) explica que para interpretar esse jogo deve-se supor que os jogadores em N jogarão amanhã ou o jogo v ou o jogo w , conforme algum evento aleatório a se observar, sendo p a probabilidade que o jogo será v e $1 - p$ a probabilidade que será w . Se os jogadores negociam hoje, planejando com antecedência suas estratégias para os movimentos de amanhã, então a situação enfrentada por eles hoje pode ser representada pelo jogo $pv + (1 - p)w$, em que qualquer coalizão S planejaria ganhar um valor esperado $pv(S) + (1 - p)w(S)$.

Pela função ϕ do valor de Shapley, se os jogadores barganham hoje, então o *payoff* esperado para o jogador i deveria ser $\phi_i(pv + (1 - p)w)$, mas se os jogadores barganham amanhã, então o *payoff* esperado de i deveria ser $p\phi_i(v) + (1 - p)\phi_i(w)$. Segundo Myerson (1991), o axioma da linearidade estabelece que o *payoff* esperado para cada jogador independe se os jogadores barganham sobre suas estratégias de coalizão hoje ou amanhã. Dessa forma, tem-se que: para quaisquer jogos v e w em \mathbb{R}^n , qualquer número p tal que $0 \leq p \leq 1$ e qualquer jogador i em N , $\phi_i(pv + (1 - p)w) = p\phi_i(v) + (1 - p)\phi_i(w)$. O lado direito desta última igualdade é equivalente à equação (2). Portanto, o axioma da linearidade evidencia que é possível realizar essa soma ponderada, pois, na verdade tudo acontece como se estivesse apenas somando dois jogos separados, v e w .

2.4 Suposições sobre a função característica

A última etapa para a obtenção do valor de Shapley é a determinação da função característica que indica o valor $v(S)$ de cada coalizão. Para isso, adota-se a hipótese do reconhecido trabalho de Littlechild e Owen (1973), no qual a função característica é uma função custo com a propriedade de que o custo de qualquer subconjunto de jogadores

equivale ao custo para atender ao maior jogador⁷. Faz-se necessário, entretanto, uma hipótese adicional: a compensação financeira recebida pelos municípios será obrigatoriamente gasta de modo a compensar os danos sofridos com a intervenção da hidrelétrica, ou seja, transformar-se-á em um custo com alguma melhoria.

Pela ótica apresentada em Littlechild e Owen (1973) existirão ganhos na formação de coalizões para arcar com esses custos de forma conjunta a outros jogadores. O mesmo pode ser visto em outros trabalhos. Por exemplo, na discussão vista em Loehman et al. (1979), se municípios vizinhos forem construir sistemas de tratamento de água é vantajoso que eles se unam e construam um só sistema, reduzindo seus custos individuais. Dinar et al. (2008) afirmam que existem grandes economias de escala relacionadas à infraestrutura em casos que envolvem recursos hídricos, tornando mais atraente construir projetos maiores, o que representa um incentivo para as considerações conjuntas entre os jogadores.

Sabendo, portanto, que a função característica será representada por uma função custo, o último passo é a obtenção dos seus valores. Seguindo a hipótese do custo do maior jogador, $c(S) = b_1 + \dots + b_{j(S)}$ é o custo para cada coalizão $S \subseteq N$, onde $j(S) = \max\{i: \forall i \in S\}$ e $c_i = \sum_{l=1}^i b_l$ é o custo individual para cada jogador i , com $b_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, n$. O termo b_i representa o custo extra que deveria ser feito de modo que uma instalação que atendia ao jogador $i - 1$ também possa atender i , considerando que os jogadores estão linearmente ordenados. Para encontrar os valores b_i segue-se a proposta de Fragnelli e Iandolino (2004) que dividem o valor da grande coalizão (custo total) proporcionalmente entre os jogadores de acordo com o critério em consideração. Assim, seja X_i o valor para cada jogador de um critério qualquer X e $c(N)$ o custo total a ser alocado, então⁸:

⁷ Posteriormente, diversos trabalhos que analisaram problemas de alocação adotaram a hipótese de Littlechild e Owen (1973), tais como Dubey (1982), Fragnelli et al. (2000) e Grahn-Voorneveld (2012).

⁸ Fragnelli e Iandolino (2004) apresentaram essa fórmula em um trabalho que utilizou o valor de Shapley na alocação entre diferentes municípios dos custos de coleta e tratamento de resíduos sólidos urbanos. Segundo os autores, esse método pode ser aplicado a uma ampla classe de problemas de alocação.

$$b_i = \frac{x_i}{x_1 + \dots + x_n} c(N), \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

3 A questão das usinas hidrelétricas

3.1 Conflitos e impactos negativos não considerados

As hidrelétricas têm contribuído positivamente para o desenvolvimento econômico através da maior oferta de energia elétrica e de empregos (ainda que muitos sejam temporários). Porém, têm causado também impactos negativos das mais variadas origens. Muitos trabalhos evidenciam a existência dessas perdas decorrentes de represas construídas não só para a geração de energia, mas também para fins de navegação e irrigação.

McCully (2004) traz extensa discussão a respeito das grandes represas e seus efeitos sobre os rios, o meio ambiente e a sociedade, além de detalhar conflitos em todo o mundo. Morimoto e Hope (2004) analisam a construção da UHE Três Gargantas na China, um caso de destaque dado a sua grandiosidade, e citam o desaparecimento de sítios arqueológicos, inundação de área agrícola e altamente povoada (1,98 milhões de pessoas removidas) e vários outros impactos. Born et al. (1998) destacam como mais significativos os impactos que as represas causam no sistema fluvial e, para o caso que estudaram no Wisconsin (EUA), apontam como maior dano o bloqueio à migração do salmão. Tilt et al. (2009) estudam projetos de construção de represas na África do Sul e na China e identificam vários impactos socioeconômicos: mudanças nas oportunidades de emprego, alteração do acesso e uso da terra, ruptura do bem estar social dos removidos, etc.

Pereira (2013), ao analisar a UHE Tucuruí na região Norte do Brasil, afirma que sua construção gerou um aumento da incidência de doenças, deslocamento de cerca de 30.000 pessoas incluindo comunidades indígenas e aumento da emissão de gases do efeito estufa, pois, parte da vegetação da área do reservatório não foi retirada. Gavião (2006) cita o caso da

UHE Serra da Mesa, no estado de Goiás. Considerada a última das hidrelétricas gigantescas construídas durante o período da ditadura brasileira, ela é descrita como um poço de conflitos, pois, teve seu licenciamento ambiental atropelado por uma “autorização de emergência” do Congresso.

Todas essas referências deixam claro que as perdas e conflitos dos mais variados graus e origens decorrentes da construção de hidrelétricas são fatos concretos. Contudo, McCully (2004) observa que a partir dos anos 1980, quando as preocupações ambientais ganharam força, surgiram movimentos que frearam um pouco o ritmo dessas construções, como a Comissão Mundial de Barragens (*World Commission on Dams*), órgão referência no assunto. Mas, a quantidade de represas ainda é expressiva e vem aumentando principalmente em países em ritmo acelerado de crescimento econômico. O mesmo cenário de perdas e conflitos vistos em represas e hidrelétricas de todo o mundo também acontece com a UHE Itapebi.

3.2 Usina Hidrelétrica Itapebi

Localizada no rio Jequitinhonha, ao sul do estado da Bahia e próximo a Minas Gerais, a UHE Itapebi iniciou suas operações em 2002. Com potência de 450 MW é considerada um empreendimento de médio porte, assegurando uma geração de 1,9 milhão MWh/ano. O reservatório possui um volume que pode chegar a 1,6 bilhões/m³, sendo que para sua construção foram inundadas terras de quatro municípios conforme a Tabela 1, onde estão reunidas também outras informações.

Tabela 1 – Dados dos municípios afetados pela UHE Itapebi

Município	UF	Área Inundada (km ²)	População (2010)	IDH (2010)	PIB <i>per capita</i> (2013)
Itagimirim	BA	18,53	7.110	0,634	R\$ 11.954,21
Itapebi	BA	32,18	10.495	0,572	R\$ 29.008,71
Itarantim	BA	8,31	18.539	0,610	R\$ 6.989,60
Salto da Divisa	MG	3,46	6.859	0,608	R\$ 10.793,57
TOTAL		62,48	-	-	-

Fonte: Aneel (2014)

A região onde se localiza a UHE Itapebi sempre teve dependência da agricultura e pouca atividade industrial. Segundo Pereira (2011), o ciclo econômico de maior destaque foi o cacau, fundamental para o povoamento da região. Também se destaca a pecuária, porém, o número de empregos oferecidos por este setor é reduzido. Atualmente, devido às áreas desmatadas e de pouco valor, vem aumentando o cultivo do eucalipto. Os municípios afetados pela construção da UHE Itapebi têm população pequena e Índice de Desenvolvimento Humano inferior à média do Brasil. Ademais, três deles têm PIB *per capita* abaixo da média brasileira, sendo que a única exceção é Itapebi, onde se encontra a sede da usina.

A construção da UHE Itapebi gerou vários impactos negativos e conflitos. Segundo Gavião (2006), a maior parte deles ocorreu em Salto da Divisa que, apesar de ter a menor área inundada, foi o único que perdeu área urbana, culminando com a demolição de 89 casas. Destaca-se também como fonte de conflito entre o empreendedor e a população do município, o fato de que a área alagada ameaçava levar à submersão da Cachoeira do Tombo da Fumaça, um importante marco de beleza cênica e patrimônio cultural, visto que seus saltos deram origem ao nome da cidade. No fim, a cachoeira foi de fato perdida, pois, não havia como instalar a UHE sem afetá-la.

Segundo Pereira (2011), entre os segmentos da população que mais sofreram danos e se envolveram nas discussões incluem-se pescadores, extratores de pedra e de areia, lavadeiras e aqueles removidos de suas casas. Alguns grupos afetados comprovadamente

tiveram um aumento da pobreza, como as pessoas que trabalhavam nas fazendas atingidas e não foram indenizadas pela perda de sua fonte de renda (somente os proprietários de terra tiveram seus direitos reconhecidos). Em relação à pesca, Gavião (2006) lembra que os estudos ambientais cometeram uma falha, pois, indicavam um aumento dos estoques pesqueiros com a construção da represa, mas, na realidade houve redução.

Salto da Divisa foi o município que concentrou mais conflitos, mas, as demais localidades também foram afetadas. Pereira (2011) conta que em Itarantim, seriam instaladas balsas para cruzar o rio, mas, isso não se concretizou. A dificuldade em cruzar o rio gerou o fim da feira de produtos agrícolas do município e prejudicou o tráfego em geral. Em Itapebi e Itagimirim, destaca-se a perda de qualidade dos serviços públicos que ficaram sobrecarregados pelo aumento populacional com a construção da UHE.

O que as referências indicam sobre a UHE Itapebi, e o que se tem visto no processo de construção de hidrelétricas em todo o mundo, é que muito impactos negativos não estão sendo considerados ao indenizar as populações atingidas, o que tem causado uma série de conflitos⁹. Dessa forma, visto que a instalação de hidrelétricas leva a um processo relevante de alterações sociais, econômicas, e ambientais, é preciso que a distribuição do recurso que irá compensar essas populações seja amplamente discutida e possa incluir critérios mais relevantes¹⁰. Uma sugestão na busca por critérios, além da própria área inundada, e que pode ser colocada em prática no caso da UHE Itapebi é analisar dados acerca da percepção dos moradores sobre as mudanças ocorridas com a chegada da hidrelétrica. Isso é descrito a seguir.

⁹ Obviamente, existem benefícios advindos da construção da UHE Itapebi. Contudo, o maior ganho apontado – melhoria da qualidade do sistema elétrico Norte-Nordeste – ocorreu para comunidades distantes. Por isso a necessidade de se realizar estudos nas localidades mais próximas que são as que concentram mais impactos negativos. Ademais, alguns benefícios que normalmente se apontam como consequência da construção de represas não estão evidentes na comunidade local, como a criação de áreas de recreação e a melhoria do potencial pesqueiro.

¹⁰ Deve-se se observar que algumas mitigações aconteceram no início da instalação da UHE Itapebi e são casos à parte do pagamento de compensações financeira, pois, alguns problemas requerem indenizações individuais e imediatas.

3.3 Fonte de dados

Para utilizar o valor de Shapley na distribuição da compensação financeira hidrelétrica são necessários os seguintes dados. Primeiro, o montante a ser alocado entre os municípios, que é equivalente ao valor total da compensação financeira paga pela UHE Itapebi no ano de 2014, R\$ 1.680.034,22, ao qual será proposta uma nova forma de alocação. Em segundo lugar, os valores de cada coalizão de jogadores, que são encontrados conforme as hipóteses sobre a função característica discutidas na seção 2.4. E, por fim, os dados sobre os critérios de alocação que escolhidos.

Em relação a esse último, foram considerados os seguintes critérios: a área inundada pelo reservatório (Tabela 1) e um novo critério chamado “ônus adicionais”, extraído do estudo “Desenvolvimento de metodologia de avaliação *ex post* dos impactos socioeconômicos e ambientais de empreendimentos hidrelétricos”, elaborado pelo Centro Brasileiro de Energia e Mudanças Climáticas (CBEM) e financiado pela Itapebi Grupo Neoenergia, com apoio do Grupo de Economia do Meio Ambiente (GEMA) do IE/UFRJ. A descrição dessa pesquisa pode ser vista em Young et al. (2011), Pereira (2011) e Lima (2012).

O nome ônus adicionais foi criado genericamente para representar num só critério a junção dos aspectos socioeconômicos, de saúde e saneamento, e de serviços públicos¹¹. Estes são importantes atributos relacionados ao bem-estar da população que podem ser impactados pelas atividades de uma hidrelétrica e, por isso, acredita-se que devam ser considerados na distribuição da compensação financeira. No que tange à sua obtenção, o estudo do CBEM aplicou questionários à população das cidades com perguntas sobre como se sentiram atingidos nos aspectos socioeconômicos, de saúde e saneamento, e de serviços públicos após a construção da hidrelétrica¹². De posse das respostas foi feita uma análise de agrupamento que

¹¹ Esses aspectos poderiam ser considerados como critérios separados caso fosse conveniente.

¹² Reconhece-se que a obtenção dos dados a partir de questionários tem suas imperfeições, como por exemplo: pode estar sujeito a comportamentos oportunistas dos entrevistados, pode acabar captando outras insatisfações não relacionadas à instalação da hidrelétrica, etc.

revelou a proporção de prejudicados em cada município, que são exatamente os dados que irão compor o critério dos ônus adicionais, simbolizando os impactos negativos (Tabela 2). Maior detalhamento acerca da obtenção dessas informações está no Anexo 1.

Tabela 2 – Dados utilizados para a formação do critério dos ônus adicionais

Município	Aspectos Socioeconômicos (Prejudicados (%))	Aspectos de Saúde e Saneamento (Prejudicados (%))	Aspectos de Serviços Públicos (Prejudicados (%))
Itagimirim	29,11	37,01	18,31
Itarantim	0,00	14,88	29,06
Itapebi	26,21	6,78	13,65
Salto da Divisa	44,68	41,33	38,98
Total	100	100	100,00

Fonte: Adaptado de Young et al. (2011), Pereira (2011) e (Lima (2012)).

4 Resultados

Foram utilizados dois critérios para alocar a compensação financeira entre os municípios: área inundada e ônus adicionais. O primeiro é o critério em vigência. A inclusão do segundo é a sugestão desse trabalho e visa atender às críticas vistas nas referências bibliográficas acerca dos impactos negativos não considerados na UHE Itapebi. Obtém-se, portanto, o valor de Shapley do jogo, $\Phi_i(v)$, como uma combinação convexa dos dois critérios, ou seja,

$$\Phi_i(v) = \alpha_1 \times \phi_i(v_1) + \alpha_2 \times \phi_i(v_2), \quad (4)$$

onde α_1 e $\phi_i(v_1)$ indicam respectivamente o peso e o valor de Shapley para o critério da área inundada e α_2 e $\phi_i(v_2)$ indicam o mesmo para os ônus adicionais. O valor obtido pela equação (4) é exatamente a compensação financeira que cada município vai receber e, conforme a suposição, será convertido em custos para reparar os danos devido à perda territorial e aos impactos negativos relacionados aos aspectos socioeconômicos, de saúde e saneamento, e de serviços públicos.

Representar os critérios junto a uma ponderação permite que se construam simulações de cenários para que se possa conjecturar sobre as possibilidades de um problema de alocação. Assim, os resultados das seções 4.1 a 4.3 simulam três diferentes cenários e seus valores foram comparados com a compensação financeira recebida pelos municípios no ano de 2014¹³.

4.1 Cenário 1: peso maior para o critério da área inundada

O Cenário 1 retrata uma situação em que a área inundada tem peso maior na distribuição da compensação financeira. Isso poderia acontecer, por exemplo, se a área alagada fosse de grande potencial agropecuário de modo que a perda territorial traria expressivos prejuízos ou se fossem importantes áreas de lazer e turismo. Seja qual for o motivo, o Cenário 1 é aquele em que a perda territorial realmente teria impactos maiores para os municípios, de modo que foi definido um peso maior para o critério da área inundada ($\alpha_1 = 0,9$) e um peso menor para o critério dos ônus adicionais ($\alpha_2 = 0,1$). Os resultados estão na Tabela 3.

Tabela 3 – Cenário 1: distribuição da compensação financeira (em R\$) com peso maior para o critério da área inundada

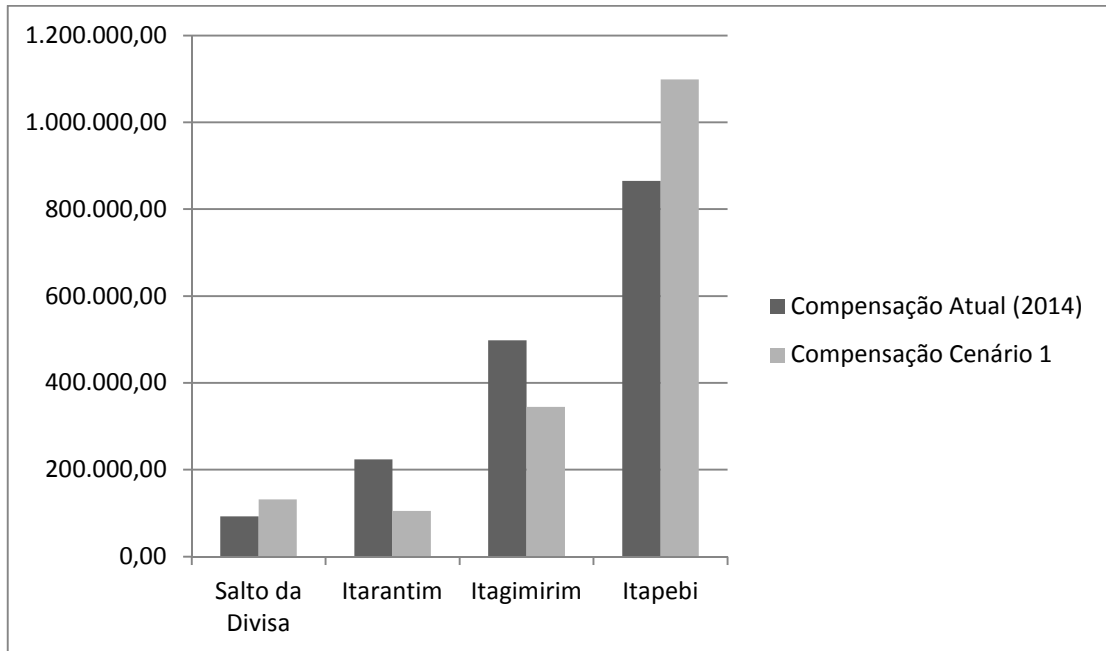
Município	Compensação Atual (2014)	Compensação Cenário 1
Salto da Divisa	93.039,58	131.525,75
Itarantim	223.532,33	105.160,90
Itagimirim	498.317,60	344.647,67
Itapebi	865.144,71	1.098.699,90
TOTAL	1.680.034,22	1.680.034,22

Fonte: Resultados da pesquisa

A coluna “Compensação Atual” mostra os valores que foram recebidos pelos municípios de acordo com a fórmula vigente para dados de 2014. Enquanto a coluna

¹³ Todos os cálculos para obtenção dos resultados das próximas seções estão no Anexo 2.

“Compensação Cenário 1” mostra os valores encontrados pela aplicação do valor de Shapley nesse cenário. A Figura 1 apresenta de forma mais clara essa comparação.



Fonte: Resultados da pesquisa

Figura 1 – Comparação entre o Cenário Atual (2014) e o Cenário 1

Observa-se que o Cenário 1 indica uma distribuição da compensação financeira que privilegia Itapebi, o município com maior área alagada e onde fica a sede da usina. No total de compensação distribuído em 2014 Itapebi recebeu R\$ 865.144,71. Já quando se considera o valor de Shapley e os pesos estabelecidos nesse cenário o montante recebido pelo município torna-se mais elevado, alcançando R\$ 1.098.699,90. Uma hipótese para o aumento de valor mesmo incluindo os ônus adicionais está no fato de que Itapebi também sofreu alguns impactos negativos. Exatamente por ser a sede da UHE, foi o município que recebeu o maior contingente populacional.

O município de Salto da Divisa, que tem a menor área inundada, apresentou pequena mudança no valor da compensação, aumentando de R\$ 93.039,58 para R\$ 131.525,75. Este aumento retrata a inclusão do critério dos ônus adicionais, pois, mesmo com um peso menor

já teve influência no valor recebido pelo município mais impactado negativamente nesse critério. Já Itarantim e Itagimirim apresentam reduções nos valores da compensação em comparação a 2014. Isso reflete a posição intermediária de ambos, visto que não são os com maior área inundada e nem os mais afetados pelos ônus adicionais.

4.2 Cenário 2: peso maior para o critério dos ônus adicionais

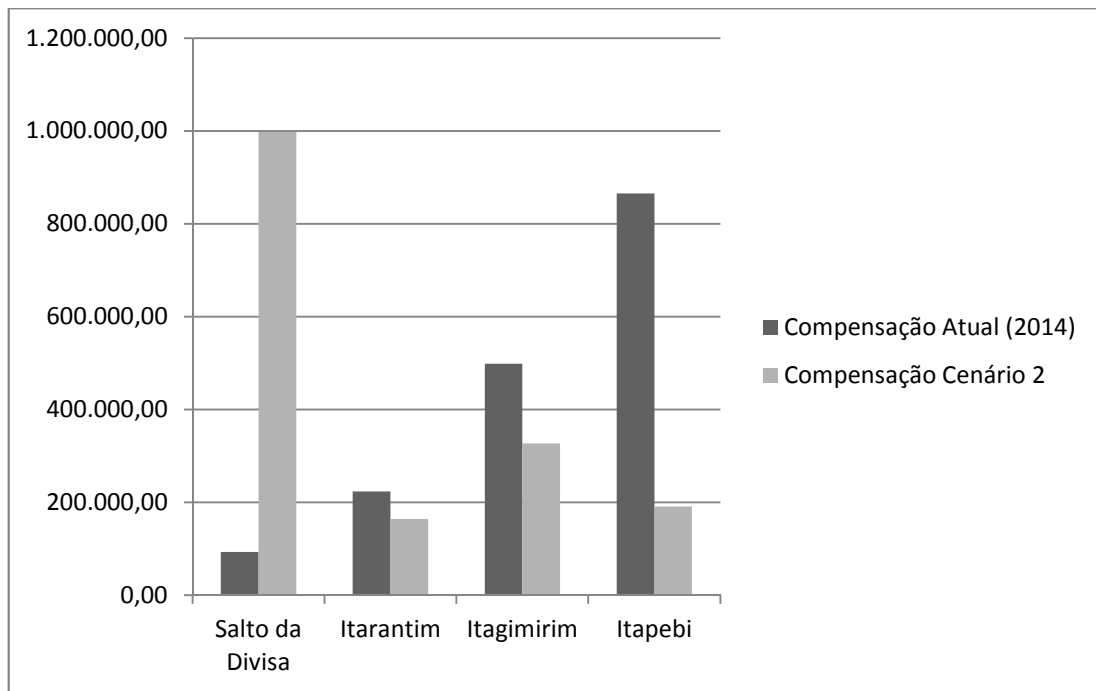
O Cenário 2 foi construído definindo-se um peso maior para os ônus adicionais na distribuição da compensação financeira, retratando um caso em que outros problemas, excluindo a área inundada, são mais relevantes. Por exemplo, a inundação de florestas com importante biodiversidade, a mortalidade de peixes prejudicando a fonte de renda dos pescadores, efeitos sobre a qualidade da água implicando em maior custo com tratamento, etc. O fato é que existe nesse cenário a possibilidade de que os diversos impactos negativos não considerados sejam devidamente reconhecidos no cálculo da compensação. Portanto, foi definido um peso menor para o critério da área inundada ($\alpha_1 = 0,1$) e um peso maior para o critério dos ônus adicionais ($\alpha_2 = 0,9$). A Tabela 4 mostra os resultados.

Tabela 4 – Cenário 2: distribuição da compensação financeira (em R\$) com peso maior para o critério dos ônus adicionais

Município	Compensação Atual (2014)	Compensação Cenário 2
Salto da Divisa	93.039,58	997.658,84
Itarantim	223.532,33	164.511,58
Itagimirim	498.317,60	326.868,53
Itapebi	865.144,71	190.995,27
TOTAL	1.680.034,22	1.680.034,22

Fonte: Resultados da Pesquisa

Por considerar os ônus adicionais como critério mais relevante, percebe-se que há uma alteração significativa nos resultados da coluna “Compensação Cenário 2” em relação aos valores de 2014. A Figura 2 mostra essa comparação.



Fonte: Resultados da Pesquisa

Figura 2 – Comparação entre o Cenário Atual (2014) e o Cenário 2

Pode-se ver um resultado oposto ao do Cenário 1. Salto da Divisa é compensado de forma mais expressiva, em um valor que se eleva de R\$ 93.039,58 em 2014 para R\$ 997.658,84 caso o valor de Shapley fosse adotado com essa estrutura de pesos. Conforme mostram os trabalhos de Pereira (2011), Gavião (2006) e Lima (2012), além de ter sido o único município com área urbana alagada, a população de Salto da Divisa foi a que se revelou mais prejudicada com a construção da usina e caso esses impactos entrassem na alocação do benefício, o município teria uma compensação financeira melhor. Deste modo, o Cenário 2 seria o mais esperado caso as demandas sociais fossem plenamente atendidas.

Movimento inverso se verifica em relação a Itapebi, que seria o município mais prejudicado. Como Itapebi teve a maior área inundada, a grande diminuição da ponderação relativa a esse critério faz com que sua compensação financeira decresça de R\$ 865.144,71 em 2014 para R\$ 190.995,27 com essa definição de pesos. Novamente Itarantim e Itagimirim ficaram em posições intermediárias, não sofrendo alterações tão bruscas.

4.3 Cenário 3: peso igual para os critérios da área inundada e dos ônus adicionais

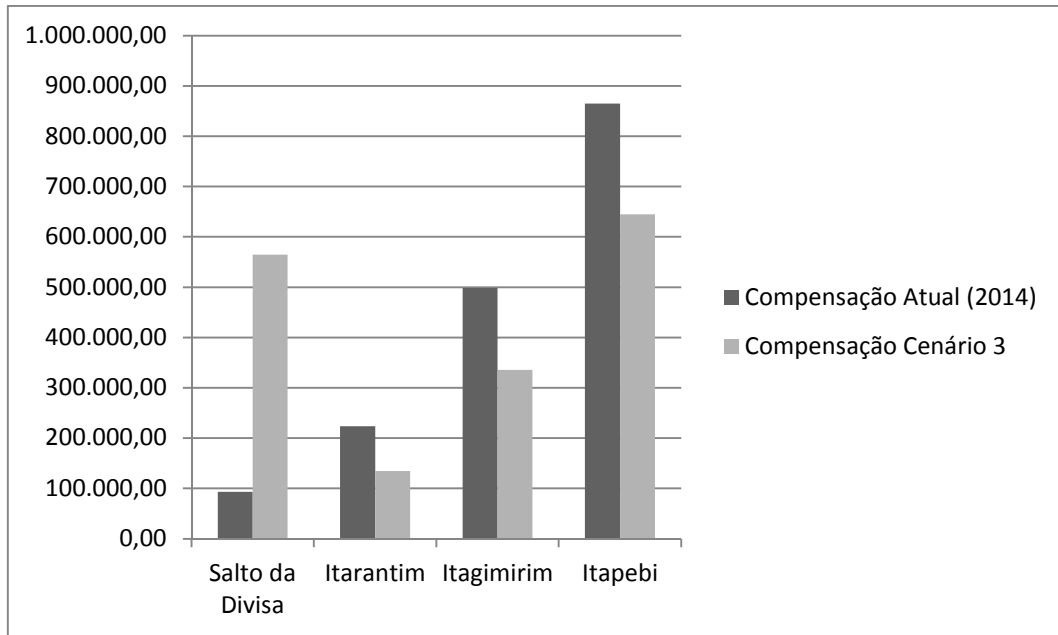
Por último, o Cenário 3 reflete uma situação intermediária de modo que define-se um peso igual para os critérios da área inundada e dos ônus adicionais ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$). Os resultados são vistos na Tabela 5.

Tabela 5 – Cenário 3: distribuição da compensação financeira (em R\$) com peso igual para os critérios da área inundada e dos ônus adicionais

Município	Compensação Atual (2014)	Compensação Cenário 3
Salto da Divisa	93.039,58	564.592,30
Itarantim	223.532,33	134.836,24
Itagimirim	498.317,60	335.758,10
Itapebi	865.144,71	644.847,58
TOTAL	1.680.034,22	1.680.034,22

Fonte: Resultados da Pesquisa

Como a área inundada e os ônus adicionais foram considerados igualmente relevantes, nesse cenário há menos dispersão dos valores da compensação financeira. A Figura 3 mostra a comparação com o ano de 2014.



Fonte: Resultados da Pesquisa

Figura 3 – Comparação entre o Cenário Atual (2014) e o Cenário 3

Os valores maiores ficam com os municípios de Itapebi (R\$ 644.847,58) e Salto da Divisa (R\$ 564.592,30), refletindo exatamente uma divisão de forças entre aquele que teve a maior perda territorial e aquele que sofreu maiores impactos negativos não levados em consideração. O maior beneficiado neste Cenário 3 seria Salto da Divisa que em comparação aos valores de 2014 teria uma elevação de R\$ 93.039,58 para R\$ 564.592,30. Itapebi teria uma redução no montante recebido, ainda que não seja uma queda tão grande quanto a observada no Cenário 2. Os demais municípios, Itarantim e Itagimirim, ficaram abaixo dos dois citados. Se for levado em conta pressões políticas e de grupos de interesse, pode ser que um cenário intermediário como esse acabe prevalecendo na prática, retratando uma divisão menos discrepante da compensação financeira, ao invés dos cenários extremos simulados anteriormente.

4.4 Discussão sobre os resultados e o método proposto

Uma interpretação alternativa do valor de Shaley é que essa metodologia pode ser vista também como um instrumento de auxílio à solução de conflitos. Conforme descrito na seção 3, a instalação de hidrelétricas ocasiona conflitos das mais variadas origens. Na UHE Itapebi ocorreram conflitos institucionais, como ações na justiça que buscavam preservar a Cachoeira do Tombo da Fumaça e conflitos socioeconômicos e ambientais que necessitaram de grande capacidade de negociação porque estavam associados com o pagamento de indenizações. Cabe observar que, segundo Gavião (2006), alguns conflitos se originaram de um comportamento oportunista de pessoas que tentavam extrair vantagens do empreendedor. Por exemplo, havia apenas 17 pescadores cadastrados na cidade de Salto da Divisa, mas, após a construção da UHE esse número pulou para 48 pessoas que alegavam serem pescadores para terem direito a indenizações individuais.

Assim, é intrínseca à instalação de uma UHE, a presença de conflitos. Por definição, conforme discussão apresentada em Gavião (2006), os conflitos, além dos próprios atores, pressupõe a existência de árbitros ou mediadores, que são personagens que se dispõem a ficar à margem do embate, sem tomar partido. A existência de um mediador é exatamente umas das interpretações que podem ser feitas do valor de Shapley, em decorrência dele ser considerado um conceito de solução normativo¹⁴. Conforme Montet e Serra (2003), na abordagem normativa dos jogos cooperativos, assume-se que há um mediador (árbitro, planejador social, estado, etc.) que seleciona um determinado resultado levando em conta princípios tidos como razoáveis. O mediador deve olhar para regras equitativas ao tomar a decisão em contextos democráticos, de modo que se acredita que ele buscaria o melhor resultado para a sociedade.

¹⁴ Os conceitos de solução cooperativa podem seguir uma abordagem positiva ou normativa. Montet e Serra (2003) afirmam que na ótica positiva o foco da análise recai sobre as propriedades estratégicas de estabilidade das coalizões. Sob esse ponto de vista, os jogos cooperativos seriam parte de um estudo mais amplo sobre acordos diretos entre agentes racionais negociando livremente. Por outro lado, na ótica normativa dos conceitos de solução a ênfase recai sobre as propriedades das soluções que são atraentes de um ponto de vista ético. Sob essa visão, os jogos cooperativos são analisados como ferramentas para o estabelecimento do critério da justiça distributiva ou da equidade.

Visto que está sendo aplicado em um ambiente fértil em conflitos e por ser um conceito de solução teoricamente compatível com a presença de um mediador, seria possível interpretar o valor de Shapley como um instrumento de auxílio aos agentes na solução de conflitos.

Outra vantagem da fórmula se refere à inclusão de novos jogadores. Os resultados foram apresentados para os municípios que tiveram área inundada e que atualmente recebem compensação financeira. Porém, o fato de que apenas os municípios que perdem terras recebem compensação tem sido apontado como falha da legislação, pois, existem impactos que vão além da área dos reservatórios. Um exemplo é o município de Belmonte a 70 km a jusante da sede da UHE Itapebi. Segundo Gavião (2006) existe no local uma comunidade de pescadores que indicou uma redução dos estoques pesqueiros após a intervenção no fluxo do rio. A não consideração de Belmonte pode ser contornada pelo método proposto que permite a inclusão de qualquer outro município. Mesmo não tendo área inundada, Belmonte poderia ter sido considerada na alocação da compensação pelo critério dos ônus adicionais, o que não é possível com a metodologia atual de distribuição. Essa discussão se amplia se for observada uma resolução do Conselho Nacional do Meio Ambiente que, conforme Pereira (2011), determinou que a bacia hidrográfica deveria ser considerada como unidade de análise para elaboração dos estudos de impacto ambiental. Logo, a não consideração da totalidade de municípios que compõem uma bacia hidrográfica tem sido falha recorrente na medição dos impactos oriundos da construção de hidrelétricas.

A fórmula também pode ser aplicada em Pequenas Centrais Hidrelétricas (PCH's)¹⁵. Nesses empreendimentos a legislação dispensa o pagamento de compensação. Todavia, elas não estão livres de causarem danos ao ambiente em que se inserem e caso o impacto seja relevante ele poderia ser incluído na metodologia proposta por meio do critério dos ônus adicionais. Além disso, McCully (2004) lembra que existem controvérsias, pois, se o objetivo

¹⁵ Pequena central hidrelétrica (PCH), segundo definição da ANEEL (2014), é uma usina de pequeno porte com capacidade instalada maior do que 1 MW e no máximo 30 MW e com reservatório inferior a 3 km².

for criar uma mesma capacidade de geração de uma grande represa, seriam construídas tantas pequenas estruturas que seus efeitos poderiam ser igualmente ruins. Isso não exclui, obviamente, as vantagens que as PCH's possuem, visto que são mais baratas e por serem menores há maior probabilidade de que os benefícios possam ser capturados pelas comunidades locais.

Por outro lado, a proposta de utilização do valor de Shapley apresenta limitações. Uma delas é exatamente a definição dos pesos que cada critério terá na distribuição da compensação. Quando a determinação dos pesos não estiver bem definida, ela pode sofrer a influência de pressões políticas e grupos de interesse com maior poder de barganha. Acontecendo isso, a indenização não estaria de acordo com a realidade social, econômica e ambiental, mas, em conformidade com o desejo dos grupos com maior influência, de modo que seria necessário estudar também a interação estratégica desse jogo político que poderia influenciar a determinação do peso.

Outra limitação é em relação à hipótese de que os municípios utilizarão o benefício para compensar os danos sofridos. Essa vinculação depende de alterações na lei, pois, em seu texto atual (Lei nº7.990/1989) só há a proibição de utilizar a compensação financeira para pagar dívida ou o quadro permanente de pessoal. Assim, ainda que a distribuição fosse ideal, as prefeituras poderiam utilizar o recurso para outros fins, de modo que algum impacto negativo decorrente da construção da usina continuaria não mitigado. Essa discussão precisa ser ampliada, uma vez que os recursos não são uma compensação feita aos governos locais e, sim, à sociedade que é afetada pela atividade hidrelétrica.

Sobre as simulações feitas para a UHE Itapebi, ressalta-se que os resultados dos três cenários foram consequência dos pesos escolhidos para representar cada critério. Foram propostos pesos que simulassem cenários extremos, pois, isso torna mais interessante a comparação dos resultados e mostra com clareza a aplicabilidade da fórmula em vários

cenários. Porém, qualquer outra ponderação poderia ter sido adotada, conforme as características da área de instalação da hidrelétrica.

5 Considerações Finais

O presente artigo estudou a distribuição da compensação financeira paga pelas empresas geradoras de energia aos municípios afetados pela construção de hidrelétricas. Tal recebimento é previsto na legislação brasileira e utiliza o critério da área inundada pelo reservatório para designar o quanto cada município deve receber. Contudo, como existem muitos outros impactos negativos que não são captados pela área inundada, foi proposta uma metodologia que pode levar em conta simultaneamente diferentes critérios de distribuição. A metodologia consistiu no valor de Shapley, conceito de solução pertencente à teoria dos jogos cooperativos e tradicionalmente utilizado em problemas de alocação.

Para o caso em estudo (UHE Itapebi) foi sugerido, além da própria área inundada, um critério adicional de distribuição chamado de ônus adicionais, formado pela percepção que a população teve em como se sentiu afetada nos aspectos socioeconômicos, de saúde e de serviços públicos após a construção da hidrelétrica. Como muitos impactos só são percebidos com clareza após o início das operações, acredita-se que esse seja um critério relevante para incluir impactos não mitigados. A consideração simultânea de vários critérios se deu atrelando pesos a cada um deles, indicando sua respectiva importância. Alterando esses pesos, foi possível simular diferentes cenários e discutir suas características e implicações.

A construção dos cenários mostrou que para aplicar o método proposto é preciso estabelecer previamente como se dará a determinação dos pesos que cada critério terá na distribuição da compensação financeira. Para isso, é importante uma definição clara de quem terá essa incumbência. Uma possibilidade são os comitês de bacia hidrográfica, órgãos legalmente estabelecidos como responsáveis pela gestão dos recursos hídricos no âmbito de

cada bacia. Os comitês funcionam como um parlamento das águas e são formados por usuários de água, membros da sociedade civil e do poder público. A sugestão de dar essa função aos comitês vai de encontro à legislação ambiental brasileira que, após suas reformas nos anos 1980, designou uma gestão ambiental bastante inclusiva e participativa, de modo que seria difícil fugir dessas características.

Ademais, a distribuição da compensação financeira seguindo a fórmula proposta do valor de Shapley não seria algo engessado, pois, se houver uma continuidade da produção de informações, seja por meio de consultas à população ou especialistas, ou se ocorrerem novos eventos, como um desastre ecológico ou a reparação de um dano ambiental, os pesos podem ser revistos. Além do mais, critérios podem ser incluídos conforme se revelem importantes ou excluídos caso deixem de exercer influência. Obviamente, uma quantidade muito grande de critérios pode dificultar a obtenção dos dados e a definição dos pesos.

A vantagem de poder incluir diferentes critérios reside no fato de que a alocação da compensação não será igual em todas as hidrelétricas, podendo-se considerar especificidades existentes em cada bacia hidrográfica e região que abrigará uma UHE. Num país de grande extensão territorial como o Brasil certamente as áreas afetadas por hidrelétricas têm características diferentes no que tange à biodiversidade, potencial agropecuário, pesca, aspectos turísticos, culturais, etc. Resumir esse conjunto de fatores apenas na área inundada pode simplificar em demasia o problema e não distribuir de forma adequada a compensação financeira.

Dado a ausência de trabalhos que analisam a metodologia de distribuição da compensação financeira hidrelétrica, espera-se contribuir para o aprofundamento dos estudos sobre o tema, em que o valor de Shapley representa uma proposta efetiva de alocação dos valores entre os municípios. Para a continuidade das pesquisas, deixa-se como sugestão a apresentação de outras metodologias que possam ser confrontadas com o valor de Shapley e a

com própria metodologia atual, de modo que o enriquecimento da discussão possa colaborar cada vez mais para os avanços dos estudos visando a adequada distribuição dos valores.

6 Referências

ANEEL. **Agência Nacional de Energia Elétrica**. Disponível em < <http://www.aneel.gov.br> >. Acesso em: 20 dez. 2014.

BORN, M. S.; GENSKOW, K.; FILBERT, T.; HERNANDEZ-MORA, N.; KEEFER, M. L.; WHITE, K. A. Socioeconomic and institutional dimensions of dam removals: the Wisconsin experience. **Environmental Management**, v. 22, n. 3, p. 359–370, 1998.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Promulgada em 5 de outubro, 1988.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº 7.990**, 1989.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº 9.984**, 2000.

BROWN, P. H.; TULLOS, D.; TILT, B.; MAGEE, D.; WOLF, A. T. Modeling the costs and benefits of dam construction from a multidisciplinary perspective. **Journal of Environmental Management**, v. 90, p. S303–S311, 2009.

DINAR, A.; ALBIAC, J.; SANCHEZ-SORIANO, J. **Game Theory and Policy Making in Natural Resources and the Environment**. London: Routledge Publishing, 2008.

DINAR, A.; YARON, D.; KANNAI, Y. Sharing regional cooperative gains from reusing effluent for irrigation. **Water Resources Research**, v. 22, n. 3, p. 339-344, 1986.

DUBEY, P. The Shapley value as aircraft landing fees revisited. **Management Science**, v. 28, n. 8, p. 869-874, 1982.

FIESTRAS-JANEIRO, M. G.; GARCÍA-JURADO, I.; MOSQUERA, M. A. Cooperative games and cost allocation problems. **Top**, v. 19, n. 1, p. 1-22, 2011.

FRAGNELLI, V.; GARCÍA-JURADO, I.; NORDE, H.; PATRONE, F.; TIJS, S. How to share railways infrastructure costs? In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 91-101.

FRAGNELLI, V.; IANDOLINO, A. A cost allocation problem in urban solid wastes collection and disposal. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 59, n. 3, p. 447-463, 2004.

GAVIÃO, A. B. **Gestão de conflitos ambientais frente à implantação de hidrelétricas: estudo de caso do aproveitamento hidrelétrico de Itapebi/BA**. 127 f. Dissertação de Mestrado em Regulação da Indústria de Energia. Universidade Salvador – UNIFACS, Salvador, 2006.

GRAHN-VOORNEVELD, S. Sharing costs in Swedish road ownership associations. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 46, n. 4, p. 645-651, 2012.

HART, S. Shapley value. In: EATWELL, J.; MILGRATE, M.; NEWMAN, P. **The New Palgrave: Game Theory**. New York: W W Norton, 1989. p.210-216.

LEITE, G. B; VIEIRA, W. C. Proposta metodológica de cobrança pelo uso dos recursos hídricos usando o valor de Shapley: uma aplicação à bacia do rio Paraíba do Sul. **Estudos Econômicos (São Paulo)**, v. 40, n. 3, p. 651-677, 2010.

LEMAIRE, J. An application of game theory: cost allocation. **Astin Bulletin.**, v.14, n.1, p. 61-81, 1984.

LIMA, G. R. **Análise dos impactos socioambientais de usinas hidrelétricas através do método de análise de grupamento**. 56 f. Monografia de Graduação de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A Simple Expression for the Shapley Value in A Special Case. **Management Science**, v. 20, n. 3, 370-372, 1973.

LOEHMAN, E.; ORLANDO, J.; TSCHIRHART, J.; WHINSTON, A. Cost allocation for a regional wastewater treatment system. **Water Resources Research**, v. 15, n. 2, 193-202, 1979.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.; GREEN, J. **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

McCULLY, P. **Rios silenciados: ecología y políticas de las grandes represas**. Santa Fé: Proteger, 2004.

MONTET, C.; SERRA, D. **Game theory and economics**. New York: Palgrave Macmillan, 2003.

MORIMOTO, R.; HOPE, C. Applying a cost-benefit analysis model to the Three Gorges project in China. **Impact Assessment and Project Appraisal**, v. 22, n. 3, p. 205-220, 2004.

MYERSON, R. B. **Game theory: an analysis of conflict**. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

OLIVEIRA, L. C. **Economia, instituições e royalties: o caso dos municípios lindeiros ao lago de Itaipu binacional no oeste paranaense**. 244 f. Dissertação de Mestrado em Desenvolvimento Regional e Agronegócio. Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Toledo, 2008.

PEREIRA, A. K. **Desenvolvimentismo, conflito e conciliação de interesses na política de construção de hidrelétricas na amazônia brasileira**. Texto para Discussão 1884. Rio de Janeiro: IPEA, 2013.

PEREIRA, P. J. C. R. **Desafios do licenciamento ambiental de usinas hidrelétricas: um estudo de caso da UHE Itapebi**. 125 f. Dissertação de Mestrado em Políticas Públicas e Estratégias para o Desenvolvimento. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

QUINTELA, M. C. A.; CARVALHO, F. M. A. Compensações financeiras e royalties hidrelétricos na determinação do investimento público e das despesas sociais. **Revista de economia e agronegócio**, v.8, n. 1, p. 51 – 74, 2010.

ROTH, A. **The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

SERRANO, R. Cooperative Games. In: **Computational Complexity**. New York: Springer, 2012. p. 666-674.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. **Contributions to the Theory of Games**, v. 2, n. 28, p. 307-317, 1953.

SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. **American political science review**, v. 48, n. 3, p. 787-792, 1954.

SILVA, L. L. **A compensação financeira das usinas hidrelétricas como instrumento econômico de desenvolvimento social, econômico e ambiental**. 147 f. Dissertação de Mestrado em Gestão Econômica do Meio Ambiente. Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

TIJS, S.; DRIESSEN, T. Game Theory and Cost Allocation Problems. **Management Science**, v. 32, n. 8, 1015-1028, 1986.

TILT, B.; BRAUN, Y.; HE, D. Social impacts of large dam projects: A comparison of international case studies and implications for best practice. **Journal of environmental management**, v. 90, p. S249–S257, 2009.

YOUNG, C. E. F. et al. **Desenvolvimento de metodologia de avaliação ex post dos impactos socioeconômicos e ambientais de empreendimentos hidrelétricos**. Disponível em < <http://cbem.com.br/wp-content/uploads/2011/11/536.pdf> >. Centro Brasileiro de Energia e Mudanças Climáticas (CBEM), 2011.

YOUNG, H.P. Cost allocation. In: AUMANS, R.J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 2. New York: Elsevier Science, 1994. p. 1192-1235.

YOUNG, H.P.; OKADA, N.; HASHIMOTO, T. Cost allocation in water resources development. **Water resources research**, v. 18, n. 3, 463-475, 1982.

ANEXO 1

Obtenção dos dados para o critério dos ônus adicionais¹⁶

Para a construção do critério dos ônus adicionais utilizou-se dados do estudo “Desenvolvimento de metodologia de avaliação *ex post* dos impactos socioeconômicos e ambientais de empreendimentos hidrelétricos”, elaborado pelo Centro Brasileiro de Energia e Mudanças Climáticas (CBEM) e que está resumido em Young et al. (2011), Pereira (2011) e Lima (2012).

O estudo construiu uma base de dados com as respostas a questionários aplicados nas cidades afetadas pela UHE Itapebi. Esses questionários visavam justamente desenvolver medidas de avaliação *ex post* dos impactos socioeconômicos e ambientais das UHEs. As perguntas tinham como meta averiguar se as medidas tomadas pelo empreendedor para mitigar os impactos foram efetivas e analisar alterações na qualidade de vida da população.

A amostra contou com 292 questionários aplicados nos municípios e as perguntas foram divididas em três conjuntos: aspectos socioeconômicos; aspectos de saúde e saneamento; e aspectos de serviços públicos.

No que tange aos aspectos socioeconômicos, os entrevistados foram questionados a respeito de como as seguintes variáveis sofreram alterações após a construção da UHE Itapebi: i) renda; ii) oportunidades de trabalho; iii) movimento no comércio; iv) pessoas sem trabalho; v) preço dos alugueis; vi) preço no comércio; vii) preço dos materiais de construção; e viii) mudanças devido ao aumento do preço dos alugueis.

Em relação aos aspectos de saúde e saneamento, os entrevistados foram questionados sobre as seguintes variáveis: i) coleta de lixo; ii) qualidade do atendimento médico público; iii) qualidade da água do Rio Jequitinhonha; e iv) ocorrência de doenças.

¹⁶ Esse anexo está baseado em Young et al. (2011), Pereira (2011) e Lima (2012).

E para os aspectos de serviços públicos, os entrevistados foram questionados a respeito das variáveis: i) oferta de energia elétrica; ii) transporte público; iii) qualidade das escolas da prefeitura; iv) manutenção de ruas e estradas; v) áreas de recreação e lazer; vi) violência; vii) mães sem condições de criar seus filhos; e viii) crianças fora da escola e sem assistência.

Com as respostas foram feitas análises de agrupamento que revelaram a proporção de prejudicados em cada município entre o total de entrevistados e considerando separadamente os três aspectos em que se dividiram as perguntas (Tabela 2). Essas proporções de prejudicados em cada município são os dados que irão compor o critério dos ônus adicionais, simbolizando os impactos negativos.

ANEXO 2

Cálculos dos Resultados (Seção 4)

Para obtenção dos resultados são necessárias duas etapas de cálculo: 1) Valor de Shapley para cada critério individual (etapa preliminar em que o cálculo é feito para cada critério em separado). 2) Valor de Shapley considerando todos os critérios conjuntamente (etapa final em que os critérios são reunidos em uma mesma expressão, atrelados a ponderações que possibilitam a simulação de cenários).

Os critérios são a área inundada e os ônus adicionais. Sendo que este último consiste na junção de outros três critérios: aspectos socioeconômicos, de saúde e saneamento, e de serviços públicos. Tanto a área inundada quanto os itens que compõem os ônus adicionais foram apresentados em termos percentuais, para padronizar as medidas¹⁷.

Em todos os cálculos deste anexo, os municípios estão indicados pela seguinte notação: Salto da Divisa = d ; Itarantim = r ; Itagimirim = g ; Itapebi = p .

1 Valor de Shapley para cada critério individual

Os valores b_i e c_i , nas Tabelas 6 a 9, foram calculados conforme as suposições descritas na seção 2.4 para se encontrar a função característica de um jogo cooperativo. E o valor de Shapley para cada critério individual foi obtido conforme a equação (1).

¹⁷ Os dados sobre a área inundada estão em ANEEL (2014) e as informações sobre os aspectos que compõem os ônus adicionais foram extraídas de Lima (2012).

1.1 Valor de Shapley conforme a área inundada

Tabela 6 – Dados para o cálculo do valor de Shapley conforme a área inundada

Município	Área Inundada		b_i	c_i	Valor de Shapley (R\$)
	Km ²	%			
Salto da Divisa	3,46	5,54	93.036,47	93.036,47	23.259,12
Itarantim	8,31	13,30	223.448,85	316.485,32	97.742,07
Itagimirim	18,53	29,66	498.255,99	814.741,31	346.870,06
Itapebi	32,18	51,50	865.292,91	1.680.034,22	1.212.162,97
Total	62,48	100,00	-	-	1.680.034,22

Fonte: Resultados da Pesquisa

$$\begin{aligned}
 \phi_d(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{d\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{d,r\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
 &[v(\{d,g\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{d,p\}) - v(\{p\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d,r,g\}) - v(\{r,g\})] + \\
 &\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d,r,p\}) - v(\{r,p\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d,g,p\}) - v(\{g,p\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
 &[v(\{d,r,g,p\}) - v(\{r,g,p\})] = \frac{6}{24} \times [93.036,47 - 0] + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = \\
 &R\$ 23.259,12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_r(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{r\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{d,r\}) - v(\{d\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
 &[v(\{r,g\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r,p\}) - v(\{p\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d,r,g\}) - v(\{d,g\})] + \\
 &\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d,r,p\}) - v(\{d,p\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r,g,p\}) - v(\{g,p\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
 &[v(\{d,r,g,p\}) - v(\{d,g,p\})] = \frac{6}{24} \times [316.485,32 - 0] + \frac{2}{24} \times [316.485,32 - \\
 &93.036,47] + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = R\$ 97.742,07
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_g(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{g\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{d,g\}) - v(\{d\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
 &[v(\{r,g\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g,p\}) - v(\{p\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d,r,g\}) - v(\{d,r\})] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d, g, p\}) - v(\{d, p\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, p\}) - v(\{r, p\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ & [v(\{d, r, g, p\}) - v(\{d, r, p\})] = \frac{6}{24} \times [814.741,31 - 0] + \frac{2}{24} \times [814.741,31 - \\ & 93.036,47] + \frac{2}{24} \times [814.741,31 - 316.485,32] + 0 + \frac{2}{24} \times \\ & [814.741,31 - 316.485,32] + 0 + 0 + 0 = R\$ 346.870,06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_p(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{p\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{d, p\}) - v(\{d\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\ & [v(\{r, p\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g, p\}) - v(\{g\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d, r, p\}) - v(\{d, r\})] + \\ & \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{d, g, p\}) - v(\{d, g\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, p\}) - v(\{r, g\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ & [v(\{d, r, g, p\}) - v(\{d, r, g\})] = \frac{6}{24} \times [1.680.034,22 - 0] + \frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - \\ & 93.036,47] + \frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - 316.485,32] + \frac{1!2!}{4!} \times \\ & [1.680.034,22 - 814.741,31] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 316.485,32] + \frac{2!1!}{4!} \times \\ & [1.680.034,22 - 814.741,31] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 814.741,31] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ & [1.680.034,22 - 814.741,31] = R\$ 1.212.162,97 \end{aligned}$$

1.2 Valor de Shapley conforme os ônus adicionais: aspectos socioeconômicos

Tabela 7 – Dados para o cálculo do valor de Shapley conforme os Aspectos Socioeconômicos

Município	Prejudicados (%)	b_i	c_i	Valor de Shapley (R\$)
Itarantim	0,00	0	0	0,00
Itapebi	26,21	440.379,82	440.379,82	146.793,27
Itagimirim	29,12	489.167,88	929.547,71	391.377,22
Salto da Divisa	44,67	750.486,51	1.680.034,22	1.141.863,73
Total	100	-	-	1.680.034,22

Fonte: Resultados da Pesquisa

$$\begin{aligned}
\phi_p(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{p\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r, p\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{p, g\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, p, g\}) - v(\{r, g\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, p, d\}) - v(\{r, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{g, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{r, p, g, d\}) - v(\{r, g, d\})] = \frac{6}{24} \times [440.379,82 - 0] + \frac{2}{24} \times [440.379,82 - 0] + 0 + \\
&0 + 0 + 0 + 0 + 0 = R\$ 146.793,27
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_g(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{g\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r, g\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{p, g\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, p, g\}) - v(\{r, p\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, d\}) - v(\{r, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{p, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{r, p, g, d\}) - v(\{r, p, d\})] = \frac{6}{24} \times [929.547,71 - 0] + \frac{2}{24} \times [929.547,71 - 0] + \frac{2}{24} \times \\
&[929.547,71 - 440.379,82] + 0 + \frac{2}{24} \times [929.547,71 - 440.379,82] + 0 + 0 + 0 = \\
&R\$ 391.377,22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_d(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{d\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r, d\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{p, d\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g, d\}) - v(\{g\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, p, d\}) - v(\{r, p\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, d\}) - v(\{r, g\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{p, g\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{r, p, g, d\}) - v(\{r, p, g\})] = \frac{6}{24} \times [1.680.034,22 - 0] + \frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - 0] + \\
&\frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - 985.831,40] + \frac{1!2!}{4!} \times [1.680.034,22 - 929.547,71] + \frac{2!1!}{4!} \times \\
&[1.680.034,22 - 440.379,82] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 929.547,71] + \frac{2!1!}{4!} \times \\
&[1.680.034,22 - 929.547,71] + \frac{3!0!}{4!} \times [1.680.034,22 - 929.547,71] = R\$ 1.141.863,73.
\end{aligned}$$

1.3 Valor de Shapley conforme os ônus adicionais: aspectos de saúde

Tabela 8 – Dados para o cálculo do valor de Shapley conforme os Aspectos de Saúde

Município	Prejudicados (%)	b_i	c_i	Valor de Shapley R\$
Itapebi	6,78	113.922,66	113.922,66	28.480,67
Itarantim	14,88	250.049,74	363.972,41	111.830,58
Itagimirim	37,01	621.723,68	985.696,09	422.692,42
Salto da Divisa	41,33	694.338,13	1.680.034,22	1.117.030,55
Total	100	1.680.034,22		1.680.034,22

Fonte: Resultados da Pesquisa

$$\begin{aligned} \phi_p(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{p\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, r\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\ &[v(\{p, g\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, g\}) - v(\{r, g\})] + \\ &\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, d\}) - v(\{r, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{g, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ &[v(\{p, r, g, d\}) - v(\{r, g, d\})] = \frac{6}{24} \times [113.922,66 - 0] + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ &0 = R\$ 28.480,67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_r(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{r\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, r\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\ &[v(\{r, g\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, g\}) - v(\{p, g\})] + \\ &\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, d\}) - v(\{p, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, d\}) - v(\{g, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ &[v(\{p, r, g, d\}) - v(\{p, g, d\})] = \frac{6}{24} \times [363.972,41 - 0] + \frac{2}{24} \times [363.972,41 - \\ &113.922,66] + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = R\$ 111.830,58 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_g(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{g\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, g\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\ &[v(\{r, g\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, g\}) - v(\{p, r\})] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{p, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, d\}) - v(\{r, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ & [v(\{p, r, g, d\}) - v(\{p, r, d\})] = \frac{6}{24} \times [985.696,09 - 0] + \frac{2}{24} \times [985.696,09 - \\ & 113.922,66] + \frac{2}{24} \times [985.696,09 - 363.972,41] + 0 + \frac{2}{24} \times [985.696,09 - \\ & 363.972,41] + 0 + 0 + 0 = R\$ 422.692,42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_d(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{d\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, d\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\ & [v(\{r, d\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g, d\}) - v(\{g\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, d\}) - v(\{p, r\})] + \\ & \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{p, g\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{r, g, d\}) - v(\{r, g\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\ & [v(\{p, r, g, d\}) - v(\{p, r, g\})] = \frac{6}{24} \times [1.680.034,22 - 0] + \frac{1!2!}{4!} \times [1.680.034,22 - \\ & 113.922,66] + \frac{1!2!}{4!} \times [1.680.034,22 - 363.972,41] + \frac{1!2!}{4!} \times [1.680.034,22 - \\ & 985.696,09] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 363.972,41] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - \\ & 985.696,09] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 985.696,09] + \frac{3!0!}{4!} \times [1.680.034,22 - \\ & 985.696,09] = R\$ 1.117.030,55 \end{aligned}$$

1.4 Valor de Shapley conforme os ônus adicionais: aspectos de serviços públicos

Tabela 9 – Dados para o cálculo do valor de Shapley conforme os Aspectos de Serviços Públicos

Município	Prejudicados (%)	b_i	c_i	Valor de Shapley R\$
Itapebi	13,65	229.290,52	229.290,52	57.322,63
Itagimirim	18,31	307.638,42	536.928,94	159.868,77
Itarantim	29,06	488.183,78	1.025.112,72	403.960,66
Salto da Divisa	38,98	654.921,50	1.680.034,22	1.058.882,16
Total	100	-	-	1.680.034,22

Fonte: Resultados da Pesquisa

$$\begin{aligned}
\phi_p(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{p\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, g\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{p, r\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, r\}) - v(\{g, r\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{g, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, d\}) - v(\{r, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{p, g, r, d\}) - v(\{g, r, d\})] = \frac{6}{24} \times [229.290,52 - 0] + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\
&0 = R\$ 57.322,63
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_g(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{g\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, g\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{g, r\}) - v(\{r\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{g, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, r\}) - v(\{p, r\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{p, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{g, r, d\}) - v(\{r, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{p, g, r, d\}) - v(\{p, r, d\})] = \frac{6}{24} \times [536.928,94 - 0] + \frac{2}{24} \times [536.928,94 - \\
&229.290,52] + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = R\$ 159.868,77
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_r(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{r\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, r\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{g, r\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r, d\}) - v(\{d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, r\}) - v(\{p, g\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, d\}) - v(\{p, d\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{g, r, d\}) - v(\{g, d\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{p, g, r, d\}) - v(\{p, g, d\})] = \frac{6}{24} \times [1.025.112,72 - 0] + \frac{2}{24} \times [1.025.112,72 - \\
&229.290,52] + \frac{2}{24} \times [1.025.112,72 - 536.928,94] + 0 + \frac{2}{24} \times [1.025.112,72 - \\
&536.928,94] + 0 + 0 + 0 = R\$ 403.960,66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_d(v) &= \frac{0!3!}{4!} \times [v(\{d\}) - v(\emptyset)] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{p, d\}) - v(\{p\})] + \frac{1!2!}{4!} \times \\
&[v(\{g, d\}) - v(\{g\})] + \frac{1!2!}{4!} \times [v(\{r, d\}) - v(\{r\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, g, d\}) - v(\{p, g\})] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [v(\{p, r, d\}) - v(\{p, r\})] + \frac{2!1!}{4!} \times [v(\{g, r, d\}) - v(\{g, r\})] + \frac{3!0!}{4!} \times \\
&[v(\{p, g, r, d\}) - v(\{p, g, r\})] = \frac{6}{24} \times [1.680.034,22 - 0] + \frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - \\
&229.290,52] + \frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - 536.928,94] + \frac{2}{24} \times [1.680.034,22 - 1.025.112,72] + \\
&\frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 536.928,94] + \frac{2!1!}{4!} \times [1.680.034,22 - 1.025.112,72] + \frac{2!1!}{4!} \times \\
&[1.680.034,22 - 1.025.112,72] + \frac{3!0!}{4!} \times [1.680.034,22 - 1.025.112,72] = R\$ 1.058.882,16
\end{aligned}$$

2 Valor de Shapley considerando todos os critérios conjuntamente

Cada valor de Shapley individual é reunido agora em uma mesma expressão, reiterando que os aspectos socioeconômicos, de saúde, e de serviços públicos compõe um só critério, os “ônus adicionais”. Assim, têm-se dois critérios para alocar a compensação financeira entre os municípios: área inundada e ônus adicionais. A cada um foi adicionado um peso para retratar sua importância, o que possibilita a construção de diferentes cenários. O valor de Shapley do jogo, $\Phi_i(v)$, é dado pela equação (4). Assume-se que cada um dos aspectos que formam os ônus adicionais tenha a mesma importância na construção desse critério. Assim, $\phi_i(v_2) = 1/3 \times \phi_i(v_{2.1}) + 1/3 \times \phi_i(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_i(v_{2.3})$. Em que 2.1, 2.2 e 2.3 indicam respectivamente os aspectos socioeconômicos, de saúde e de serviços públicos. Com essas informações, procede-se aos cálculos de três diferentes simulações de cenários para encontrar a distribuição da compensação financeira para cada município.

2.1 Cenário 1: peso maior para o critério da área inundada ($\alpha_1 = 0,9$) e peso menor para os ônus adicionais ($\alpha_2 = 0,1$)

$$\begin{aligned}\Phi_d(v) &= \alpha_1 \times \phi_d(v_1) + \alpha_2 \times \phi_d(v_2) = \alpha_1 \times \phi_d(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_d(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_d(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_d(v_{2.3})] = 0,9 \times 23.259,12 + 0,1 \times [1/3 \times 1.141.863,73 + \\ &1/3 \times 1.117.030,55 + 1/3 \times 1.058.882,16] = R\$ 131.525,75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_r(v) &= \alpha_1 \times \phi_r(v_1) + \alpha_2 \times \phi_r(v_2) = \alpha_1 \times \phi_r(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_r(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_r(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_r(v_{2.3})] = 0,9 \times R\$ 97.742,07 + 0,1 \times [1/3 \times 0 + 1/3 \times \\ &111.830,58 + 1/3 \times 403.960,66] = R\$ 105.160,90\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_g(v) &= \alpha_1 \times \phi_g(v_1) + \alpha_2 \times \phi_g(v_2) = \alpha_1 \times \phi_g(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_g(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_g(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_g(v_{2.3})] = 0,9 \times 346.870,06 + 0,1 \times [1/3 \times 391.377,22 + \\ &1/3 \times 422.692,42 + 1/3 \times 159.868,77] = R\$ 344.647,67\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_p(v) &= \alpha_1 \times \phi_p(v_1) + \alpha_2 \times \phi_p(v_2) = \alpha_1 \times \phi_p(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_p(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_p(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_p(v_{2.3})] = 0,9 \times 1.212.162,97 + 0,1 \times [1/3 \times 146.793,27 + \\ &1/3 \times 28.480,67 + 1/3 \times 57.322,63] = R\$ 1.098.699,90\end{aligned}$$

2.2 Cenário 2: peso maior para o critério dos ônus adicionais ($\alpha_2 = 0,9$) e peso menor para a área inundada ($\alpha_1 = 0,1$)

$$\begin{aligned}\Phi_d(v) &= \alpha_1 \times \phi_d(v_1) + \alpha_2 \times \phi_d(v_2) = \alpha_1 \times \phi_d(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_d(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_d(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_d(v_{2.3})] = 0,1 \times 23.259,12 + 0,9 \times [1/3 \times 1.141.863,73 + \\ &1/3 \times 1.117.030,55 + 1/3 \times 1.058.882,16] = R\$ 997.658,84\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_r(v) &= \alpha_1 \times \phi_r(v_1) + \alpha_2 \times \phi_r(v_2) = \alpha_1 \times \phi_r(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_r(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_r(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_r(v_{2.3})] = 0,1 \times 97.742,07 + 0,9 \times [1/3 \times 0 + 1/3 \times \\ &111.830,58 + 1/3 \times 403.960,66] = R\$ 164.511,58\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_g(v) &= \alpha_1 \times \phi_g(v_1) + \alpha_2 \times \phi_g(v_2) = \alpha_1 \times \phi_g(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_g(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_g(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_g(v_{2.3})] = 0,1 \times 346.870,06 + 0,9 \times [1/3 \times 391.377,22 + \\ &1/3 \times 422.692,42 + 1/3 \times 159.868,77] = R\$ 326.868,53\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_p(v) &= \alpha_1 \times \phi_p(v_1) + \alpha_2 \times \phi_p(v_2) = \alpha_1 \times \phi_p(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_p(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_p(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_p(v_{2.3})] = 0,1 \times 1.212.162,97 + 0,9 \times [1/3 \times 146.793,27 + \\ &1/3 \times 28.480,67 + 1/3 \times 57.322,63] = R\$ 190.995,27\end{aligned}$$

2.3 Cenário 3: peso igual para os critérios da área inundada e dos ônus adicionais

$(\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5)$

$$\begin{aligned}\Phi_d(v) &= \alpha_1 \times \phi_d(v_1) + \alpha_2 \times \phi_d(v_2) = \alpha_1 \times \phi_d(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_d(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_d(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_d(v_{2.3})] = 0,5 \times 23.259,12 + 0,5 \times [1/3 \times 1.141.863,73 + \\ &1/3 \times 1.117.030,55 + 1/3 \times 1.058.882,16] = R\$ 564.592,30\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_r(v) &= \alpha_1 \times \phi_r(v_1) + \alpha_2 \times \phi_r(v_2) = \alpha_1 \times \phi_r(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_r(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_r(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_r(v_{2.3})] = 0,5 \times 97.742,07 + 0,5 \times [1/3 \times 0 + 1/3 \times \\ &111.830,58 + 1/3 \times 403.960,66] = R\$ 134.836,24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_g(v) &= \alpha_1 \times \phi_g(v_1) + \alpha_2 \times \phi_g(v_2) = \alpha_1 \times \phi_g(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_g(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_g(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_g(v_{2.3})] = 0,5 \times 346.870,06 + 0,5 \times [1/3 \times 391.377,22 + \\ &1/3 \times 422.692,42 + 1/3 \times 159.868,77] = R\$ 335.758,10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_p(v) &= \alpha_1 \times \phi_p(v_1) + \alpha_2 \times \phi_p(v_2) = \alpha_1 \times \phi_p(v_1) + \alpha_2 \times [1/3 \times \phi_p(v_{2.1}) + \\ &1/3 \times \phi_p(v_{2.2}) + 1/3 \times \phi_p(v_{2.3})] = 0,5 \times 1.212.162,97 + 0,5 \times [1/3 \times 146.793,27 + \\ &1/3 \times 28.480,67 + 1/3 \times 57.322,63] = R\$ 644.847,58\end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

ARTIGO 2: ALOCAÇÃO DOS CUSTOS DE PROJETOS DE DESPOLUIÇÃO ENTRE OS MUNICÍPIOS DA BAÍA DE GUANABARA

1 Introdução

A Baía de Guanabara é reconhecidamente um marco de beleza cênica, importante local de lazer e fonte de atividades econômicas no Estado do Rio de Janeiro. Apesar disso, ela vem sofrendo historicamente com a excessiva poluição e consequente degradação ambiental de suas águas decorrente de fontes diversas como lançamento de efluentes industriais, terminais marítimos, estaleiros, disposição inadequada de resíduos sólidos e, principalmente, o elevado volume de esgoto doméstico com pouco ou nenhum tratamento despejado pelos municípios diretamente na baía ou nos rios que nela deságuam.

O Plano Diretor de Recursos Hídricos do Estado do Rio de Janeiro com informações mais recentes, publicado por COPPETEC (2014), indica uma participação de 97% do abastecimento humano na demanda de recursos hídricos na região da Baía de Guanabara – sendo que no resto do Estado a média é de 42%, o que dá uma ideia do impacto que os esgotos domésticos causam na poluição de suas águas. Devido à abundância de despejos, Feres (2014) afirma que os rios que cortam as áreas mais populosas da região são como canalizações de esgoto a céu aberto. Obviamente esse cenário não é exclusivo da Baía de Guanabara. Em todo o Brasil observam-se recursos hídricos comprometidos, tanto no aspecto quantitativo quanto qualitativo, em decorrência dos esgotos não tratados.

A precária situação do saneamento na região da Baía de Guanabara se agravou com o crescimento demográfico acelerado e desordenado em seu entorno e a falta de políticas públicas eficientes nas últimas décadas, acentuando seus efeitos negativos sobre as esferas econômica, social e ambiental. Para reverter esse quadro de degradação são necessários

investimentos em níveis vultosos e cada vez maiores enquanto a questão não for solucionada, o que evidencia a necessidade de novas propostas e traz à tona discussões sobre quem deve suportar tais custos e como deverão ser compartilhados.

Visto isso, o presente trabalho trata do problema de alocação dos custos de projetos de despoluição entre os municípios que despejam esgotos sem tratamento na Baía de Guanabara. Para isso utiliza-se uma abordagem da teoria dos jogos, o valor de Shapley – conceito de solução apresentado por Shapley (1953) que tem sido aplicado com sucesso em problemas de alocação de custos – e uma estrutura conhecida como jogo do aeroporto, desenvolvida por Littlechild e Owen (1973), que trata exatamente de modelar custos de construção quando eles precisam ser compartilhados entre diferentes tipos de jogadores. Aplicou-se o valor de Shapley e o jogo do aeroporto em dados do Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM), que é o programa atualmente em execução. O PSAM se sustenta em sua maior parte por recursos de financiamento do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID), além de uma parcela de responsabilidade do governo do Estado.

Realizar um exercício em que o empréstimo obtido junto ao BID deve ser pago pelos municípios se justifica pela atribuição da responsabilidade aos causadores da poluição e pela descentralização da discussão no intuito de tornar os municípios agentes importantes do processo decisório, ou seja, eles teriam o ônus financeiro, mas, o bônus das decisões. Isso vem ao encontro de duas deficiências apontadas por Feres (2014) ao analisar o programa de despoluição anterior ao PSAM. Em primeiro lugar, o modelo de financiamento tem se mostrado insuficiente, pois, o Estado não conseguiu cumprir com seus encargos financeiros comprometendo a efetividade do programa. Segundo, a centralização da gestão nas mãos do governo estadual excluiu os municípios do processo de tomada de decisão, ainda que a maioria das medidas de despoluição precise ser tomada no âmbito local. O autor lembra que o

PSAM busca uma maior integração entre as diferentes esferas de governo, contudo, não apresenta ainda a flexibilidade necessária para o sucesso das ações.

Acredita-se que este trabalho possa trazer contribuições da teoria dos jogos ao debate que se desenvolve de forma recorrente no cenário acadêmico e na sociedade em geral acerca da poluição da Baía de Guanabara, haja vista sua importância para o Rio de Janeiro e para o Brasil como um todo. Especificamente, a construção de um cenário inédito – custos alocados aos municípios – pode servir como mais um instrumento de análise para futuras discussões acerca dos gastos necessários para reverter a deficiência de saneamento no entorno da baía. E espera-se contribuir também em termos metodológicos, pois, existe um número reduzido no Brasil de aplicações do valor de Shapley, sendo que em nenhuma delas se encontrou a abordagem do jogo do aeroporto.

Além dessa introdução, o presente artigo está dividido em mais quatro seções. Na seção dois discutem-se o valor de Shapley e o jogo do aeroporto no contexto dos problemas de alocação de custos. Na seção três descrevem-se características dos municípios que formam a baía de Guanabara e as fontes de dados. Na seção quatro estão os resultados da alocação dos custos de projetos de despoluição entre os municípios. E por fim, têm-se as conclusões do artigo.

2 Metodologia

2.1 Valor de Shapley

A análise de problemas econômicos de alocação tem se baseado de forma recorrente na utilização do valor de Shapley, conceito de solução da teoria dos jogos cooperativos. Em um jogo cooperativo, segundo Myerson (1991), os jogadores podem efetivamente buscar acordos, negociar entre si e formar coalizões que lhes trazem ganhos advindos da cooperação.

Sua representação se dá por meio da função característica, que é a forma pela qual se indica o valor de cada coalizão e se descrevem as possibilidades de cooperação. De acordo com Mas-Colell et al. (1995), a função característica apresenta uma descrição dos *payoffs* disponíveis para diferentes grupos de jogadores em um contexto onde acordos de compromisso entre eles são viáveis.

Em um jogo cooperativo (N, v) , $N = \{1, \dots, n\}$ representa o universo de jogadores, chamado de grande coalizão, e v é a função característica que descreve o valor de cada coalizão. Por sua vez, uma coalizão S é um subconjunto não vazio de N e para cada coalizão especifica-se um conjunto de valores $v(S) \subset \mathbb{R}^s$ contendo vetores de *payoff* de s dimensões¹. Segundo Montet e Serra (2003), $v(S)$ – o valor da coalizão – é exatamente a quantia que os integrantes de S dividirão entre si e é visto como o máximo *payoff* que eles poderiam garantir independente das ações tomadas pelos jogadores em $N \setminus S$.

Para encontrar o resultado do jogo (N, v) Shapley (1953) definiu o valor $\phi(v)$ como sendo uma função que associa com cada jogador i em N , um número real $\phi_i(v)$ que deve atender as condições de um conjunto de axiomas:

A1: Eficiência: $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$

A2: Simetria: para qualquer permutação π de v e cada jogador i tem-se que $\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v)$, em que a permutação simboliza um rearranjo de jogadores no jogo.

A3: Aditividade: para quaisquer jogos v e w , $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$ para todo i em N , em que o jogo $[v + w]$ é definido por $[v + w](S) = v(S) + w(S)$ para qualquer coalizão S .

A4: Jogador *dummy*. Um jogador i é *dummy* se $\phi_i(v) = v(\{i\})$, o que significa que ele não acrescenta nenhum valor adicional ao jogo, além de seu próprio valor individual.

¹ Tradicionalmente a indicação de um conjunto se dá por letra maiúscula, S , o número de elementos desse conjunto, s , é indicado por letra minúscula. De modo que $S = \{1, \dots, s\}$.

Shapley (1953) mostrou que há um método de solução de valor único para jogos cooperativos que satisfazem esses axiomas. O valor de Shapley é a função que determina para cada jogador i o *payoff*:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \times [v(S) - v(S - \{i\})], \forall i \in N \quad (1)$$

em que n é o número de elementos do conjunto N ; s é o número de jogadores na coalizão S ; e a expressão $v(S) - v(S - \{i\})$ representa a contribuição marginal do jogador i quando ele se associa a outros jogadores para formar a coalizão S . Como afirmou o próprio Shapley (1953), não é preciso nenhuma condição adicional, além desses axiomas, para determinar o valor de um jogo cooperativo de forma única.

Segundo Roth (1988), após a publicação de Shapley em 1953, os problemas de alocação de custos se consolidaram como um campo de destaque para a aplicação desse conceito de solução, de modo que o valor de Shapley se tornou um método amplamente utilizado na busca por uma divisão adequada de custos, quando se leva em conta diferentes características dos agentes que interagem em um jogo. Entre os trabalhos que abordam jogos cooperativos, valor de Shapley e alocação de custos têm-se, por exemplo, Loehman et al. (1979), Lemaire (1984), Tijs e Driessen (1986) e Young (1994).

Um problema de alocação de custos na análise dos jogos cooperativos é indicado pelo jogo (N, c) em que N é o universo de jogadores e c é a função característica com as mesmas propriedades vistas, mas, representando agora uma função custo. Dentro da classe de jogos de custos, o presente trabalho se concentrou no jogo do aeroporto que, de acordo com Norde et al. (2002), modela os custos gerados quando um conjunto de jogadores de diferentes tipos se reúne para construir determinada instalação ou arcar com qualquer volume de custos. As propriedades do jogo do aeroporto o credencia como adequado para ser utilizado junto com o valor de Shapley no problema de alocação dos custos de despoluição, considerando que esses

custos se materializarão em projetos ou obras como, por exemplo, a construção de estações de tratamento de esgoto ou qualquer outra infraestrutura.

2.2 Jogo do aeroporto para alocação de custos

O jogo do aeroporto foi desenvolvido de forma pioneira por Littlechild e Owen (1973) que estudaram a alocação dos custos de construção de uma pista de pouso entre diferentes tipos de avião. Posteriormente, Littlechild (1974) e Littlechild e Owen (1976) também investigaram esse problema de alocação, mas, sob a perspectiva do *nucleolus*. Dubey (1982) examinou o mesmo problema dos custos de uma pista de pouso acrescentando novas análises. Fragnelli et al. (2000) utilizaram o jogo do aeroporto para compor um modelo de alocação dos custos de infraestrutura de uma ferrovia. E Grahn-Voorneveld (2012) utilizou o jogo do aeroporto e o valor de Shapley para alocar os custos de rodovias entre seus diferentes usuários.

No jogo do aeroporto o conjunto de jogadores $N = \{1, \dots, n\}$ pode ser dividido em tipos (ou grupos) que reúnem jogadores com uma determinada característica ou necessidade em comum, em que g_i é o conjunto de jogadores do tipo i , para $i = 1, \dots, m$, tal que $N = \bigcup_{i=1}^m g_i$; e n_i é o número de jogadores do tipo i , para $i = 1, \dots, m$, tal que $n = \sum_{i=1}^m n_i$. Para esse jogo, Littlechild e Owen (1973) estabeleceram a hipótese do custo do maior jogador, que diz que a função custo de qualquer subconjunto de jogadores é igual ao custo do maior jogador naquele subconjunto, o que pode ser formalizado como segue². Considerando c_i como o custo associado com um jogador do tipo i (o custo de prover uma instalação que atenda a um jogador desse tipo) e que esses tipos podem ser ordenados linearmente indicando que

² O maior jogador é aquele que com mais alto custo. No trabalho de Littlechild e Owen (1973), por exemplo, o maior jogador é o avião de maior tamanho, que vai necessitar de uma pista de pouso mais sofisticada. Grahn-Voorneveld (2012) apresentam uma boa explicação para essa propriedade, afirmando que se uma infraestrutura acomoda um usuário com determinada necessidade, então ela permite acomodar todos os usuários com necessidades mais baixas, sem custo extra.

quanto maior o tipo maior o custo, tal que $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_m$. Com isso, um jogo sobre N pode ser definido pela função característica subaditiva³:

$$c(\emptyset) = 0 \text{ e } c(S) = \max\{c_i\} \quad (2)$$

que estabelece que o custo da coalizão S equivale ao maior custo entre seus integrantes, onde a maximização é tomada para todo i tal que $g_i \cap S \neq \emptyset$.

Outra forma de visualizar a função custo leva em conta o custo incremental necessário para atender a cada diferente tipo de jogador, de modo que:

$$c(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} b_i, \forall S \subseteq N, \quad (3)$$

onde $j(S) = \max\{j: S \cap g_j \neq \emptyset\}$, isto é, o grupo com mais alto custo contendo membros em S . Cada b_i indica o custo incremental necessário para que uma instalação utilizada pelos jogadores dos tipos g_1, \dots, g_{i-1} também possa ser utilizada pelos jogadores do tipo g_i . A relação entre as equações (2) e (3) é que o custo associado com um jogador de determinado tipo i equivale à soma dos custos incrementais para alcançá-lo, logo, $c_i = b_1 + \dots + b_i$, com $b_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, m$.

A suposição de que o custo de uma coalizão equivale ao custo do maior jogador retrata a existência de economias de escala. Quando jogadores de diferentes tipos se reúnem para arcar conjuntamente com os custos de uma instalação que atende a todos, eles se defrontam com um custo total que retrata a existência de ganhos com a cooperação, pois, considera-se que a função custo é subaditiva. É exatamente isso que está retratado na hipótese do custo do maior jogador.

Antes da formalização da hipótese do custo do maior jogador por meio do jogo do aeroporto o conceito já havia surgido nos trabalhos de Baker (1965 apud LITTLECHILD e OWEN, 1973, p.370) e Thompson (1971 apud LITTLECHILD e OWEN, 1973, p.370) que

³ Em uma função subaditiva o valor da soma de dois elementos é menor ou igual à soma dos valores dos elementos separados tomados separadamente: $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

também analisaram a forma como os custos de construção de uma pista de pouso deveriam ser divididos entre aeronaves de diferentes tipos. Os autores sugeriram que o custo de prover uma pista de pouso depende essencialmente do maior tipo de avião que irá utilizar o aeroporto e propuseram uma regra simples para alocar custos: divide-se o custo de prover uma pista que atenderá ao menor tipo de aeronave igualmente entre o número de pousos de todos os tipos de aeronaves. Posteriormente, divide-se o custo incremental de prover uma pista que atenda ao segundo menor tipo de aeronave (ou seja, o acréscimo em relação ao custo do tipo anterior) igualmente entre o número de pousos de todos os tipos de aeronaves, menos a primeira que não necessitaria dessa melhoria. E daí por diante até chegar ao custo incremental do maior tipo de aeronave que será dividido igualmente entre o número de pousos feitos apenas por aeronaves do maior tipo.

Com as informações anteriores, o jogo do aeroporto pode ser sintetizado como segue. Suponha que são dados m conjuntos não vazios de tipos de jogadores g_1, \dots, g_m com respectivamente n_1, \dots, n_m jogadores e m números não negativos b_1, \dots, b_m . O jogo do aeroporto correspondente para g_1, \dots, g_m e b_1, \dots, b_m é o jogo cooperativo (N, c) com $N = \bigcup_{i=1}^m g_i$ e função custo c definida por $c(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} b_i$ para todo $S \subseteq N$, onde $j(S) = \max\{j: S \cap g_j \neq \emptyset\}$.

O jogo do aeroporto é o modelo adotado para estabelecer os custos deste trabalho. E o método de alocação escolhido é o valor de Shapley devido às propriedades que o credenciam para isso. Contudo, Littlechild e Owen (1973) explicam que a fórmula tradicional do valor de Shapley apresentada na equação (1) é computacionalmente complexa se aplicada a jogos com as características vistas até aqui. As situações em que se divide o conjunto de jogadores em diferentes tipos (como descrito anteriormente) são aquelas onde há normalmente uma grande quantidade de jogadores, porém, a complexidade reside justamente em computar o valor de Shapley para jogos com muitos jogadores.

Nesses casos, Littlechild e Owen (1973) desenvolveram uma aproximação da fórmula original que pode ser obtida com relativa facilidade. Para isso, define-se $R_k = \bigcup_{i=k}^m g_i$ e $r_k = \sum_{i=k}^m n_i$, para $k = 1, \dots, m$. Ou seja, R_k é a união de diferentes tipos (conjuntos) de jogadores, iniciando em um k qualquer e terminando em m , o maior tipo; e r_k é a soma de todos os elementos dentro desses conjuntos. Percebe-se que $R_1 = \bigcup_{i=1}^m g_i = N$ e $r_1 = \sum_{i=1}^m n_i = n$. Deste modo, tem-se que o valor de Shapley pode ser representado agora por:

$$\phi_j(c) = \sum_{k=1}^i \frac{(c_k - c_{k-1})}{r_k}, \text{ para } j \in g_i, i = 1, \dots, m, \quad (4)$$

em que j é o jogador, sendo que $j \in g_i$ para $i = 1, \dots, m$ significa que o jogador j pertence ao tipo i e que existem m tipos de jogadores; $k = 1, \dots, i$ representa uma sequência de tipos de jogadores até atingir o tipo i ; $c_k - c_{k-1}$ é o custo incremental de prover uma instalação que atenda ao tipo k em relação ao tipo $k - 1$; r_k é o somatório de todos os jogadores do tipos k até m , o maior tipo. O desenvolvimento em detalhes para encontrar essa expressão está no Anexo 1.

Uma demonstração simples de como se utiliza a equação (4) é apresentada a seguir. Considera-se $j \in g_i$, com $i = 1, 2, 3$, o que por suposição implica $0 = c_0 < c_1 < c_2 < c_3$. A estrutura de cálculo do valor de Shapley é, respectivamente, para $j \in g_1$, $j \in g_2$ e $j \in g_3$ (ou seja, para um jogador do tipo 1, do tipo 2 e do tipo 3):

$$\begin{aligned} \phi_j(c) &= \sum_{k=1}^1 \frac{(c_k - c_{k-1})}{r_k} = \frac{c_1 - c_0}{n_1 + n_2 + n_3}, \text{ para } j \in g_1 \\ \phi_j(c) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(c_k - c_{k-1})}{r_k} = \frac{c_1 - c_0}{n_1 + n_2 + n_3} + \frac{c_2 - c_1}{n_2 + n_3}, \text{ para } j \in g_2 \\ \phi_j(c) &= \sum_{k=1}^3 \frac{(c_k - c_{k-1})}{r_k} = \frac{c_1 - c_0}{n_1 + n_2 + n_3} + \frac{c_2 - c_1}{n_2 + n_3} + \frac{c_3 - c_2}{n_3}, \text{ para } j \in g_3 \end{aligned} \quad (5)$$

Percebe-se exatamente a formalização da ideia de que cada custo incremental deve ser alocado entre os tipos de jogadores que usufruem ou necessitam daquela melhoria.

Como nas hipóteses do jogo do aeroporto todos os jogadores de um determinado tipo terão o mesmo valor de Shapley, Littlechild e Owen (1973) consideram que pode ser

conveniente ajustar a equação (4) para que seus resultados sejam apresentados diretamente em relação ao tipo e não aos jogadores⁴. Desse modo, fazendo $\phi_j(c) = \Phi_i$ para $j \in g_i$, então,

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} + (c_i - c_{i-1})/r_i, \quad (6)$$

em que Φ_{i-1} representa o valor acumulado até então, ou, a soma do valores dos tipos anteriores. A demonstração do desenvolvimento dessa fórmula para o mesmo exemplo anterior em que $i = 1,2,3$ é como segue:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 + \frac{c_1 - c_0}{r_1} = 0 + \frac{c_1 - c_0}{n_1 + n_2 + n_3} \\ \Phi_2 &= \Phi_1 + \frac{c_2 - c_1}{r_2} = \Phi_1 + \frac{c_2 - c_1}{n_2 + n_3} \\ \Phi_3 &= \Phi_2 + \frac{c_3 - c_2}{r_3} = \Phi_2 + \frac{c_3 - c_2}{n_3} \end{aligned} \quad (7)$$

Littlechild e Owen (1973) apresentam ainda um caso específico e bastante útil em que existe apenas 1 jogador de cada tipo. A simplificação apresentada anteriormente na equação (6) permanece sendo utilizada de modo que se $n_i = 1$ para todo i , então:

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} + (c_i - c_{i-1})/(n - i + 1) \quad (8)$$

Novamente apresenta-se o desenvolvimento dessa expressão para $i = 1,2,3$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_0 + \frac{c_1 - c_0}{n - i + 1} = 0 + \frac{c_1 - c_0}{3} \\ \Phi_2 &= \Phi_1 + \frac{c_2 - c_1}{n - i + 1} = \Phi_1 + \frac{c_2 - c_1}{2} \\ \Phi_3 &= \Phi_2 + \frac{c_3 - c_2}{n - i + 1} = \Phi_2 + \frac{c_3 - c_2}{1} \end{aligned} \quad (9)$$

Por fim, sabendo que a função característica é representada agora por uma função custo, o último e mais importante passo é a obtenção dos seus valores. Seguindo a suposição do custo do maior jogador, $c(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} b_i$ é o custo para cada coalizão $S \subseteq N$, onde $j(S) = \max\{j: S \cap g_j \neq \emptyset\}$ e $c_i = b_1 + \dots + b_i$ é o custo individual para cada jogador i , com $b_i \geq 0$,

⁴ Por exemplo, na aplicação de Littlechild e Owen (1973) 13.572 aeronaves de 11 tipos realizaram pousos e no trabalho de Fragnelli et al. (2000) 20.000 trens de 2 tipos utilizaram a estrada de ferro. Torna-se computacionalmente inviável calcular o valor de Shapley para cada jogador, porém, é muito mais prático calcular para cada tipo de jogador.

$i = 1, \dots, m$. O termo b_i representa o custo extra que deveria ser feito de modo que uma instalação que atendia ao tipo de jogador $i - 1$ também possa atender i , considerando que os tipos de jogadores estão linearmente ordenados. Baseando-se na proposta de Fragnelli e Iandolino (2004), os valores b_i são encontrados dividindo-se o valor da grande coalizão (custo total) proporcionalmente entre os jogadores de cada tipo conforme algum critério.

Para o caso dos projetos de despoluição da baía de Guanabara considera-se como critério relevante na atribuição dos custos a variável *volume de esgoto não tratado referido à água consumida* despejado por cada município. Assim, seja X_i o valor dessa variável para cada tipo de jogador e $c(N)$ o custo total a ser alocado, então⁵:

$$b_i = \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_m} c(N), \text{ para } i \in \{1, \dots, m\} \quad (10)$$

3 Baía de Guanabara

3.1 Características da área

Localizada no Estado do Rio de Janeiro, a Baía de Guanabara é a segunda maior do país com área superficial de aproximadamente 380 km² onde deságuam 55 rios e canais. A baía está inserida na bacia hidrográfica da Baía de Guanabara, uma área que concentra aproximadamente 12 milhões de habitantes em 17 municípios – em suas totalidades territoriais ou em fração delas – listados na Tabela 1 junto a um conjunto diverso de dados. Como a Lei n° 9.433/1997, que instituiu a Política Nacional de Recursos Hídricos, estabeleceu que a gestão dos recursos hídricos deveria ocorrer no âmbito da bacia hidrográfica, optou-se em adotá-la como referência.

⁵ Volume de esgoto não tratado referido à água consumida é o percentual da água consumida que retorna aos cursos dos rios na forma de esgoto sem qualquer tratamento.

Tabela 1 – Municípios da bacia hidrográfica da Baía de Guanabara

Município	População (2015)	PIB (2013)	PIB per capita (2013)	Índice de coleta de esgoto (%)	Índice de esgoto tratado referido à água consumida (%)
Belford Roxo	481.127	6.326.949.000	13.247,85	38,68	34,33
Cachoeiras de Macacu	56.290	1.005.106.000	18.067,05	43,45	0
Duque de Caxias	882.729	25.107.930.000	28.730,21	35,92	4,8
Guapimirim	56.515	721.475.000	13.188,22	-	-
Itaboraí	229.007	5.019.358.000	22.282,21	38,42	1,81
Magé	234.809	3.045.894.000	13.105,19	39,72	0
Maricá	146.549	7.191.559.000	51.533,19	16,58	5,72
Mesquita	170.751	1.887.434.000	11.090,48	32,07	7,03
Nilópolis	158.309	2.526.332.000	15.960,35	76,22	0
Niterói	496.696	19.908.508.000	40.284,31	94,92	94,92
Nova Iguaçu	807.492	13.261.453.000	16.477,64	35,9	0,05
Petrópolis	298.142	9.459.036.000	31.753,67	100	98,44
Rio Bonito	57.615	1.356.459.000	23.821,77	-	-
Rio de Janeiro	6.476.631	282.538.827.000	43.941,25	66,2	47,2
São Gonçalo	1.038.081	14.064.389.000	13.714,57	58,98	10,38
São João de Meriti	460.625	6.526.306.000	14.163,02	42	0
Tanguá	32.426	456.243.000	14.327,43	34	0

Fontes: IBGE (2016) e SNIS (2016)

A Baía de Guanabara vem sofrendo historicamente com o excesso de poluição oriundo principalmente de esgotos domésticos. A maior parte da área urbana e de alta densidade do Estado está ao seu redor, o que traz intensa pressão aos ambientes naturais. Segundo BVRIO/FUNBIO (2013), a partir da década de 1950 a região enfrentou um intenso crescimento populacional, maior industrialização e uma ocupação desornada de seu entorno, destacando-se o alto número de favelas, o que contribuiu e ainda contribui para sua degradação ambiental.

De um modo geral, a região apresenta uma situação bastante deficiente de coleta e tratamento de esgoto. Conforme atesta o Instituto Trata Brasil (2014) para dados de 2012, mais de 16% das moradias dos municípios da região ainda não tinham água tratada, apenas 58% tinham coleta de esgoto, sendo que a maior parte dos municípios registrava um

atendimento de saneamento da população urbana inferior a 10%. A Tabela 1 deixa em evidência os índices ruins relacionados à coleta e tratamento de esgoto em quase todos os municípios.

De acordo com BVRIO/FUNBIO (2013), a poluição da Baía de Guanabara traz uma grande quantidade de problemas, tais como: reduz a viabilidade das atividades turísticas em suas águas; prejudica o lazer da população nas praias e a prática de esportes náuticos; traz obstáculos à atividade pesqueira; e contribui para a deterioração da saúde humana, uma vez que as águas poluídas da baía e de seus rios podem transmitir doenças.

Dado esse quadro, alguns programas de despoluição foram estabelecidos ao longo do tempo com níveis diferentes de abrangência, mas, com sucesso limitado ou apenas temporário. No início dos anos 1990, foi desenvolvido o Programa de Despoluição da Baía de Guanabara (PDBG), com apoio financeiro do BID e do Japan Bank for International Cooperation (JBIC), e recursos de US\$ 1,2 bilhão. O PDBG tinha o objetivo principal de atender necessidades prioritárias nas áreas de saneamento básico, abastecimento de água, coleta e destinação final de resíduos sólidos, drenagem, controle industrial e monitoramento ambiental. De acordo com Lima (2006), não houve grande avanço na redução dos problemas ambientais da Baía de Guanabara, sendo que o próprio relatório final do BID sobre o programa o classificou como pouco efetivo. Feres (2014) destaca que o não cumprimento por parte do governo estadual da sua contrapartida financeira para a conclusão das obras fez com que 65% dos investimentos previstos na rede coletora de esgotos não fossem realizados, o que foi determinante para o insucesso do programa.

Atualmente, encontra-se em execução o Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM). Segundo SEA/INEA (2011), o PSAM busca a ampliação dos serviços de esgotamento sanitário nos municípios afluentes da Baía de Guanabara visando sua recuperação ambiental e conta com recursos obtidos junto ao BID no

valor de US\$ 451,98 milhões e com uma contrapartida de US\$ 188 milhões do governo estadual, totalizando gastos de US\$ 639,98 milhões. Em termos mais específicos o PSAM visa atender às seguintes metas: i) implantação e ampliação do sistema de coleta e tratamento de esgoto; ii) desenvolvimento operacional e fortalecimento institucional e; iii) promover políticas de saneamento sustentáveis nos municípios do entorno da baía. Com esse programa, a meta é passar dos atuais 27% da população atendida por serviços de tratamento de esgoto para 42%, o que revela também a necessidade de continuidade dos investimentos para que a universalização dos serviços de saneamento seja alcançada no longo prazo.

Vale dizer que a recuperação ambiental da Baía de Guanabara e a esperada melhoria na qualidade de vida da população residente nos municípios no seu entorno almejadas com a implantação do PSAM está diretamente ligado ao fato da cidade do Rio de Janeiro sediar os Jogos Olímpicos de 2016 e aos compromissos assumidos pelo governo do Estado por ocasião da escolha da cidade perante as entidades organizadoras do evento. Contudo, como aponta Instituto Trata Brasil (2014), o cronograma de implantação dos investimentos previstos no programa sofreu atrasos que inviabilizaram o cumprimento das metas antes das olimpíadas⁶.

3.2 Fonte de dados

Para alocar os custos de projetos de despoluição considera-se como variável determinante o *volume de esgoto não tratado referido à água consumida* (em 1000 m³) que cada município despejou ao longo do ano de 2013 (Tabela 2), disponível no Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (SNIS), base de dados do Ministério das Cidades.

Sabe-se que para aplicar o jogo do aeroporto é preciso dividir os jogadores em tipos com desejos ou necessidades similares. Acredita-se que a opção mais próxima da realidade é a

⁶ Conforme aponta Nogueira (2016), um mês antes do início dos jogos nenhuma meta ambiental assumida para o evento havia sido cumprida.

atribuição dos custos à figura central de cada município, a administração municipal, pois é sob sua responsabilidade que ocorreria esse pagamento. Esta aplicação se adequou melhor, portanto, ao caso especial em que existe um só jogador de cada tipo, os municípios.

Sobre os municípios listados na Tabela 1 não foram considerados Petrópolis pela reduzida parte territorial (formada por florestas e pequenos rios) inserida na bacia hidrográfica da Baía de Guanabara e Maricá por não ter ligação direta com as águas da baía (sua presença na bacia hidrográfica se deve às lagoas existentes em seu território). Também não foram considerados Guapimirim e Rio Bonito pela ausência de dados recentes no SNIS. Contudo, como ambos somados representam apenas 0,95% da população da área acredita-se que essas ausências não prejudicam a análise. Assim, a aplicação se restringiu ao número de 13 municípios.

Visto isso, a Tabela 2 apresenta os dados da função custo que possibilitarão o cálculo do valor de Shapley, com os municípios em ordem crescente em relação à variável determinante⁷. Os dados de custos presentes na tabela, b_i e c_i , foram estabelecidos inicialmente em termos percentuais, de modo que $\sum_{i=1}^{13} b_i = c_{13} = 100$, para que se tenha como primeiro resultado um caso geral, indicando percentualmente o quanto seria alocado de custo para cada município, independente do seu montante. Os cálculos para obtê-los estão no Anexo 2.

⁷ O índice i tem a função de indicar o grupo ou tipo de jogador no posterior cálculo do valor de Shapley.

Tabela 2 – Dados para o cálculo da alocação dos custos de projetos de despoluição na baía de Guanabara

i	Município	Volume de esgoto não tratado referido à água consumida (1.000 m ³ /ano)	b_i	c_i
1	Tanguá	1.241,00	0,1695	0,1695
2	Niterói	2.297,16	0,3137	0,4832
3	Mesquita	8.930,70	1,2195	1,7027
4	Magé	10.764,00	1,4699	3,1726
5	Itaboraí	11.708,18	1,5988	4,7714
6	Cachoeiras de Macacu	12.282,93	1,6773	6,4487
7	Nilópolis	12.784,00	1,7457	8,1944
8	Belford Roxo	20.614,47	2,8150	11,0095
9	São João de Meriti	32.356,00	4,4184	15,4279
10	Duque de Caxias	58.133,88	7,9385	23,3664
11	Nova Iguaçu	65.614,18	8,9600	32,3264
12	São Gonçalo	121.289,02	16,5627	48,8891
13	Rio de Janeiro	374.285,83	51,1109	100,00

Fontes: SNIS (2016) e Resultados da Pesquisa.

4 Resultados

4.1 Alocação de custos: caso geral

Considera-se a seguinte simulação de jogo. Um determinado volume de custos será realizado, por exemplo com a construção de infraestruturas, e seu custo deve ser compartilhado entre os municípios. Existem 13 tipos de jogadores – os municípios – que necessitam de uma infraestrutura em diferentes níveis de sofisticação conforme o volume de esgoto não tratado por cada um em relação à água consumida: municípios que despejam maior volume de esgoto sem tratamento necessitam de uma infraestrutura mais sofisticada. O compartilhamento dos custos pode significar gastos públicos menores, de modo que para os municípios é vantajoso pensar de forma conjunta nesse problema de alocação.

O jogo do aeroporto para esse problema de alocação é denotado por (N, c) , em que $N = \bigcup_{i=1}^{13} g_i$ e $n_i = 1$ para todo i , o que significa que há 1 jogador de cada tipo. A função

custo c é definida conforme a hipótese do custo do maior jogador por $c(S) = \max\{c_i\}$ para todo i tal que $S \cap g_i \neq \emptyset$ e $c_i = b_1 + \dots + b_i$, com $b_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, 13$. Os valores b_i são indicados por:

$$b_i = \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_{13}} c(N), \text{ para } i \in \{1, \dots, 13\}, \quad (11)$$

em que X_i representa o *volume de esgoto não tratado referido à água consumida* (em 1000 m³) despejado por cada município na Baía de Guanabara – listado na Tabela 2 – e $c(N)$ foi definido inicialmente como igual a 100.

Com isso, se obtém as alocações de custo do valor de Shapley em termos percentuais indicadas na Tabela 3, sendo que os cálculos estão em detalhes no Anexo 3

Tabela 3 – Valor de Shapley para os custos de projetos de despoluição da Baía de Guanabara, em termos percentuais

i	Município	Valor de Shapley (%)
1	Tanguá	0,0130
2	Niterói	0,0393
3	Mesquita	0,1500
4	Magé	0,2970
5	Itaboraí	0,4747
6	Cachoeiras de Macacu	0,6843
7	Nilópolis	0,9337
8	Belford Roxo	1,4029
9	São João de Meriti	2,2866
10	Duque de Caxias	4,2712
11	Nova Iguaçu	7,2579
12	São Gonçalo	15,5392
13	Rio de Janeiro	66,6501
	Total	100,00

Fonte: Resultados da Pesquisa

Vê-se que a maior parte do custo (66,65%) seria alocada ao município do Rio de Janeiro. Esse resultado está em conformidade com as expectativas, visto que é o município que tem a maior porção de terra margeada pela baía e tem uma população total superior à

soma de todos os demais municípios, fatores que contribuem para que o município despeje o maior volume de esgotos sem tratamento em termos absolutos.

Uma exceção positiva a ser destacada é Niterói que apesar de ter a quinta maior população entre os municípios listados está entre os que teriam a menor porcentagem na alocação dos custos, com apenas 0,039%. Isso se deve aos bons números de saneamento que destoam completamente dos demais, pois, o índice de coleta de esgoto em Niterói é de 94,92% das habitações, sendo que todo o esgoto coletado é tratado (como indicado na Tabela 1)⁸. Destaca-se ainda de forma negativa o montante de custo alocado ao município de São Gonçalo (15,54%), o que equivale aproximadamente ao dobro e ao triplo dos custos alocados para Nova Iguaçu (7,26%) e Duque de Caxias (4,27%), que são municípios próximos em número de habitantes. Isso se deve ao grande volume de esgoto sem tratamento despejado em São Gonçalo, que também se sobressai negativamente por possuir um dos menores PIB *per capita* da região.

De um modo geral, contudo, percebe-se que a alocação de custos determinada pelo valor de Shapley vem seguindo a proporção populacional, pois, municípios com mais habitantes – por despejarem maior volume de esgotos sem tratamento – estão com uma sobrecarga maior dos custos. Essa afirmação não pode ser tomada como verdade absoluta (vide o bom exemplo de Niterói), porém, é provável que em locais populosos haja maior dificuldade para a prestação dos serviços de saneamento, ainda mais quando combinados com fatores como crescimento demográfico desordenado e presença maciça de habitações irregulares e/ou em condições precárias, como as favelas.

⁸ De acordo com Instituto Trata Brasil (2016), o saneamento básico e abastecimento de água no município de Niterói são feitos por empresa privada que, por meio do sistema de concessão, assumiu a gestão desses serviços no município. Para o ano de 2015, Niterói ocupou o 6º lugar no ranking das melhores cidades em saneamento básico em todo o Brasil.

4.2 Alocação de custos: comparação com os dados do Instituto Trata Brasil

Os custos dos projetos de despoluição mais relevantes que ocorreram na Baía de Guanabara foram historicamente suportados pelos governos estadual e federal com auxílio de financiamento externo, fazendo com que não existam dados reais sobre custos alocados aos municípios que sirvam de comparação com os resultados do valor de Shapley. Entretanto, o estudo realizado pelo Instituto Trata Brasil (2014) pode ser útil para tal fim. No estudo citado foram estimados os custos da universalização do acesso ao saneamento básico nos municípios da Baía de Guanabara, tendo como referência os valores históricos de custo do investimento por acesso ao saneamento disponibilizado no banco de dados do SNIS. Ressaltando que além da coleta e tratamento de esgotos, também foi levado em consideração dados do abastecimento de água.

Assim, o Instituto Trata Brasil (2014) estimou os custos da universalização do saneamento básico para cada município (a preços de 2013 e para um horizonte temporal de 30 anos), conforme mostra a Tabela 4⁹. Com o custo total (R\$ 27.412,76 milhões) pode-se aplicar a fórmula do valor de Shapley do jogo do aeroporto para obter o custo alocado a cada município e tecer uma comparação entre os resultados, que também são apresentados em termos percentuais.

⁹ No referido trabalho as estimativas apontam também que os benefícios dos investimentos para universalização do saneamento seriam de R\$ 60,2 bilhões em trinta anos, de modo que os ganhos seriam expressivos. Esses ganhos abrangem: (i) a redução de despesas no sistema de saúde, (ii) o aumento da eficiência no mercado de trabalho propiciado pela queda no número de afastamento por doenças infecciosas, (iii) o aumento da produtividade do trabalho no presente e (iv) das futuras gerações, que terão escolaridade maior, dado o ganho de desempenho escolar esperado, (v) a valorização imobiliária e (vi) o aumento da renda do turismo.

Tabela 4 – Custos da universalização do saneamento calculados pelo Instituto Trata Brasil e comparados com a alocação do valor de Shapley

Município	Trata Brasil (milhões R\$)	Trata Brasil (%)	Valor de Shapley (milhões R\$)	Valor de Shapley (%)
Nilópolis	49,26	0,18	255,96	0,93
Tanguá	63,41	0,23	3,57	0,01
Niterói	213,09	0,78	10,74	0,04
Cachoeiras de Macacu	235,55	0,86	187,60	0,68
Mesquita	595,52	2,17	41,13	0,15
Itaboraí	751,75	2,74	130,12	0,47
Magé	759,19	2,77	81,42	0,30
São João de Meriti	1.554,01	5,67	626,82	2,29
Belford Roxo	1.788,31	6,52	384,57	1,40
Nova Iguaçu	2.609,02	9,52	1.989,58	7,26
Duque de Caxias	3.182,28	11,61	1.170,86	4,27
São Gonçalo	4.014,31	14,64	4.259,73	15,54
Rio de Janeiro	11.597,07	42,31	18.270,64	66,65
Total	27.412,76	100,00	27.412,76	100,00

Fontes: Instituto Trata Brasil (2014) e Resultados da Pesquisa

Observando especificamente os resultados do Instituto Trata Brasil destaca-se novamente o mau resultado de São Gonçalo, com 14,64% dos custos, ainda que dessa vez esteja acompanhado mais de perto por Duque de Caxias e Nova Iguaçu, municípios também reconhecidos pelos índices ruins de saneamento. E, mais uma vez, se sobressai a pequena participação de Niterói responsável por apenas 0,78% dos custos, pois, além dos bons índices de coleta e tratamento de esgoto o município tem um atendimento de 100% da população com abastecimento de água.

Em termos comparativos, os percentuais de distribuição do custo em ambos os resultados seguem uma tendência parecida, contudo, existem discrepâncias que podem estar relacionadas ao fato que o Instituto Trata Brasil também considerou o abastecimento de água, ainda que uma afirmação concreta necessite de análises posteriores. Comparativamente, destaca-se que na alocação de custos do valor de Shapley há uma penalização bem mais

significativa ao município que tem maior volume de esgotos não tratado, o Rio de Janeiro, que fica responsável por 66,65% do custo contra 42,31% no resultado do Instituto Trata Brasil.

4.3 Alocação de custos: valores do Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM)

De posse das porcentagens do valor de Shapley encontradas no jogo do aeroporto desenvolvido na seção 4.1 pode-se aplicá-las aos dados do PSAM. Como já foi descrito, o PSAM conta com recursos do BID, cerca de US\$ 451,98 milhões, que serão complementados por recursos do governo do Estado, US\$ 188 milhões, totalizando um investimento de US\$ 639,98 milhões que visam contribuir para a reversão da degradação ambiental da baía de Guanabara.

Supondo que os municípios devem alocar entre eles os custos do financiamento obtido junto ao BID, tem-se que o valor seria compartilhado da maneira retratada na Tabela 5.

Tabela 5 – Alocação de custos dos recursos obtidos junto ao BID para o PSAM

Município	Custo (US\$)	Taxa (US\$/hab)
Tanguá	58.919,33	1,82
Niterói	177.070,91	0,36
Mesquita	678.168,27	3,97
Magé	1.342.527,66	5,72
Itaboraí	2.145.454,74	9,37
Cachoeiras de Macacu	3.093.090,37	54,95
Nilópolis	4.220.282,92	26,66
Belford Roxo	6.340.841,65	13,18
São João de Meriti	10.334.898,21	22,44
Duque de Caxias	19.305.027,58	21,87
Nova Iguaçu	32.804.158,71	40,62
São Gonçalo	70.234.249,24	67,66
Rio de Janeiro	301.245.310,39	46,51
Total	451.980.000,00	-

Fonte: Resultados da pesquisa

Apenas a título de comparação entre os municípios, faz-se um exercício adicional supondo que esse montante seria arrecadado dos habitantes por meio do estabelecimento de uma taxa (US\$/habitante). Como se vê na Tabela 5, caso os municípios repassassem esse custo à população, o destaques negativos seriam São Gonçalo e Cachoeiras de Macacu, onde os custos das obras de despoluição do PSAM resultariam em taxas de, respectivamente, 67,66 US\$/hab e 54,95 US\$/hab. Positivamente, destaca-se Niterói e Tanguá com as menores taxas para cobrir os custos do PSAM. Respectivamente, 0,36 US\$/hab e 1,82 US\$/hab. Todavia, ainda que possa ser um indicativo da dificuldade ou facilidade que cada município encontraria para cobrir seu custo, não se pode concluir nada sobre a real capacidade dos municípios de pagar o empréstimo do BID, pois, uma análise mais completa deveria levar em consideração um conjunto maior de informações.

5 Considerações Finais

A degradação da baía de Guanabara em decorrência do despejo de esgotos domésticos é um problema que se arrasta há bastante tempo, sendo que poucos avanços foram observados. Com uma situação ambiental cada vez mais debilitada, serão necessários volumosos investimentos para reverter esse quadro. Concomitantemente, serão necessárias também novas propostas para avançar a discussão e torná-la efetiva. Visto isso, o presente trabalho propôs uma forma de alocar os custos de projetos de despoluição na baía de Guanabara entre os municípios que despejam esgotos sem tratamento em suas águas. Para esse objetivo utilizou-se o jogo do aeroporto, estrutura que modela os custos produzidos quando um conjunto de jogadores compartilha uma construção, e o método de alocação adotado para distribuir os custos entre os municípios foi o valor de Shapley, conceito de solução pertencente à teoria dos jogos cooperativos.

Para a aplicação, foram empregados dados do Programa de Saneamento Ambiental dos Municípios do Entorno da Baía de Guanabara (PSAM), o programa de despoluição atualmente em execução e que conta primordialmente com financiamento do Banco Interamericano de Desenvolvimento (BID). A maior parte dos custos recaiu sobre o município do Rio de Janeiro que é o que mais despeja esgotos sem tratamento em termos absolutos, visto ser o município mais populoso. Também se destacou o alto percentual de custo alocado para São Gonçalo que tem índices piores que os municípios de tamanho populacional semelhante. Todavia, o bom exemplo de Niterói deixa em evidência que o método de alocação sugerido, ao mesmo tempo em que penaliza os maiores responsáveis em causar os custos, também recompensa aqueles que tratam seus esgotos.

Uma ressalva sobre este trabalho é em relação à capacidade que os municípios teriam de arcar com esses custos que historicamente foram de responsabilidade dos governos estadual e federal, ainda mais quando se sabe das deficiências de receitas dos municípios brasileiros e do alto índice de pobreza ao redor da baía. Assim, em estudos posteriores essa análise da capacidade de suportar os custos deve ser aprofundada, porque pode inviabilizar o andamento dos projetos. No entanto, é uma forma de indicar e atribuir responsabilidades aos causadores dos custos para que sejam incentivados a adotar práticas mais eficientes em relação ao saneamento.

Faz-se uma ressalva também em relação à estrutura de governança. O presente trabalho, ao sugerir que os municípios sejam cobrados pelos danos causados identifica nessa proposta uma oportunidade dos municípios tornarem-se agentes participativos no processo de tomada de decisão. Contudo, isso requer uma flexibilização do atual cenário, pois, ainda existe uma centralização da gestão nas mãos do governo estadual. Seria necessária uma maior integração com os municípios, o que estaria em conformidade com as discussões recentes

sobre meio ambiente – e com a legislação nacional – que apontam a necessidade de uma participação mais efetiva de agentes locais.

Acredita-se que este trabalho ao apresentar um cenário inédito possa contribuir para futuras discussões sobre a reversão da poluição da baía de Guanabara. Espera-se trazer contribuições também em termos metodológicos, pois, há poucas aplicações do valor de Shapley em problemas econômicos de alocação no Brasil, e nenhuma utilização do jogo do aeroporto. Ademais, acredita-se na adequação da metodologia de alocação de custos ao tema em discussão, visto que obras de tão grande tamanho e complexidade poderiam ser mais facilmente suportadas se seus custos fossem compartilhados entre muitos agentes, ao invés de poucos ou um só. Por fim, ressalta-se ainda a importância de discutir o tema, pois, o fato de o Brasil possuir péssimos índices de saneamento faz com que ao mesmo tempo exista um grande potencial de melhora em seus indicadores sociais e de qualidade de vida da população.

6 Referências

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº 9.433**, 1997.

BVRIO/FUNBIO. **Sistemas de cotas negociáveis e o controle de efluentes industriais na baía de Guanabara**. Rio de Janeiro: Bolsa Verde do Rio de Janeiro; Fundo Brasileiro para a Biodiversidade, 2013.

COPPETEC - Laboratório de hidrologia e estudos de meio ambiente da COPPE/UFRJ. **Plano Estadual de Recursos Hídricos do Estado do Rio de Janeiro - Relatório Síntese**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2014.

DUBEY, P. The shapley value as aircraft landing fees revisited. **Management Science**, v. 28, n. 8, p. 869-874, 1982.

FERES, J. Em Águas Turvas: governança do programa de despoluição da baía de Guanabara. In: **Boletim de Análise Político-Institucional / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada**. Rio de Janeiro: IPEA, 2014.

FRAGNELLI, V.; GARCÍA-JURADO, I.; NORDE, H.; PATRONE, F.; TIJS, S. How to share railways infrastructure costs? In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 91-101.

FRAGNELLI, V.; IANDOLINO, A. A cost allocation problem in urban solid wastes collection and disposal. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 59, n. 3, p. 447-463, 2004.

GRAHN-VOORNEVELD, S. Sharing costs in Swedish road ownership associations. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 46, n. 4, 645-651, 2012.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **IBGE – Cidades**. Disponível em: <<http://www.cidades.ibge.gov.br/xtras/home.php>>. Acesso em: 20 mai. 2016.

INSTITUTO TRATA BRASIL. **Benefícios econômicos da expansão do saneamento na Baía de Guanabara**. São Paulo: ITB, 2014.

INSTITUTO TRATA BRASIL. **Tratamento dos esgotos em Niterói avança e município está perto da universalização**. Disponível em: <<http://www.tratabrasil.org.br/tratamento-dos-esgotos-em-niteroi-avancam-e-municipio-esta-perto-da-universalizacao>>. Acesso em: 20 dez. 2016.

LEMAIRE, J. An application of game theory: cost allocation. **Astin Bulletin.**, v.14, n.1, 61-81, 1984.

LIMA, E. C. R. **Qualidade de água da baía de Guanabara e saneamento: uma abordagem sistêmica**. 183 f. Tese de Doutorado em Planejamento Energético. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

LITTLECHILD, S. C. A simple expression for the nucleolus in a special case. **International Journal of Game Theory**, v. 3, n. 1, p. 21-29, 1974.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A further note on the nucleolus of the airport game. **International Journal of Game Theory**, v. 5, n. 2-3, p. 91-95, 1976.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A simple expression for the Shapley value in a special case. **Management Science**, v. 20, n. 3, 370-372, 1973.

LOEHMAN, E.; ORLANDO, J.; TSCHIRHART, J.; WHINSTON, A. Cost allocation for a regional wastewater treatment system. **Water resources research**, v. 15, n. 2, p. 193-202, 1979.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.; GREEN, J. **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

MONTET, C.; SERRA, D. **Game theory and economics**. New York: Palgrave Macmillan, 2003.

MYERSON, R. B. **Game theory: an analysis of conflict**. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

NOGUEIRA, I. Rio descumpre todas as metas ambientais para a Olimpíada. **Folha de São Paulo**, São Paulo, 02 jul. 2016. Disponível em: <<http://temas.folha.uol.com.br/um-mes-para-a-olimpiada/meio-ambiente/rio-descumpre-todas-as-metas-ambientais-para-a-olimpiada.shtml>>. Acesso em: 02 jul. 2016.

NORDE, H.; FRAGNELLI, V.; GARCIA-JURADO, I.; PATRONE, F.; TIJS, S. Balancedness of infrastructure cost games. **European Journal of Operational Research**, v. 136, n. 3, p. 635-654, 2002.

ROTH, A. **The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

SEA/INEA. **O estado do ambiente: indicadores ambientais do Rio de Janeiro 2010**. Rio de Janeiro: Secretaria de Estado do Ambiente, Instituto Estadual do Ambiente, 2011.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. **Contributions to the Theory of Games**, v. 2, n. 28, p. 307-317, 1953.

SNIS. **Sistema Nacional de Informações em Saneamento**. Disponível em: <<http://app.cidades.gov.br/serieHistorica/>>. Acesso em 13 mai. 2016

TIJS, S.; DRIESSEN, T. Game Theory and Cost Allocation Problems. **Management Science**, v. 32, n. 8, 1015-1028, 1986.

YOUNG, H.P. Cost allocation. In: AUMANS, R.J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 2. New York: Elsevier Science, 1994. p. 1192-1235.

ANEXO 1

Desenvolvimento da adaptação do valor de Shapley feita por Littlechild e Owen (1973)

Para encontrar a expressão do valor de Shapley desenvolvida por Littlechild e Owen (1973), representada pela equação (4), tem-se os seguintes passos. Considerando todos os tipos de jogadores ($k = 1, \dots, m$) a função característica pode ser definida como segue, tendo em vista o universo de jogadores N .

$$c_k(S) = 0 \text{ se } S \cap R_k = \emptyset$$

$$c_k(S) = c_k - c_{k-1}, \text{ se } S \cap R_k \neq \emptyset$$

Na primeira linha, o custo de atender a um jogador do tipo k é zero para uma coalizão que não tem jogador que necessitará desse custo (que são os jogadores de k em diante, lembrando que $R_k = \bigcup_{i=k}^m g_i$). Na segunda, o custo de atender a um jogador do tipo k é $c_k - c_{k-1}$ (o acréscimo em relação ao tipo anterior) caso a coalizão tenha jogadores que necessitarão daquele custo (que são os jogadores de k em diante).

Isso é um jogo simétrico para r_k jogadores com $n - r_k$ dummies. Ou seja, considerando que $r_k = \sum_{i=k}^m n_i$, significa que os r_k jogadores enfrentarão a mesma função característica, $c_k - c_{k-1}$, e dividirão entre eles esse custo. Assim, tem-se o valor de cada jogador j :

$$\phi_j(c_k) = 0, \text{ se } j \notin R_k.$$

$$\phi_j(c_k) = (c_k - c_{k-1})/r_k, \text{ se } j \in R_k.$$

Na primeira linha, se um jogador não pertence a um tipo atendido ou que necessita daquele custo então seu valor é zero. Caso contrário ele dividirá simetricamente o valor $c_k - c_{k-1}$ entre os jogadores de todos os tipos que serão atendidos por aquele custo.

Agora, considerando que uma coalizão $S \subseteq N$ pode ter jogadores de diferentes tipos tem-se que $c(S) = \sum_{k=1}^m c_k(S)$, ou seja, o valor da coalizão S é a soma dos custos para

atender a cada tipo¹⁰. Por consequência, $\phi_j(c) = \sum_{k=1}^m \phi_j(c_k)$, ou seja, o valor do jogador j é a soma de seus valores considerando cada custo que ele necessita. Contudo, se $j \in g_i$, o somatório do lado direito será zero para $k > i$ e será $(c_k - c_{k-1})/r_k$ para $k \leq i$. Assim, o valor de Shapley pode ser representado finalmente pela equação:

$$\phi_j(c) = \sum_{k=1}^i (c_k - c_{k-1})/r_k \text{ para } j \in g_i, i = 1, \dots, m$$

¹⁰ O valor da coalizão, como se sabe, equivale também ao custo do maior jogador. Se $k = 1, \dots, m$, tem-se o valor da coalizão $c(S) = \sum_{k=1}^m c_k(S) = (c_1 - c_0) + (c_2 - c_1) + (c_3 - c_2) + \dots + (c_{m-1} - c_{m-2}) + (c_m - c_{m-1}) = c_m$

ANEXO 2

Estimação dos custos para o cálculo do valor de Shapley em termos percentuais

Seja $b_i = \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_{13}} c(N)$ e $c_i = b_1 + \dots + b_i$, com $b_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, 13$ simbolizando os municípios conforme a Tabela 2. Dado que X_1, \dots, X_{13} é o *volume de esgoto não tratado referido à água consumida* despejado por cada município (também contidos na Tabela 2) e que $c(N) = 100$, tem-se que a estimação dos custos para encontrar o valor de Shapley percentual conforme as hipóteses do jogo do aeroporto (seção 2.2) estão calculadas a seguir.

$$b_1 = \frac{1.241}{732.301,34} \times 100 = 0,1695; \text{ e } c_1 = b_1 = 0,1695.$$

$$b_2 = \frac{2.297,16}{732.301,34} \times 100 = 0,3137; \text{ e } c_2 = b_1 + b_2 = 0,4832.$$

$$b_3 = \frac{8.930,70}{732.301,34} \times 100 = 1,2195; \text{ e } c_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1,7027.$$

$$b_4 = \frac{10.764}{732.301,34} \times 100 = 1,4699; \text{ e } c_4 = b_1 + \dots + b_4 = 3,1726.$$

$$b_5 = \frac{11.708,18}{732.301,34} \times 100 = 1,5988; \text{ e } c_5 = b_1 + \dots + b_5 = 4,7714.$$

$$b_6 = \frac{12.282,93}{732.301,34} \times 100 = 1,6773; \text{ e } c_6 = b_1 + \dots + b_6 = 6,4487.$$

$$b_7 = \frac{12.784}{732.301,34} \times 100 = 1,7457; \text{ e } c_7 = b_1 + \dots + b_7 = 8,1944.$$

$$b_8 = \frac{20.614,47}{732.301,34} \times 100 = 2,8150; \text{ e } c_8 = b_1 + \dots + b_8 = 11,0095.$$

$$b_9 = \frac{32.356}{732.301,34} \times 100 = 4,4184; \text{ e } c_9 = b_1 + \dots + b_9 = 15,4279.$$

$$b_{10} = \frac{58.133,88}{732.301,34} \times 100 = 7,9385; \text{ e } c_{10} = b_1 + \dots + b_{10} = 23,3664.$$

$$b_{11} = \frac{65.614,18}{732.301,34} \times 100 = 8,9600; \text{ e } c_{11} = b_1 + \dots + b_{11} = 32,3264.$$

$$b_{12} = \frac{121.289,02}{732.301,34} \times 100 = 16,5627; \text{ e } c_{12} = b_1 + \dots + b_{12} = 48,8891.$$

$$b_{13} = \frac{374.285,83}{732.301,34} \times 100 = 51,1109; \text{ e } c_{13} = b_1 + \dots + b_{13} = 100,00.$$

ANEXO 3

Cálculos do valor de Shapley em termos percentuais

De posse dos valores encontrados no Anexo 2 e utilizando a equação (8) – para o caso especial do jogo do aeroporto em que há um jogador de cada tipo – as alocações do valor de Shapley para os custos de projetos de despoluição da baía de Guanabara, em termos percentuais, foram encontradas conforme os cálculos a seguir, onde $i = 1, \dots, 13$ simboliza os municípios como indicado na Tabela 2.

$$\Phi_1 = \Phi_0 + \frac{c_1 - c_0}{n-i+1} = \Phi_0 + \frac{c_1 - c_0}{13-1+1} = 0 + \frac{0,1695}{13} = 0,0130.$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \frac{c_2 - c_1}{n-i+1} = \Phi_1 + \frac{c_2 - c_1}{13-2+1} = 0,0130 + \frac{0,4832 - 0,1695}{12} = 0,0392.$$

$$\Phi_3 = \Phi_2 + \frac{c_3 - c_2}{n-i+1} = \Phi_2 + \frac{c_3 - c_2}{13-3+1} = 0,0392 + \frac{1,7027 - 0,4832}{11} = 0,1500.$$

$$\Phi_4 = \Phi_3 + \frac{c_4 - c_3}{n-i+1} = \Phi_3 + \frac{c_4 - c_3}{13-4+1} = 0,1500 + \frac{3,1726 - 1,7027}{10} = 0,2970.$$

$$\Phi_5 = \Phi_4 + \frac{c_5 - c_4}{n-i+1} = \Phi_4 + \frac{c_5 - c_4}{13-5+1} = 0,2970 + \frac{4,7714 - 3,1726}{9} = 0,4747.$$

$$\Phi_6 = \Phi_5 + \frac{c_6 - c_5}{n-i+1} = \Phi_5 + \frac{c_6 - c_5}{13-6+1} = 0,4747 + \frac{6,4487 - 4,7714}{8} = 0,6843.$$

$$\Phi_7 = \Phi_6 + \frac{c_7 - c_6}{n-i+1} = \Phi_6 + \frac{c_7 - c_6}{13-7+1} = 0,6843 + \frac{8,1944 - 6,4487}{7} = 0,9337.$$

$$\Phi_8 = \Phi_7 + \frac{c_8 - c_7}{n-i+1} = \Phi_7 + \frac{c_8 - c_7}{13-8+1} = 0,9337 + \frac{11,0095 - 8,1944}{6} = 1,4029.$$

$$\Phi_9 = \Phi_8 + \frac{c_9 - c_8}{n-i+1} = \Phi_8 + \frac{c_9 - c_8}{13-9+1} = 1,4029 + \frac{15,4279 - 11,0095}{5} = 2,2866.$$

$$\Phi_{10} = \Phi_9 + \frac{c_{10} - c_9}{n-i+1} = \Phi_9 + \frac{c_{10} - c_9}{13-10+1} = 2,2866 + \frac{23,3664 - 15,4279}{4} = 4,2712.$$

$$\Phi_{11} = \Phi_{10} + \frac{c_{11} - c_{10}}{n-i+1} = \Phi_{10} + \frac{c_{11} - c_{10}}{13-11+1} = 4,2712 + \frac{32,3264 - 23,3664}{3} = 7,2579.$$

$$\Phi_{12} = \Phi_{11} + \frac{c_{12} - c_{11}}{n-i+1} = \Phi_{11} + \frac{c_{12} - c_{11}}{13-12+1} = 7,2579 + \frac{48,8891 - 32,3264}{2} = 15,5392.$$

$$\Phi_{13} = \Phi_{12} + \frac{c_{13} - c_{12}}{n-i+1} = \Phi_{12} + \frac{c_{13} - c_{12}}{13-13+1} = 15,5392 + \frac{100 - 48,8891}{1} = 66,6501.$$

CAPÍTULO 6

ARTIGO 3: JOGO DO CUSTO DE INFRAESTRUTURA APLICADO À ALOCAÇÃO DOS CUSTOS DE GESTÃO DOS RESÍDUOS SÓLIDOS URBANOS

1 Introdução

A gestão dos resíduos sólidos tem se tornado um desafio cada vez maior em todo o mundo em decorrência do grande aumento da população urbana, da industrialização e da elevação no padrão de consumo verificados nas últimas décadas. Como o manejo inadequado dos resíduos leva a fatores como contaminação da água e do solo e pode causar danos consideráveis à saúde pública, esse tema vem sendo abordado com crescente preocupação. De acordo com Ezeah e Roberts (2012), em resposta a esses desafios, muitos países desenvolvidos empreenderam ambiciosas reformas ambientais, registrando notáveis avanços na gestão sustentável dos resíduos. Por outro lado, Al-Khatib et al. (2010) lembram que nas cidades dos países em desenvolvimento, a gestão dos resíduos ainda é altamente negligenciada e justamente nessas localidades a população urbana vem crescendo significativamente. Dados revelam que, em média, 50% dos residentes não têm serviços de coleta em áreas urbanas de países de baixa e média renda.

A maior preocupação com os resíduos tem se materializado em novas legislações pelo mundo. No Brasil, foi aprovada em 2010 – após 21 anos de tramitação – a Lei nº 12.305 que instituiu a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS) e ajudou a estabelecer um novo cenário para o setor no país. No Estado do Rio de Janeiro a resposta a essa lei foi a elaboração do Plano Estadual de Resíduos Sólidos (PERS/RJ) que é consequência de estudos desenvolvidos pela Secretaria de Estado do Ambiente (SEA) como parte do Programa Lixão Zero. Com o intuito de promover e aprimorar a gestão dos resíduos sólidos em todo o território fluminense o PERS/RJ foi publicado em 2013 e apresenta o cenário do setor no

Estado do Rio de Janeiro, assim como um conjunto de metas, proposições e estratégias que devem ser consideradas pelos gestores públicos e pelo setor produtivo, ao tomarem decisões referentes à gestão e manejo dos resíduos sólidos.

Uma das propostas desenvolvidas no PERS/RJ em conformidade com a PNRS é a regionalização da gestão dos resíduos sólidos urbanos (RSU), traduzida no incentivo à formação de consórcios públicos intermunicipais para operar aterros sanitários regionais de modo a extrair ganhos com a cooperação e superar obstáculos em comum¹. Segundo SEA (2013), um total de oito consórcios intermunicipais de gestão de RSU foi inicialmente proposto para o Estado do Rio de Janeiro com base nos diagnósticos e estudos, de modo que nos últimos anos teve início a implantação de aterros sanitários ou centrais de tratamento e destinação de resíduos sólidos (CTDR), bem como ações para a remediação dos lixões municipais. Além dos consórcios, existem os arranjos regionais, que também são agrupamentos de municípios que levam seus resíduos para uma CTDR ou aterro sanitário comum na busca de uma escala ótima de gestão, com a diferença de ainda não estarem organizados institucionalmente como consórcios.

Todavia, com a formação dos consórcios intermunicipais surge um importante problema, que é exatamente a maneira como seus integrantes dividirão entre si os custos da gestão dos RSU. Dado que as propostas (e a execução) para formação dos consórcios no Estado do Rio de Janeiro são extremamente recentes e que aqueles já instituídos ainda necessitam se consolidar institucionalmente, torna-se necessária a continuidade de estudos que abordem não apenas os custos envolvidos no processo de gestão, mas, a alocação dos mesmos entre os municípios que compõem os consórcios, pois, essa é uma etapa que pode

¹ Os resíduos sólidos urbanos (RSU) são compostos pelos resíduos domiciliares, oriundos de atividades domésticas em residências urbanas, e os resíduos de limpeza urbana, decorrentes da varrição de vias públicas. Como o diagnóstico retratado em SEA (2013) mostra que 97% da população estadual se concentram em áreas urbanas, o foco das análises presentes nesse trabalho são os RSU, o que se deve também às dificuldades e particularidades na gestão de outros resíduos, como os resíduos de serviços de saúde (RSS).

inviabilizar a cooperação e causar conflitos se não for feita adequadamente. Nesse cenário, o presente trabalho tem como objetivo estudar exatamente o problema da alocação de custos dos consórcios públicos intermunicipais criados para gerenciar os serviços de resíduos sólidos urbanos.

Em termos metodológicos utiliza-se o valor de Shapley, conceito de solução dos jogos cooperativos desenvolvido por Shapley (1953) e adotado com frequência na análise de problemas de alocação. E, na modelagem dos custos, faz-se uso do chamado jogo do custo de infraestrutura – apresentado em Fragnelli et al. (2000) – que permite maior refinamento e conhecimento sobre os custos a serem analisados, pois, os divide em custos de construção e custos de manutenção, de modo que cada um desses é alocado separadamente pelo valor de Shapley. Karmperis et al. (2013) lembram que o desafio atual na gestão dos resíduos sólidos tem sido considerar o processo de interação cooperativa entre as partes interessadas, o que é apontado como uma falha das ferramentas mais utilizadas no passado e justifica a inclusão da teoria dos jogos em novas análises.

Alguns artigos utilizaram abordagens da teoria dos jogos para estudar o problema da gestão de resíduos sólidos, entre os quais têm-se Minehart e Neeman (2002), Fragnelli e Iandolino (2004), Moretti (2004), Jorgensen (2010), Jorgensen et al. (2010) e Karmperis et al. (2013). Na literatura brasileira, entretanto, não foi encontrado nenhum trabalho, não obstante a gestão dos resíduos sólidos ser um campo propício para a aplicação dos conceitos de cooperação comuns na teoria dos jogos.

Visto que, segundo SEA (2013), o PERS/RJ foi estruturado para um horizonte temporal de 20 anos (de 2013 a 2033), mas, prevendo revisões a cada 4 anos, acredita-se que no que se refere à análise e alocação de custos, trabalhos que apresentem novas metodologias poderão ser úteis nas revisões que acontecerão futuramente tendo em vista o aprimoramento da gestão dos RSU no Estado. Ademais, a própria formação de consórcios não é um processo

fixo e requer a continuidade dos estudos, pois, como também afirma-se no Plano, trata-se de um processo dinâmico que pode ser atualizado constantemente em consequência da implantação de novas soluções.

É o que se vê no estudo de caso deste trabalho, onde são aplicados o jogo do custo de infraestrutura e o valor de Shapley – respectivamente para modelar e alocar custos – na proposta de criação de um novo consórcio intermunicipal, o Consórcio Sul Fluminense, que seria resultante da junção do Consórcio Sul Fluminense II e do Arranjo Barra Mansa. Esse exercício tem respaldo nos próprios estudos do PERS/RJ, pois SEA (2013b) aponta uma dificuldade de encontrar áreas ambientalmente adequadas nos municípios que integram o Consórcio Sul Fluminense II para a instalação de uma CTDR. Ao mesmo tempo, o Arranjo Barra Mansa tem sua CTDR já instalada, dentro de uma distância considerada aceitável e com capacidade para receber mais RSU, justificando o estudo dessa nova proposta.

Após esta introdução, o artigo está organizado da seguinte maneira. A seção 2 apresenta os conceitos do jogo do custo de infraestrutura e do valor de Shapley. A seção 3 trata dos consórcios intermunicipais para gestão de RSU, além de apresentar um detalhamento sobre a fonte de dados (os custos dos consórcios). A seção 4 mostra os resultados do trabalho para o novo consórcio proposto, enquanto a seção 5 traz as principais conclusões.

2 Metodologia

2.1 Jogo do custo de infraestrutura

Problemas econômicos de alocação de custos têm sido tradicionalmente analisados por métodos de solução dos jogos cooperativos². É o que se vê, por exemplo, em Lemaire (1984), Tijs e Driessen (1986) e Young (1994). Jogos cooperativos de custo são representados por

² No jogo cooperativo, conforme afirma Myerson (1991), os jogadores podem negociar entre si e formar coalizões de modo que a cooperação traga a eles algum ganho.

(N, c) , em que $N = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de jogadores e c é a função característica – ou função custo – que é a forma pela qual se indica o valor de cada coalizão, sendo que $c(\emptyset) = 0$ e $c(S)$, $S \subseteq N$, é o custo para cada coalizão S . Segundo Peleg e Sudholter (2003), o objetivo de um jogo nesse formato é encontrar uma divisão adequada do custo total $c(N)$ entre todos os jogadores, de modo que a eficiência se sustente, o que significa que um conjunto de alocações x_i deve esgotar o custo total, ou seja, $\sum_{i=1}^n x_i = c(N)$.

Para modelar ou estabelecer um problema de custos e, posteriormente, alocar esses custos entre os jogadores via métodos cooperativos, o trabalho utilizou o jogo do custo de infraestrutura, apresentado pela primeira vez em Fragnelli et al. (2000) e posteriormente aplicado em Norde et al. (2002) e Fragnelli e Iandolino (2004). O exame dessas referências indica que a abordagem da teoria dos jogos cooperativos que trata da alocação de custos de infraestrutura possui elementos adequados que permitem utilizá-la para o estudo de caso dos consórcios intermunicipais de gestão dos RSU.

Um problema de alocação de custo de infraestrutura se distingue, especialmente, por duas particularidades. Primeiro, os custos de infraestrutura são, na verdade, resultantes da junção de outros dois: custos de construção e custos de manutenção, sendo que cada um deles é estudado e analisado de forma separada como um jogo diferente, o que permite explorar mais intensamente seus atributos como será visto daqui em diante. Em segundo lugar, tanto para o custo de construção quanto de manutenção, tem-se que o conjunto de jogadores N pode ser dividido em grupos g_i , com $i = 1, \dots, k$ e $N = \bigcup_{i=1}^k g_i$, em que cada grupo reúne jogadores com uma determinada característica ou necessidade em comum. Para o problema dos consórcios intermunicipais de gestão dos RSU essa divisão se apresenta naturalmente na forma dos municípios (grupos) e seus habitantes (jogadores).

O jogo utilizado para analisar custos de construção é chamado de jogo do aeroporto e foi desenvolvido por Littlechild e Owen (1973) para alocar custos de construção de uma pista

de pouso entre diferentes tipos de aeronaves. Posteriormente, outros artigos fizeram uso do jogo do aeroporto. Entre eles pode-se citar Dubey (1982), que examinou o mesmo problema de alocação dos custos de uma pista de pouso, porém, acrescentando novas análises, e Grahn-Voorneveld (2012), que estudou a alocação dos custos de rodovias entre seus diferentes tipos de usuários.

Formalmente, a definição do jogo do aeroporto é como segue. Dada a existência de k grupos g_1, \dots, g_k com respectivamente n_1, \dots, n_k jogadores e considerando k números não negativos b_1, \dots, b_k tem-se que o jogo do aeroporto correspondente é o jogo cooperativo (N, c') com $N = \cup_{i=1}^k g_i$ e função custo de construção c' definida por

$$c'(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} b_i, \forall S \subseteq N \quad (1)$$

onde $j(S) = \max\{j: S \cap g_j \neq \emptyset\}$ é o grupo com mais alto custo contendo membros em S ; e b_i indica o custo incremental para atender um jogador do grupo g_i , com $b_i \geq 0$ e $i = 1, \dots, k$.

A equação (1) retrata a hipótese do custo do maior jogador estabelecida por Littlechild e Owen (1973), a qual assume que a função custo de qualquer subconjunto de jogadores é igual ao custo do maior jogador naquele subconjunto. Grahn-Voorneveld (2012) apresenta uma boa explicação para essa hipótese, afirmando que se uma infraestrutura acomoda um usuário com determinada necessidade, então ela permite acomodar todos os usuários com necessidades mais baixas, sem custo extra. A hipótese do custo do maior jogador assume também que os desejos ou necessidades dos diferentes grupos de jogadores são linearmente ordenados de modo que $0 = c'_0 < c'_1 < \dots < c'_k$, em que $c'_i = b_1 + \dots + b_i$ é o custo de construção individual para atender ao grupo g_i .

Para analisar o outro componente do custo de infraestrutura – o custo de manutenção – utiliza-se o jogo do custo de manutenção, introduzido por Fragnelli et al. (2000) para o problema de alocação dos custos de uma ferrovia na Europa e posteriormente aplicado em Norde et al. (2002) e Fragnelli e Iandolino (2004). Além de permanecer com a hipótese do

custo do maior jogador, suas demais suposições são simples: considerando que haverá um custo com determinada infraestrutura, os custos de manutenção são crescentes com o nível de sofisticação da infraestrutura exigido por cada grupo de jogador (o que equivale ao ordenamento linear do jogo do aeroporto) e são proporcionais ao número de usuários.

A definição formal do jogo do custo de manutenção é a seguinte. Dado k grupos g_1, \dots, g_k com respectivamente n_1, \dots, n_k jogadores e considerando a existência de $k(k+1)/2$ números não negativos $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j \in \{1, \dots, k\}, j \geq i}$, o jogo do custo de manutenção correspondente é o jogo cooperativo (N, c'') com $N = \cup_{i=1}^k g_i$ e função custo de manutenção c'' definida por ³:

$$c''(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} |S \cap g_i| A_{i,j(S)}, \forall S \subseteq N \quad (2)$$

onde $A_{i,j} = \alpha_{i,i} + \dots + \alpha_{i,j}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ com $j \geq i$; e $j(S)$ segue a definição do jogo do aeroporto.

Norde et al. (2002) interpretam a equação (2) da seguinte maneira. Suponha que a coalizão S enfrente o problema de estimar os custos de manutenção decorrentes do fato de que todos os jogadores em S usaram determinada infraestrutura. Como todos os jogadores em S querem utilizá-la novamente ela precisa ser restaurada até o nível $j(S)$, o grupo com mais alto custo dentro da coalizão. Entretanto, os jogadores em S podem pertencer a diferentes grupos e, por consequência, provocarem diferentes custos de manutenção após utilizarem a infraestrutura. Se um jogador em S pertence ao grupo g_i , com $i \leq j(S)$, então os custos de manutenção provocados por esse jogador, são $A_{i,j(S)}$. Somando os custos de todos os jogadores em S tem-se a equação (2). Dessa forma, $A_{i,j}$ representa os custos de manutenção, causados por um jogador do grupo g_i , se a infraestrutura vai ser restaurada até o nível j , sendo

³ $k(k+1)/2$ mostra o total de combinações possíveis de $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j \in \{1, \dots, k\}}$, com a restrição $j \geq i$ que deve-se ao fato dos custos serem linearmente ordenados. Por exemplo, existe um custo para que uma infraestrutura que atenda jogadores do primeiro grupo passe a atender jogadores do segundo grupo, mas, o contrário não se verifica.

que quanto maior for j , e por consequência o nível de restauração, maiores serão esses custos. Fragnelli et al. (2000) reforçam essa interpretação ao concluírem que $c(S)$ simboliza os custos de manutenção equivalentes ao reestabelecimento da infraestrutura até o nível $j(S)$ depois que todos os jogadores em S a tenham utilizado.

Uma forma equivalente de apresentar a função custo de manutenção é dada por Fragnelli et al. (2000) que realizaram a decomposição a seguir partindo da equação (2). Para cada $S \subseteq N$,

$$c''(S) = \sum_{i=1}^{j(S)} |S \cap g_i| A_{i,j(S)} = \sum_{i=1}^{j(S)} |S \cap g_i| (\alpha_{i,i} + \dots + \alpha_{i,j(S)}), \text{ logo}$$

$$c''(S) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^k \alpha_{i,j} c^{i,j}(S) \quad (3)$$

$$\text{onde } c^{i,j}(S) = \begin{cases} |S \cap g_i| & \text{se } j \leq j(S) \\ 0 & \text{se } j > j(S) \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ com $j \geq i$

Portanto, o jogo do aeroporto e o jogo do custo de manutenção, por meio das equações (1) e (3), são utilizados para modelar respectivamente custos de construção e custos de manutenção, que somados formam os custos de infraestrutura. Também se ajusta a esse modelo uma situação que foi descrita em Norde et al. (2002), retratada no estudo de caso de Fragnelli e Iandolino (2004) e acredita-se ser o caso que se adequa aos dados deste trabalho para o problema dos consórcios intermunicipais de gestão dos RSU. Quando a infraestrutura já está construída e seu valor pago, os custos de manutenção seriam os únicos a serem considerados. Entretanto, esses custos podem ser decompostos em uma parte fixa, isto é, que não depende do número de jogadores, e uma parte variável que é influenciada pelo número de jogadores. Nessa situação os custos fixos seriam mais bem analisados pelo jogo do aeroporto e os custos variáveis pelo jogo do custo de manutenção. Com isso, as seguintes definições são mais apropriadas, pois, representam o caso geral:

- Custos de construção: são todos os custos que não dependem do número de jogadores, mesmo aqueles relacionados com a parte gerencial ou administrativa.
- Custos de manutenção: de forma contrária, são todos os custos que dependem ou variam conforme o número de jogadores.

Assim, define-se finalmente o jogo do custo de infraestrutura como sendo simplesmente a soma do jogo do aeroporto e do jogo do custo de manutenção, com os grupos de jogadores ordenados da mesma maneira. Dado um grupo de jogadores g_1, \dots, g_k , o jogo do custo de infraestrutura é o jogo cooperativo (N, c) com $N = \cup_{i=1}^k g_i$ e função custo $c = c' + c''$, em que c' representa a função custo de construção e c'' a função custo de manutenção.

Expostas as premissas que norteiam os passos para estabelecer os custos, a etapa seguinte é definir como aloca-los entre os jogadores. Para isso, conta-se com o conceito de solução cooperativa do valor de Shapley.

2.2 Valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura

O valor de Shapley tem características que o credencia como método de alocação adequado ao jogo do custo de infraestrutura. Em primeiro lugar, sabe-se que o valor de Shapley é uma solução aditiva⁴ de modo que ele se adapta à separação realizada nos custos, fazendo com que o resultado final do processo de alocação seja a soma, para cada jogador, do valor de Shapley para o jogo do aeroporto com o valor de Shapley para o jogo do custo de manutenção. Em segundo lugar, tem-se a maior facilidade de cálculo em comparação a outras soluções cooperativas (como o *nucleolus*) – ressaltada por Loehman et al. (1979), Roth (1988), Hart (1989), entre outros – o que certamente é algo útil na análise de problemas reais.

⁴ O axioma da aditividade diz que a solução para a soma de dois ou mais jogos deve ser igual à soma do que é recebido separadamente em cada um deles.

Dado um conjunto de axiomas relativamente simples, Shapley (1953) desenvolveu o valor de Shapley, a função que determina para cada jogador i em N a alocação⁵:

$$\phi_i(c) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \times [c(S) - c(S - \{i\})], \forall i \in N, \quad (4)$$

em que n é o número de jogadores do conjunto N ; s é o número de jogadores na coalizão S ; e $c(S) - c(S - \{i\})$ é a contribuição marginal do jogador i quando ele se associa a outros jogadores para formar a coalizão S .

Porém, Littlechild e Owen (1973) afirmam que é difícil computar o valor de Shapley usando sua fórmula tradicional em jogos com as suposições apresentadas no jogo do custo de infraestrutura, porque o número de usuários pode ser muito grande. Por esse motivo foram estabelecidas aproximações da fórmula original para os jogos do aeroporto e do custo de manutenção em que o valor de Shapley é calculado com relativa facilidade.

A expressão do valor de Shapley para o jogo do aeroporto foi desenvolvida por Littlechild e Owen (1973). Seja (N, c') o jogo do custo de construção correspondente aos grupos g_1, \dots, g_k com respectivamente n_1, \dots, n_k jogadores e considerando a existência de k número não negativos b_1, \dots, b_k . Então, tem-se que⁶:

$$\phi_i(c') = \sum_{h=1}^l \frac{b_h}{n_h + \dots + n_k}, i \in g_l, l = 1, \dots, k \quad (5)$$

em que i é o jogador, sendo que $i \in g_l$ para $l = 1, \dots, k$ significa que o jogador i pertence ao grupo l e que existem k grupos de jogadores; e b_h é o custo incremental de prover uma infraestrutura que atenda ao grupo h em relação ao grupo $h - 1$.

Por sua vez, a expressão do valor de Shapley para o jogo do custo de manutenção foi desenvolvida por Fragnelli et al. (2000). Seja (N, c'') o jogo do custo de manutenção

⁵ As propriedades e características do valor de Shapley, assim como as provas e etapas para estabelecê-lo estão detalhadas em Shapley (1953).

⁶ O desenvolvimento e as provas para obtenção dessa equação estão em Littlechild e Owen (1973).

correspondente aos grupos g_1, \dots, g_k com respectivamente n_1, \dots, n_k jogadores e dada a existência de $k(k+1)/2$ números não negativos $\{\alpha_{l,m}\}_{l,m \in \{1, \dots, k\}, m \geq l}$. Tem-se que⁷:

$$\phi_i(c'') = \alpha_{l,l} + \sum_{h=l+1}^k \alpha_{l,h} \frac{n_h + \dots + n_k}{n_h + \dots + n_k + 1} + \sum_{h=2}^l \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_k)(n_h + \dots + n_k + 1)} \quad (6)$$

onde novamente i é o jogador e l é o grupo ao qual ele pertence. Isto é, $i \in g_l$, para $l = 1, \dots, k$.

Assim, o valor de Shapley de cada jogador no jogo de custo de infraestrutura pode ser calculado como a soma das equações 5 e 6, respectivamente o valor de Shapley do jogo do aeroporto e o valor de Shapley do jogo do custo de manutenção. Todavia, um último e essencial passo ainda precisa ser cumprido para proceder aos cálculos: a obtenção das funções custo. Recorda-se que o custo total de construção, que representa o custo para a grande coalizão no jogo do aeroporto, é indicado por $c'(N) = \sum_{i=1}^k b_i$, enquanto o custo total de manutenção, que representa o custo para a grande coalizão no jogo do custo de manutenção, é indicado por $c''(N) = \sum_{i=1}^k |g_i| A_{i,k}$, onde $A_{i,k} = \alpha_{i,i} + \dots + \alpha_{i,k}$.

Para obter os valores b_i do jogo do aeroporto segue-se a proposta apresentada por Fragnelli e Iandolino (2004). Adaptando ao problema em análise nesse trabalho, divide-se $c'(N)$ de forma proporcional ao volume de RSU gerado pelos jogadores de cada grupo i , RSU_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, então:

$$b_i = \frac{RSU_i}{RSU_1 + \dots + RSU_k} \times c'(N), i \in \{1, \dots, k\} \quad (7)$$

No que tange aos valores α do jogo do custo de manutenção também segue-se a proposta de Fragnelli e Iandolino (2004), com a suposição simplificadora de que os jogadores são homogêneos, o que significa que jogadores de grupos diferentes terão o mesmo custo de manutenção. Porém, enquanto os autores apresentam resultados para apenas três grupos de jogadores, nesse trabalho a fórmula foi generalizada para um número qualquer, o que será útil

⁷ O desenvolvimento e as provas para obtenção dessa equação estão em Fragnelli et al. (2000).

em etapas posteriores, de modo que se tem a seguinte representação dos números não negativos $\alpha_{i,j}$ para $i, j = \{1, \dots, k\}$ e $j \geq i$.

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha_j, & \text{se } i \neq j \\ \sum_{j=1}^i \alpha_j, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (8)$$

Dada essa hipótese, os valores α são encontrados fazendo com que as coalizões $g_1, g_1 \cup g_2, \dots, \cup_{i=1}^k g_i = N$, paguem uma fração de $c''(N)$ proporcional ao volume gerado de RSU. Assim, para $l \in \{1, \dots, k\}$:

$$c''(\cup_{i=1}^l g_i) = |\cup_{i=1}^l g_i| (\sum_{i=1}^l \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^l RSU_i}{\sum_{i=1}^k RSU_i} \times c''(N) \quad (9)$$

Para compreender as equações 8 e 9 tem-se um exemplo simples em que $k = 3$, como no estudo de caso de Fragnelli e Iandolino (2004). Serão $k(k+1)/2 = 6$ números α , quais sejam: $\alpha_{1,1} = \alpha_1$; $\alpha_{1,2} = \alpha_2$; $\alpha_{1,3} = \alpha_3$; $\alpha_{2,2} = \alpha_1 + \alpha_2$; $\alpha_{2,3} = \alpha_3$; e $\alpha_{3,3} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, que dão origem às seguintes funções características:

$$c''(g_1) = |g_1| \alpha_1 = \frac{RSU_1}{RSU_1 + RSU_2 + RSU_3} \times c''(N)$$

$$c''(g_1 \cup g_2) = |g_1 + g_2| (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{RSU_1 + RSU_2}{RSU_1 + RSU_2 + RSU_3} \times c''(N)$$

$$c''(N) = |N| (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = c''(N)$$

As próximas seções mostram que as características do jogo do custo de infraestrutura – desmembrado no valor de Shapley do jogo do aeroporto e valor de Shapley do jogo do custo de manutenção – se encaixam nos dados e informações do problema de alocação de custos dos consórcios de gestão dos RSU.

3 Consórcios públicos intermunicipais de gestão de RSU no Estado do Rio de Janeiro

Previendo dificuldades para que os municípios brasileiros se adequassem à PNRS em razão da insuficiência de recursos e da falta de quadro técnico qualificado, a Lei nº 12.305/2010 incentivou a formação de consórcios públicos intermunicipais a fim de reduzir os

custos da gestão dos resíduos sólidos. Perante a grave situação financeira dos municípios brasileiros, os consórcios mostram-se alternativa viável para resolução conjunta de problemas em comum, tornando possível a obtenção de ganhos de escala e a racionalização de recursos públicos visando maior eficiência. De acordo com Silveira e Phillipi (2008), o planejamento integrado entre os municípios consorciados para a gestão de RSU possibilita a minimização de riscos e impactos ambientais com a otimização do uso de áreas para a sua disposição final e o favorecimento da adoção de tecnologia mais avançada.

Assim, visando atingir uma escala ótima de regionalização nos serviços de resíduos sólidos para a totalidade dos municípios fluminenses, o PERS/RJ – no âmbito do Programa Lixão Zero – propôs a formação de consórcios públicos – agregando aspectos técnicos, operacionais, jurídicos e institucionais – para aprimorar a gestão dos RSU com a consequente redução dos custos de investimento e operação de cada município. Conforme explicado no próprio PERS/RJ em SEA (2013b), buscou-se se afastar da individualização dos serviços de resíduos sólidos que acarreta demasiado ônus financeiro para os municípios e não se ater apenas à divisão político-administrativa do Estado, já que esta pode não equivaler à realidade da gestão de resíduos sólidos.

A proposta de regionalização priorizou atender um conjunto de pré-requisitos⁸ onde se destacam preocupações: com a distância a ser percorrida por cada município até os locais de disposição e com a disponibilidade de áreas ambientalmente adequadas à implantação das CTDR. Com isso chegou-se a uma solução onde os 92 municípios foram divididos em 21 áreas considerando consórcios já institucionalizados ou arranjos regionais que poderão ser

⁸ Na consecução da proposta de regionalização foram levados em conta os chamados “standards informadores da cooperação federativa”, que são critérios objetivos empregados para avaliar o êxito da associação pretendida e incluíram dados demográficos, logísticos e ambientais, que serviram para estabelecer as diretrizes que orientaram o processo de construção da proposta de regionalização dos resíduos sólidos no Estado. Tais diretrizes versam sobre as seguintes questões: estabelecimento da cidade sede; distância percorrida dos municípios periféricos até a cidade sede; abandono dos lixões em favor dos aterros sanitários regionais; modelagem territorial do consorciamento; disponibilidade de áreas para tratamento e destinação dos resíduos; e potencial energético obtido a partir do biogás gerado do acúmulo de resíduos sólidos (SEA, 2013b).

institucionalizados futuramente, e apenas um caso de solução individual influenciado por uma conjunção de fatores de exceção (reduzido contingente populacional, baixa geração de resíduos sólidos e grande distância para as cidades-sede).

Além da indicação/previsão da cidade sede para localização da CTDR, a proposta de cooperação do PERS/RJ indica também, para alguns consórcios, a necessidade de implantar estações de transferência (ET) que, segundo Cunha e Caixeta Filho (2002), são locais onde os caminhões coletores descarregam sua carga em veículos com carrocerias de maior capacidade visando reduzir o tempo de transporte e os custos com o deslocamento até o local de disposição final do lixo. Assim, entre já formados ou em processo de formalização tem-se oito consórcios – Baixada Fluminense, Centro Sul I, Lagos I, Noroeste Fluminense, Serrana I, Serrana II, Sul Fluminense II e Vale do Café e treze arranjos regionais⁹. A Tabela 1 destaca a formação prevista dos agrupamentos que serão úteis neste trabalho – Consórcio Sul Fluminense II e Arranjo Barra Mansa – com suas respectivas cidades-sede e a indicação se precisariam ou não de ETs. Para a consecução do estudo proposto ambos serão reunidos e constituirão um novo consórcio, o Consórcio Sul Fluminense.

Tabela 1 – Composição do Consórcio Sul Fluminense II e Arranjo Barra Mansa

Consórcio Sul Fluminense II		Arranjo Barra Mansa	
Cidade Sede	Integrantes	Cidade Sede	Integrantes
Resende	Resende, Quatis, Porto Real e Itatiaia.	Barra Mansa	Barra Mansa, Pinheiral, Piraí, Rio Claro e Volta Redonda.
Estações de Transferência		Estações de Transferência	
-		-	

Fonte: SEA (2013b)

⁹ A proposta do PERS/RJ contém os seguintes arranjos: Barra Mansa, Magé, Angra dos Reis, Campos dos Goytacazes, Santa Maria Madalena, Macaé, Rio das Ostras, São Pedro da Aldeia, Nova Friburgo, Itaboraí, São Gonçalo, Miguel Pereira e Seropédica. As respectivas composições com os municípios integrantes de cada consórcio e arranjo estão em SEA (2013b).

3.1 Fonte de Dados

Para aplicar o valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura no problema em questão são necessários os seguintes dados dos integrantes dos consórcios: número total de jogadores (habitantes) em seus respectivos grupos (municípios), disponível em IBGE (2016) e presente na Tabela 4; volume gerado de RSU em cada município, disponível em SEA (2013b) e também presente na Tabela 4; e os custos discriminados dos serviços de resíduos sólidos em cada município.

Todavia, no que tange aos custos, foi observado que os gastos com atividades de limpeza urbana, coleta e transporte não são claros nos orçamentos municipais, pois, na maioria dos casos aparecem diluídos em diferentes rubricas sem especificação. Para confirmar isso, SEA (2013b) cita como exemplos a área de pessoal, onde funcionários que executam serviços de resíduos sólidos integram o orçamento geral de pessoal da administração; e os gastos com manutenção de veículos e equipamentos que não explicitam se os veículos são utilizados para fim de transporte de resíduos sólidos, funcionários da limpeza ou qualquer outra finalidade.

Assim, trabalhou-se com valores estimados, mas, em futuras versões dessa pesquisa pretende-se levantar os custos reais dos serviços de resíduos sólidos nos consórcios intermunicipais. As estimações utilizadas foram realizadas no Programa Lixão Zero e encontram-se descritas no PERS/RJ, em SEA (2013b). Estas consideram que os consórcios têm basicamente dois tipos de custos: custos administrativos e custos operacionais referentes ao sistema de transferência, tratamento e destinação final ambientalmente adequada de resíduos sólidos.

Como custos administrativos são considerados: locação de instalações, aluguel de viatura, materiais de escritório e limpeza, serviços (luz, gas, telefone, etc.), mão de obra (inclusive encargos sociais) e outros itens eventuais. Conforme indicado na Tabela 2, existem

três opções de valores para os custos administrativos dos consórcios intermunicipais analisados no PERS/RJ. A Opção 1 pode ser considerada como padrão e é adotada nas estimativas para quase todos os consórcios. As demais são vistas como casos de exceção, assim, a Opção 2 foi utilizada apenas para o Consórcio Noroeste Fluminense, pois, este gerenciaria um grande número de municípios (quinze) e a Opção 3 foi utilizada somente para os cálculos de custos do Consórcio Baixada Fluminense, que gerenciaria um grande volume de resíduos sólidos (cerca de 3.000 t/dia)¹⁰.

Tabela 2 – Custos administrativos dos consórcios públicos intermunicipais

Opção 1		Opção 2		Opção 3	
Custos Administrativos	Valor Mensal (R\$)	Custos Administrativos	Valor Mensal (R\$)	Custos Administrativos	Valor Mensal (R\$)
Instalações		Instalações		Instalações	
Aluguel	3.000,00	Aluguel	3.000,00	Aluguel	4.000,00
Manutenção (10%)	300	Manutenção (15%)	450	Manutenção (15%)	600
Serviços	2.000,00	Serviços	3.000,00	Serviços	3.000,00
Veículo		Veículo		Veículo	
Aluguel (1)	3.000,00	Aluguel (2)	6.000,00	Aluguel (2)	6.000,00
Materiais		Materiais		Materiais	
Escritório e Limpeza	300,00	Escritório e Limpeza	600,00	Escritório e Limpeza	600,00
Eventuais		Eventuais		Eventuais	
5% do Sub Total	430	5% do Sub Total	650	5% do Sub Total	710
Mão de Obra		Mão de Obra		Mão de Obra	
Salários	23.400,00	Salários	29.050,00	Salários	39.050,00
Encargos Sociais	22.689,52	Encargos Sociais	28.168,89	Encargos Sociais	37.870,69
SUB TOTAL MENSAL	55.119,52	SUB TOTAL MENSAL	70.918,89	SUB TOTAL MENSAL	91.830,69
TOTAL ANUAL	661.434,24	TOTAL ANUAL	851.026,68	TOTAL ANUAL	1.101.968,28

Fonte: SEA (2013b)

Em relação aos custos operacionais, as possibilidades de serviços a serem custeados pelos consórcios intermunicipais são as Centrais de Tratamento e Disposição de Resíduos (CTDR), Estações de Transferência (ET) e o transporte entre ambas. Para as CTDR

¹⁰ Os valores monetários (R\$) nesta tabela e nas próximas são de 2013.

consideram-se três grupos possíveis de faixas de tonelagens para estabelecer o custo unitário do tratamento e destinação por tonelada de resíduos sólidos. Para as ETs há a possibilidade de que estas operem em 1 ou 2 turnos. Já o transporte destas até a cidade sede têm seus custos estabelecidos levando em conta a capacidade de carga da carreta e o tipo de rodovia (Estadual ou Federal). A Tabela 3 resume essas informações.

Tabela 3 – Custos operacionais dos consórcios públicos intermunicipais

Serviço	Unidade Operacional	Quant.	Unidade	Custo Unit. (R\$)
Disposição	CTDR/ A.S.	100/180	t	70,99
		180/280	t	62,26
		280/480	t	56,92
Transferência	E.T. (1 turno)	1	Mês	68.145,31
	E.T. (2 turnos)	1	Mês	107.704,93
Transporte	Rod. Estadual	12	t.km	0,44
		17	t.km	0,32
	Rod. Federal	12	t.km	0,35
		17	t.km	0,26

Fonte: SEA (2013b)

3.2 Rateio dos custos dos consórcios intermunicipais conforme proposto no PERS/RJ

O rateio dos custos entre os municípios consorciados conforme proposto em SEA (2013b) é estabelecido anualmente e deve ser indicado pelo resultado da multiplicação do indicador de rateio (R_i) de cada município integrante do consórcio pelo somatório dos custos operacionais e administrativos do mesmo. O indicador de rateio é calculado da forma como segue:

$$R_i = (P_i \times pp_{ci}) / (\sum_{i=1}^n P_i \times pp_{ci}), \quad (10)$$

onde P_i é a população do município i e pp_{ci} é a produção per capita de resíduos sólidos do município i . Essa fórmula será útil para a comparação com os resultados do método de alocação do valor de Shapley.

4 Estudo de Caso: Consórcio Sul Fluminense

O estudo de caso trata do estabelecimento dos custos de um novo consórcio intermunicipal de gestão de RSU no Estado do Rio de Janeiro, o Consórcio Sul Fluminense, e o posterior rateio dos valores entre os municípios que o integram considerando a metodologia do valor de Shapley para o jogo do custo de infraestrutura. A proposta é que o Consórcio Sul Fluminense seja formado por nove municípios: Barra Mansa (cidade sede), Itatiaia, Pinheiral, Piraí, Porto Real, Quatis, Resende, Rio Claro e Volta Redonda.

Dentre esses municípios – conforme descrito na Tabela 1 – Itatiaia, Porto Real, Quatis e Resende já compõem um consórcio atualmente formalizado, o Consórcio Sul Fluminense II, e Barra Mansa, Pinheiral, Piraí, Rio Claro e Volta Redonda integram a proposta do PERS/RJ para constituírem o Arranjo Barra Mansa. Contudo, há uma dificuldade em encontrar locais adequados em Resende e nos municípios ao redor para instalar a central de tratamento e destinação final de resíduos sólidos devido à presença de áreas de preservação ambiental. Por esse motivo, o PERS/RJ – em SEA (2013b) – aponta como caminho a ser seguido que os integrantes do Consórcio Sul Fluminense II passem a levar o RSU gerado para a CTDR Barra Mansa, já em operação e com capacidade para receber mais resíduos.

Portanto, a proposta de formação do Consórcio Sul Fluminense como junção do Consórcio Sul Fluminense II e do Arranjo Barra Mansa, acompanha a sugestão apresentada nos próprios estudos que foram feitos para a elaboração do PERS/RJ. Ficou pendente, todavia, análises posteriores sobre a estrutura de custos e o rateio dos mesmos, sendo essa a lacuna onde o presente trabalho se insere. Os municípios que integrariam o Consórcio Sul Fluminense e seus respectivos dados estão na Tabela 4¹¹.

¹¹ O índice *i* tem a função de indicar o grupo para o posterior cálculo do valor de Shapley.

Tabela 4 – Municípios integrantes do Consórcio Sul Fluminense

<i>i</i>	Município	População	RSU Gerado (t/d)	Local Disposição	RSU Disposto (t/d)	Dist. Local Disposição (km)
1	Quatis	13.666	6,5	Barra Mansa		31
2	Rio Claro	17.850	8			35
3	Porto Real	18.552	8,9			29
4	Pinheiral	24.076	13,1			24
5	Piraí	28.088	13,3			36
6	Itatiaia	30.475	18,4			53
7	Resende	126.084	96,1			39
8	Barra Mansa	180.126	109,1		461,10	-
9	V. Redonda	263.659	187,7			14

Fontes: SEA (2013b) e IBGE (2016)

Um importante pré-requisito para a sustentabilidade financeira da junção de municípios em consórcios de gestão de RSU é a proximidade destes com o local de tratamento e disposição final para que os custos de transporte não sejam impeditivos. De acordo com SEA (2013b), o desejável em termos de logística é que a distância dos municípios periféricos para a cidade sede não seja superior a 45 km ou 1 hora. A Tabela 4 mostra que todos atendem essa condição em relação à cidade sede, sendo a única exceção Itatiaia que está um pouco acima do limite. Além da CTDR localizada em Barra Mansa, acredita-se que devido à quantidade de municípios seria necessária a presença de uma ET em Resende para reunir os resíduos de Resende, Itatiaia, Porto Real e Quatis e otimizar o transporte até a CTDR Barra Mansa.

Tendo em vista informações que constam na seção 3.1, os custos do Consórcio Sul Fluminense foram assim estabelecidos. A CTDR Barra Mansa, dado o custo unitário de R\$ 56,92 t/mês e a quantidade gerada de RSU de 13.833 t/mês, teria um custo total mensal de R\$ 787.374,36. A ET Resende, acredita-se, pode funcionar de forma satisfatória em apenas 1 turno, com custo mensal de R\$ 68.145,31. E o transporte de resíduos da ET Resende até a CTDR Barra Mansa, levando em conta que os resíduos compactados serão transportados em

carretas com capacidade para 17 t em Rodovia Federal, apresentaria custo mensal de R\$ 39.515,58. Por fim, consideram-se os valores dos custos administrativos referentes à Opção 1 – que é o padrão para a maioria dos consórcios. Essas informações estão resumidas na Tabela 5.

Tabela 5 – Custos estimados para o Consórcio Sul Fluminense

Serviço	Unidade Operacional	Quant.	Unidade	Custo Unit.	Custo Total (R\$)	Classificação
Disposição	CTDR Barra Mansa	13.833	T	56,92	787.374,36	Manutenção
Transferência	E. T. Resende	1	Mês	68.145,31	68.145,31	Manutenção
Transporte	ET Res/CTDR B. Mansa	151.983	t.km	0,26	39.515,58	Manutenção
Administrativo					55.119,52	Construção
TOTAL MENSAL					950.154,77	-
TOTAL ANUAL					11.401.857,24	-
Sub-total anual Custo de Construção					661.434,24	-
Sub-total anual Custo de Manutenção					10.740.423,00	-

Fonte: Elaboração Própria

Como foi visto ao apresentar a metodologia, para proceder aos cálculos é preciso separar os custos, de acordo com suas características, em custos de construção e manutenção. A Tabela 5 apresenta a classificação e o subtotal para cada tipo de custo. Existem quatro serviços a serem custeados: disposição, transferência, transporte e administrativo. Pela classificação que consta na seção 2 os custos administrativos se encaixam nos custos de construção, haja vista que são valores fixos. Por outro lado, custos com a CTDR Barra Mansa e com a ET Resende, incluindo o serviço de transporte entre ambas, podem ser vistos como custos de manutenção, pois, variam de acordo com a quantidade de municípios e, por consequência, de resíduos a serem considerados. Classificação semelhante é vista na aplicação do jogo do custo de infraestrutura em Fragnelli e Iandolino (2004).

4.1 Valor de Shapley do jogo do aeroporto (VSA) e valor de Shapley do jogo do custo de manutenção (VSM) para o Consórcio Sul Fluminense

Com o estabelecimento do custo total anual do Consórcio Sul Fluminense (R\$ 11.401.857,24, em valores de 2013) este é dividido em custo de construção (661.434,24), que é alocado aos municípios pelo valor de Shapley do jogo do aeroporto (VSA), e custo de manutenção (10.740.423,00), que é alocado pelo valor de Shapley do jogo do custo de manutenção (VSM). A soma de ambos configura o valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura (VSI) alocado para cada município integrante do consórcio.

A Tabela 6 apresenta a alocação do VSA levando em conta o total anual do custo de construção (R\$ 661.434,24). As colunas b_i e c_i representam as etapas necessárias para encontrar a alocação final, conforme descrito na Seção 2. O termo b_i indica o custo incremental para atender um jogador do grupo i em relação à $i - 1$, com $i = 1, \dots, 9$, enquanto c_i indica o custo de construção individual para um jogador do grupo i , que nada mais é do que o custo acumulado, ou seja, $c_i = b_1 + \dots + b_i$, com $i = 1, \dots, 9$. Os cálculos para obtenção de b_i , c_i e VSA estão em detalhes no Anexo 1.

Tabela 6 – Valor de Shapley do jogo do aeroporto para o Consórcio Sul Fluminense

i	Município	RSU (t/mês)	b_i	c_i	VSA (R\$)	VSA (%)
1	Quatis	195	9.324,06	9.324,06	181,36	0,03
2	Rio Claro	240	11.475,76	20.799,82	534,23	0,08
3	Porto Real	267	12.766,79	33.566,60	908,19	0,14
4	Pinheiral	393	18.791,56	52.358,16	1.871,98	0,28
5	Piraí	399	19.078,45	71.436,62	3.036,64	0,46
6	Itatiaia	552	26.394,25	97.830,87	4.634,54	0,70
7	Resende	2.883	137.852,59	235.683,46	49.674,47	7,51
8	Barra Mansa	3.273	156.500,71	392.184,17	134.487,29	20,33
9	Volta Redonda	5.631	269.250,07	661.434,24	466.105,52	70,47
Total	-	13.833	-	-	661.434,24	100,00

Fonte: Resultados da Pesquisa

Já a alocação do VSM para os municípios que integram a proposta de formação do Consórcio Sul Fluminense está na Tabela 7, considerando o total anual do custo de manutenção (R\$ 10.740.423,00). A coluna α_i traz elementos que formam o custo de manutenção de cada jogador i , com $i = 1, \dots, 9$ e são etapas necessárias para encontrar a alocação final, conforme descrito na Seção 2. Os valores α_i e o VSM são obtidos de acordo com os cálculos vistos no Anexo 2.

Tabela 7 – Valor de Shapley do jogo do custo de manutenção para o Consórcio Sul Fluminense

i	Município	RSU (t/mês)	α_i	VSM (R\$)	VSM (%)
1	Quatis	195	11,08	208.914,82	1,95
2	Rio Claro	240	-0,36	272.876,44	2,54
3	Porto Real	267	0,17	283.608,05	2,64
4	Pinheiral	393	0,58	368.054,54	3,43
5	Piraí	399	-0,12	429.386,77	4,00
6	Itatiaia	552	0,62	465.877,34	4,34
7	Resende	2.883	2,82	1.927.471,77	17,95
8	Barra Mansa	3.273	-0,28	2.753.622,65	25,64
9	Volta Redonda	5.631	0,78	4.030.610,62	37,53
Total	-	13.833	-	10.740.423,00	100,00

Fonte: Resultados da Pesquisa

4.2 Valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura (VSI) e comparação com os resultados do Rateio Atual para o Consórcio Sul Fluminense

Obtém-se finalmente o valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura (VSI) – a alocação final de cada integrante do Consórcio Sul Fluminense – representado pela soma dos respectivos VSA e VSM. A Tabela 8 apresenta o VSI de cada município, sendo que os cálculos para encontra-lo podem ser vistos no Anexo 3, e conta também com o Rateio Atual, que indica o custo alocado aos municípios caso o Consórcio Sul Fluminense adotasse a

fórmula do PERS/RJ para o rateio dos custos (equação 10). Para ambas as alocações apresenta-se ainda o valor em termos percentuais.

Tabela 8 – Valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura para o Consórcio Sul Fluminense

<i>i</i>	Município	RSU (t/mês)	VSI (R\$)	Rateio Atual (R\$)	VSI (%)	Rateio Atual (%)
1	Quatis	195	209.096,18	160.728,85	1,83	1,41
2	Rio Claro	240	273.410,67	197.820,12	2,40	1,73
3	Porto Real	267	284.516,24	220.074,88	2,50	1,93
4	Pinheiral	393	369.926,52	323.930,45	3,24	2,84
5	Piraí	399	432.423,41	328.875,95	3,79	2,88
6	Itatiaia	552	470.511,89	454.986,28	4,13	3,99
7	Resende	2.883	1.977.146,24	2.376.314,21	17,34	20,84
8	Barra Mansa	3.273	2.888.109,94	2.697.771,90	25,33	23,66
9	Volta Redonda	5.631	4.496.716,14	4.641.354,59	39,44	40,71
TOTAL	-	13.833	11.401.857,24	11.401.857,24	100,00	100,00

Fonte: Resultados da Pesquisa

Analisando os valores do VSI destaca-se que Resende, Barra Mansa e Volta Redonda, que são em ordem crescente os municípios que geram os maiores volumes de RSU e de forma muito mais significativa que os demais, são aqueles que vão arcar com a maior porcentagem dos custos. Juntos, os três municípios serão responsáveis por 82,11% do custo total anual do Consórcio Sul Fluminense.

Comparando com o Rateio Atual, os resultados da alocação do VSI implicam que haveria redução no percentual de custo alocado para Resende e Volta Redonda e aumento para os demais municípios. Todavia, as discrepâncias não são tão grandes. Os percentuais da alocação de custo do VSI e do Rateio Atual são próximos, como mostra a tabela, e ambos os métodos revelam-se eficientes em captar a influência do volume de resíduos sólidos gerado em cada município. Como era de se esperar, quanto maior o volume gerado de RSU maior o custo alocado.

O VSI tem a vantagem de realizar um refinamento dos custos ao não tratá-los de maneira uniforme e possibilitar a separação e análise conforme suas características. Ou seja, os resultados são encontrados com uma análise mais minuciosa dos custos em comparação ao Rateio Atual, uma vez que são separados em custos de construção e custos de manutenção.

Sobre isso, vê-se que tanto a alocação do VSA quanto do VSM analisadas individualmente (Tabelas 6 e 7, respectivamente) também são diretamente influenciadas pelo volume gerado de RSU em cada município. Porém, há uma diferença quando se leva em conta apenas os custos fixos (VSA), pois, nesse caso a sobrecarga do maior jogador (Volta Redonda) é proporcionalmente muito mais significativa (70,47% do custo total) do que quando se considera apenas o custo de manutenção (37,53% do custo total). Como se observa em trabalhos que utilizam o jogo do aeroporto, como Littlechild e Owen (1973), quando há um determinado volume de custos fixos o parâmetro para o custo total é realização de um gasto que atenda ao maior jogador e, assim, os demais jogadores estarão conseqüentemente atendidos.

Uma vez que os custos reais são desconhecidos, poder-se-ia imaginar um cenário mais pessimista para o estabelecimento dos custos do Consórcio Sul Fluminense. Por exemplo, elevação dos custos administrativos em decorrência da presença de mais municípios consorciados (Opção 2) e, para os custos operacionais, supõe-se que a ET Resende precisaria funcionar em dois turnos ao invés de apenas um. Entretanto, apesar de acréscimos nos valores absolutos, em termos percentuais a alocação dos custos seguiria distribuição quase idêntica à da Tabela 8.

5 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo estudar o problema da alocação dos custos dos consórcios públicos intermunicipais de gestão dos serviços de resíduos sólidos urbanos. Foi

utilizada a metodologia do valor de Shapley, conceito de solução pertencente à teoria dos jogos cooperativos adotado com frequência na análise de problemas de alocação. Para modelar os custos utilizou-se o jogo do custo de infraestrutura, que permite maior refinamento do custo, pois, analisando suas características o divide em custos de construção e custos de manutenção – respectivamente o jogo do aeroporto e o jogo do custo de manutenção – de modo que cada um é alocado separadamente pelo valor de Shapley.

Foi proposta a formação de um novo consórcio intermunicipal no Estado do Rio de Janeiro, o Consórcio Sul Fluminense, que seria resultante da junção entre o Consórcio Sul Fluminense II e o Arranjo Barra Mansa. Essa proposta tem respaldo nos próprios estudos do Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Rio de Janeiro (PERS/RJ) que apontam uma dificuldade de encontrar áreas ambientalmente adequadas nos municípios que integram o Consórcio Sul Fluminense II para a instalação de uma CTDR. Ao mesmo tempo, o Arranjo Barra Mansa tem sua CTDR já instalada, dentro de uma distância considerada aceitável e com capacidade para receber mais resíduos. Os resultados mostram que a maior porcentagem dos custos seria suportada pelos municípios que mais geram RSU – Resende, Barra Mansa e Volta Redonda – em um resultado próximo à fórmula de rateio proposta no Plano, porém, com um desmembramento dos custos que permite análises mais minuciosas.

O trabalho teve dificuldade para obter dados reais dos municípios acerca dos custos relacionados aos serviços de resíduos sólidos, uma vez que muitas informações não estão discriminadas e aparecem junto com outros gastos da administração municipal. Dessa forma foram utilizados dados estimados contidos no PERS/RJ, mas, ciente de que o conhecimento dos custos reais dos serviços de resíduos sólidos seria fundamental para o dimensionamento e estabelecimento de uma alocação que possibilitasse o custeio integral dos serviços e consequentemente a busca pela maior eficiência na gestão dos RSU.

Outra ressalva que pode ser feita é em relação à expectativa de sucesso dos consórcios públicos intermunicipais. Apesar de ser algo previsto na Política Nacional de Resíduos Sólidos, sua implantação demanda uma forte atuação consensual entre os municípios e, quando for o caso, do Estado do Rio de Janeiro, em prol de garantir o funcionamento adequado desses serviços. Para isso, a existência da legislação ambiental por si só não basta, pois, sabe-se que alguns países em desenvolvimento têm legislação mais refinada do que os países desenvolvidos, mas, sua efetividade tem sido comprometida pela falta de organização, execução, recursos financeiros, entre outros fatores.

Por fim, como as ferramentas mais utilizadas no passado para estudar a gestão dos resíduos sólidos vem sendo criticadas por não considerar o processo de interação cooperativa existente entre as partes interessadas, acredita-se que uma metodologia baseada na teoria dos jogos cooperativos possa se adequar ao desafio atual da gestão dos resíduos sólidos no que se refere à alocação dos custos. Ainda mais na literatura brasileira, onde não foram encontrados trabalhos utilizando a teoria dos jogos na análise dos custos de gestão dos resíduos sólidos.

6 Referências

AL-KHATIB, I. A.; MONOU, M.; ZAHRA, A. S.; SHAHEEN, H. Q.; KASSINOS, D. Solid waste characterization, quantification and management practices in developing countries. A case study: Nablus district – Palestine. **Journal of Environmental Management**, v. 91, n. 5, p. 1131-1138, 2010.

BRASIL. **Lei nº. 12.305**, de 2 de agosto de 2010. Institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos; altera a Lei nº 9.605, de 12 de fevereiro de 1988; e dá outras providências. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/lei/112305.htm>. Acesso em: 14 nov. 2016.

CUNHA, V.; CAIXETA FILHO, J. V. Gerenciamento da coleta de resíduos sólidos urbanos: estruturação e aplicação de modelo não-linear de programação por metas. **Gestão & Produção**, v. 9, n. 2, p. 143-161, 2002.

DUBEY, P. The shapley value as aircraft landing fees revisited. **Management Science**, v. 28, n. 8, p. 869-874, 1982.

EZEAH, C.; ROBERTS, C. L. Analysis of barriers and success factors affecting the adoption of sustainable management of municipal solid waste in Nigeria. **Journal of Environmental Management**, v. 103, p. 9-14, 2012.

FRAGNELLI, V.; GARCÍA-JURADO, I.; NORDE, H.; PATRONE, F.; TIJS, S. How to share railways infrastructure costs? In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 91-101.

FRAGNELLI, V.; IANDOLINO, A. A cost allocation problem in urban solid wastes collection and disposal. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 59, n. 3, p. 447-463, 2004.

GRAHN-VOORNEVELD, S. Sharing costs in Swedish road ownership associations. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 46, n. 4, p. 645-651, 2012.

HART, S. Shapley value. In: EATWELL, J.; MILGRATE, M.; NEWMAN, P. **The New Palgrave: Game Theory**. New York: W W Norton, 1989. p.210-216.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **IBGE – Cidades**. Disponível em: <<http://www.cidades.ibge.gov.br/xtras/home.php>>. Acesso em: 22 out. 2016.

JORGENSEN, S. A dynamic game of waste management. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 34, n. 2, p. 258-265, 2010.

JORGENSEN, S.; MARTÍN-HERRAN, G.; ZACCOUR, G. Dynamic games in the economics and management of pollution, **Environmental Modeling & Assessment**, v. 15, n. 6, p. 433-467, 2010.

KARPERIS, A. C.; ARAVOSSIS, K.; TATSIPOULOS, I. P.; SOTIRCHOS, A. Decision support models for solid waste management: review and game-theoretic approaches. **Waste Management**, v. 33, n. 5, p. 1290-301, 2013.

LEMAIRE, J. An application of game theory: cost allocation. **Astin Bulletin.**, v.14, n.1, p. 61-81, 1984.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A simple expression for the Shapley value in a special case. **Management Science**, v. 20, n. 3, p. 370-372, 1973.

LOEHMAN, E.; ORLANDO, J.; TSCHIRHART, J.; WHINSTON, A. Cost allocation for a regional wastewater treatment system. **Water resources research**, v. 15, n. 2, p. 193-202, 1979.

MINEHART, D.; NEEMAN, Z. Effective siting of waste treatment facilities. **Journal of Environmental Economics and Management**, v. 43, n. 2, p. 303–324, 2002.

MORETTI, S. A model for cooperative intermunicipal waste collection: cost evaluation toward fair cost allocation. In: CARRARO, C.; FRAGNELLI, V (Eds.). **Game Practice and the Environment**. Edward Elgar Publishing, 2004. p. 125–144.

NORDE. H.; FRAGNELLI, V.; GARCIA-JURADO, I.; PATRONE, F.; TIJS. S.; Balancedness of Infrastructure Cost Games, **European Journal of Operational Research**, v. 136, n. 3, p. 635-654, 2002.

PELEG, B.; SUDHÖLTER, P. **Introduction to the Theory of Cooperative Games**. New York: Springer, 2003.

ROTH, A. **The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

SEA – SECRETARIA DE ESTADO DO AMBIENTE. **Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Rio de Janeiro – Relatório Síntese**. Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado do Ambiente (SEA), Instituto Estadual do Ambiente (INEA), 2013.

_____. **Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Rio de Janeiro – Volume 3: Arranjo Regional**. Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado do Ambiente (SEA), Instituto Estadual do Ambiente (INEA), 2013b.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. **Contributions to the Theory of Games**, v. 2, n. 28, p. 307-317, 1953.

SILVEIRA, R. C. E.; PHILIPPI, L. S. Consórcios Públicos: uma alternativa viável para a gestão regionalizada de resíduos sólidos urbanos. **REDES**, Santa Cruz do Sul, v. 13, n. 1, p. 205 - 224, 2008.

TIJS, S.; DRIESSEN, T. Game Theory and Cost Allocation Problems. **Management Science**, v. 32, n. 8, p. 1015-1028, 1986.

YOUNG, H.P. Cost allocation. In: AUMANS, R.J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 2. New York: Elsevier Science, 1994. p. 1192-1235.

ANEXO 1

Cálculos do valor de Shapley do jogo do aeroporto

Dadas as equações (1) e (7), considerando que RSU_1, \dots, RSU_9 são os valores gerados de resíduos sólidos urbanos (toneladas/mês) por cada município do Consórcio Sul Fluminense e que o custo total de construção $c'(N)$ foi definido como R\$ 661.434,24, tem-se que os cálculos para encontrar a função custo do jogo do aeroporto (resumidos na Tabela 6) são como segue:

$$b_1 = \frac{195}{13.833} \times 661.434,24 = 9.324,06; \text{ e } c'_1 = b_1 = 9.324,06.$$

$$b_2 = \frac{240}{13.833} \times 661.434,24 = 11.475,76; \text{ e } c'_2 = b_1 + b_2 = 20.799,82.$$

$$b_3 = \frac{267}{13.833} \times 661.434,24 = 12.766,79; \text{ e } c'_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 33.566,60.$$

$$b_4 = \frac{393}{13.833} \times 661.434,24 = 18.791,56; \text{ e } c'_4 = b_1 + \dots + b_4 = 52.358,16.$$

$$b_5 = \frac{399}{13.833} \times 661.434,24 = 19.078,45; \text{ e } c'_5 = b_1 + \dots + b_5 = 71.436,62.$$

$$b_6 = \frac{552}{13.833} \times 661.434,24 = 26.394,25; \text{ e } c'_6 = b_1 + \dots + b_6 = 97.830,87.$$

$$b_7 = \frac{2.883}{13.833} \times 661.434,24 = 137.852,59; \text{ e } c'_7 = b_1 + \dots + b_7 = 235.683,46.$$

$$b_8 = \frac{3.273}{13.833} \times 661.434,24 = 156.500,71; \text{ e } c'_8 = b_1 + \dots + b_8 = 392.184,17.$$

$$b_9 = \frac{5.631}{13.833} \times 661.434,24 = 269.250,07; \text{ e } c'_9 = b_1 + \dots + b_9 = 661.434,24$$

Com os valores de b_i e c'_i e utilizando a equação (5) obtêm-se as alocações de custo do valor de Shapley do jogo do aeroporto para o Consórcio Sul Fluminense, conforme os cálculos a seguir. Os resultados estão multiplicados pelos respectivos números de habitantes para que seja obtido o valor total atribuído a cada município.

$$\phi_1(c') \times n_1 = \frac{b_1}{n_1 + \dots + n_9} \times n_1 = \frac{9.324,06}{13.666 + \dots + 263.659} \times 13.666 = 181,36.$$

$$\phi_2(c') \times n_2 = \phi_1(c') + \frac{b_2}{n_2 + \dots + n_9} \times n_2 = 0,01 + \frac{11.475,76}{17.850 + \dots + 263.659} \times 17.850 = 534,23.$$

$$\phi_3(c') \times n_3 = \phi_2(c') + \frac{b_3}{n_3 + \dots + n_9} \times n_3 = 0,03 + \frac{12.766,79}{18.552 + \dots + 263.659} \times 18.552 = 908,19.$$

$$\phi_4(c') \times n_4 = \phi_3(c') + \frac{b_4}{n_4 + \dots + n_9} \times n_4 = 0,05 + \frac{18.791,56}{24.076 + \dots + 263.659} \times 24.076 = 1.871,98.$$

$$\phi_5(c') \times n_5 = \phi_4(c') + \frac{b_5}{n_5 + \dots + n_9} \times n_5 = 0,08 + \frac{19.078,45}{28.088 + \dots + 263.659} \times 28.088 =$$

3.036,64.

$$\phi_6(c') \times n_6 = \phi_5(c') + \frac{b_6}{n_6 + \dots + n_9} \times n_6 = 0,11 + \frac{26.394,25}{30.475 + \dots + 263.659} \times 30.475 =$$

4.634,54.

$$\phi_7(c') \times n_7 = \phi_6(c') + \frac{b_7}{n_7 + n_8 + n_9} \times n_7 = 0,15 + \frac{137.852,59}{126.084 + \dots + 263.659} \times 126.084 =$$

49.674,47.

$$\phi_8(c') \times n_8 = \phi_7(c') + \frac{b_8}{n_8 + n_9} \times n_8 = 0,39 + \frac{156.500,71}{180.126 + \dots + 263.659} \times 180.126 =$$

134.487,29.

$$\phi_9(c') \times n_9 = \phi_8(c') + \frac{b_9}{n_9} \times n_9 = 0,75 + \frac{156.500,71}{263.659} \times 263.659 = 466.105,52.$$

ANEXO 2

Cálculos do valor de Shapley do jogo do custo de manutenção

Considerando as equações (8) e (9), o número de habitantes e RSU gerado em cada município (respectivamente Tabelas 4 e 7) e que o total do custo de manutenção $c''(N)$ foi estabelecido como R\$ 10.740.423,00, tem-se que os cálculos para encontrar a função custo do jogo do custo de manutenção (indicados na Tabela 6) estão indicados a seguir.

$$c''(g_1) = |g_1|\alpha_1 = \frac{RSU_1}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_1 = 11,0789$$

$$c''(U_{i=1}^2 g_i) = |U_{i=1}^2 g_i|(\sum_{i=1}^2 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^2 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_2 = -0,3622$$

$$c''(U_{i=1}^3 g_i) = |U_{i=1}^3 g_i|(\sum_{i=1}^3 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^3 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_3 = 0,1696$$

$$c''(U_{i=1}^4 g_i) = |U_{i=1}^4 g_i|(\sum_{i=1}^4 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^4 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_4 = 0,5805$$

$$c''(U_{i=1}^5 g_i) = |U_{i=1}^5 g_i|(\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^5 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_5 = -0,1201$$

$$c''(U_{i=1}^6 g_i) = |U_{i=1}^6 g_i|(\sum_{i=1}^6 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^6 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_6 = 0,6239$$

$$c''(U_{i=1}^7 g_i) = |U_{i=1}^7 g_i|(\sum_{i=1}^7 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^7 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_7 = 2,8176$$

$$c''(U_{i=1}^8 g_i) = |U_{i=1}^8 g_i|(\sum_{i=1}^8 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^8 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_8 = -0,2790$$

$$c''(U_{i=1}^9 g_i) = |U_{i=1}^9 g_i|(\sum_{i=1}^9 \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^9 RSU_i}{\sum_{i=1}^9 RSU_i} \times c''(N), \text{ tal que } \alpha_9 = 0,7780$$

Com os valores de α_i e utilizando a equação (6) obtêm-se as alocações de custo do valor de Shapley do jogo do custo de manutenção para o Consórcio Sul Fluminense, conforme os cálculos a seguir. Os resultados estão multiplicados pelos respectivos números de habitantes para que seja obtido o valor total atribuído a cada município.

$$\phi_1(c'') \times n_1 = \left(\alpha_1 + \sum_{h=2}^9 \alpha_{1,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} \right) \times n_1, \text{ tal que } \phi_1(c'') \times n_1 = 208.914,82.$$

$$\phi_2(c'') \times n_2 = \left(\alpha_2 + \sum_{h=3}^9 \alpha_{2,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^2 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_2 , tal que $\phi_2(c'') \times n_2 = 272.876,44$.

$$\phi_3(c'') \times n_3 = \left(\alpha_3 + \sum_{h=4}^9 \alpha_{3,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^3 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_3 , tal que $\phi_3(c'') \times n_3 = 283.608,05$.

$$\phi_4(c'') \times n_4 = \left(\alpha_4 + \sum_{h=5}^9 \alpha_{4,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^4 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_4 , tal que $\phi_4(c'') \times n_4 = 368.054,54$.

$$\phi_5(c'') \times n_5 = \left(\alpha_5 + \sum_{h=6}^9 \alpha_{5,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^5 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_5 , tal que $\phi_5(c'') \times n_5 = 429.386,77$.

$$\phi_6(c'') \times n_6 = \left(\alpha_6 + \sum_{h=7}^9 \alpha_{6,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^6 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_6 , tal que $\phi_6(c'') \times n_6 = 465.877,34$.

$$\phi_7(c'') \times n_7 = \left(\alpha_7 + \sum_{h=8}^9 \alpha_{7,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^7 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_7 , tal que $\phi_7(c'') \times n_7 = 1.927.471,77$.

$$\phi_8(c'') \times n_8 = \left(\alpha_8 + \sum_{h=9}^9 \alpha_{8,h} \frac{n_h + \dots + n_9}{n_h + \dots + n_9 + 1} + \sum_{h=2}^8 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times$$

n_8 , tal que $\phi_8(c'') \times n_8 = 2.753.622,65$.

$$\phi_9(c'') \times n_9 = \left(\alpha_9 + \sum_{h=2}^9 \sum_{j=1}^{h-1} \alpha_{j,h} \frac{n_j}{(n_h + \dots + n_9)(n_h + \dots + n_9 + 1)} \right) \times n_9, \text{ tal que } \phi_9(c'') \times$$

$n_9 = 4.030.610,62$.

ANEXO 3**Cálculos do valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura**

O valor de Shapley do jogo do custo de infraestrutura (VSI) para cada município integrante do Consórcio Sul Fluminense (indicado na Tabela 8) é encontrado pelas simples soma do valor de Shapley do jogo do aeroporto (VSA) com o valor de Shapley do jogo do custo de manutenção (VSM). Os cálculos estão a seguir.

$$VSI_1 = VSA_1 + VSM_1 = 181,36 + 208.914,82 = 209.096,18.$$

$$VSI_2 = VSA_2 + VSM_2 = 534,23 + 272.876,44 = 273.410,67.$$

$$VSI_3 = VSA_3 + VSM_3 = 908,19 + 283.608,05 = 284.516,24.$$

$$VSI_4 = VSA_4 + VSM_4 = 1.871,98 + 368.054,54 = 369.926,52.$$

$$VSI_5 = VSA_5 + VSM_5 = 3.036,64 + 429.386,77 = 432.423,41.$$

$$VSI_6 = VSA_6 + VSM_6 = 4.634,54 + 465.877,34 = 470.511,89.$$

$$VSI_7 = VSA_7 + VSM_7 = 49.674,47 + 1.927.471,77 = 1.977.146,24.$$

$$VSI_8 = VSA_8 + VSM_8 = 134.487,29 + 2.753.622,65 = 2.888.109,94.$$

$$VSI_9 = VSA_9 + VSM_9 = 466.105,52 + 4.030.610,62 = 4.496.716,14.$$

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO GERAL

A presente Tese abordou de forma bastante extensa o conceito de solução cooperativa do valor de Shapley, discutindo sua teoria e o aplicando em três artigos independentes que investigaram problemas de alocação relacionados a questões do meio ambiente. Para futuras pesquisas, deixa-se como sugestão abordar os mesmos problemas (ou semelhantes) adotando outros conceitos de solução para que sejam confrontados com os resultados da metodologia utilizada ou para que apresentem novos pontos de vista. Um dos conceitos de solução de maior relevância nos jogos cooperativos é o *core*, que tem estreita relação e muitas implicações sobre o próprio valor de Shapley.

Resumindo algumas definições sobre esse conceito de solução vistas no Capítulo 2 tem-se que, segundo Shapley (1971), o *core* é o conjunto de todos os resultados viáveis para a grande coalizão que não podem ser dominados, o que indica que os jogadores atingiram a melhor situação possível. Ou seja, nenhum subconjunto de jogadores pode alegar que eles obteriam resultados mais vantajosos atuando por conta própria. De acordo com Osborne e Rubinstein (1994), um resultado do *core* é dito estável se nenhuma coalizão pode obter um resultado melhor para todos os seus membros.

Essas definições mostram a importância de que a alocação do valor de Shapley se localize dentro do conjunto de resultados delimitados pelo *core*. Caso contrário, os jogadores podem em conjunto encontrar uma alocação que os deixaria em melhor situação, indicando que o valor de Shapley seria um resultado instável.

Porém a relação entre os dois conceitos de solução não é tão simples de se abordar. Primeiramente, o *core* pode ser vazio para alguns jogos, retratando uma situação em que não há alocação estável que se sustente como resultado. Em segundo, como explicam Montet e

Serra (2003), o valor de Shapley pode não ser um membro do *core*, mesmo se o *core* não for vazio. Isso significa que o valor de Shapley pode fornecer uma alocação que não é estável.

No entanto, um tipo de jogo específico têm propriedades que superam essas limitações: os jogos convexos. Se o jogo for convexo o *core* é sempre não vazio e nesse caso o valor de Shapley sempre pertence ao *core* do jogo. Segundo Shapley (1971), interpreta-se um jogo convexo como aquele em que os incentivos para se juntar a uma coalizão aumentam à medida que a coalizão cresce.

Dada essa discussão surge o questionamento sobre os resultados encontrados nas três aplicações realizadas nessa Tese. As alocações encontradas pela metodologia do valor de Shapley estariam no *core*?

Os três artigos que compõem o corpo da Tese utilizaram como função característica (para estabelecer o valor das coalizões) a função custo baseada na hipótese do custo do maior jogador. Conforme mostrou Littlechild e Owen (1973), pelas suas características essa função é claramente subaditiva. Em um função subaditiva é possível encontrar no conjunto viável de alocações da grande coalizão uma alocação de custo que seja Pareto eficiente, indicando que há uma redução no custo de cada jogador quando o problema é tratado de forma conjunta em comparação ao cenário em que os jogadores atuam individualmente.

Portanto, ainda que fossem necessários cálculos adicionais e novos estudos para tecer afirmações com precisão sobre a convexidade ou não das funções características e se os resultados do valor de Shapley pertencem ao *core*, pode-se ao menos afirmar com certeza que do ponto de vista metodológico em todas as aplicações há uma indicação de ganho para cada jogador ao se associar aos demais em comparação ao cenário em que eles tratariam do problema individualmente.

A observação de cada um dos artigos comprova essa afirmação. Tanto os custos para reparar danos da intervenção hidrelétrica, quanto os relacionados a projetos de despoluição da

baía de Guanabara e aqueles relacionados aos consórcios intermunicipais de resíduos sólidos são menores (para cada jogador), quando o problema é tratado de forma conjunta. Ou seja, os resultados indicam que existem ganhos com a cooperação, pois, a alocação do custo conforme o valor de Shapley mostra que quando os jogadores suportam esses custos em conjunto eles passam a ter um custo individual menor.

Acredita-se, entretanto, que o maior debate que poderia surgir em relação aos resultados apontados pelo valor de Shapley nos três artigos não seria a comparação dentro da própria metodologia, pois, como se viu há vantagens em agir conjuntamente. A questão chave seria a implantação desse conceito de solução na prática. O que pode ser traduzido na dificuldade em convencer os agentes envolvidos em cada situação de cooperação em aceitar a metodologia proposta, tendo por base de comparação o *status quo*, que são os valores em vigência no presente momento (ou encontrados de acordo com as regras atualmente em prática), que seguem metodologias diversas e diferentes dos jogos cooperativos.

Nos resultados encontrados nas três aplicações observa-se que sempre há um ou mais agentes que ficam em pior situação quando comparado ao *status quo*, isso poderia dificultar a formação da grande coalizão, pois, certamente um grupo de jogadores não estaria satisfeito com essa nova configuração. Portanto, identifica-se como ponto mais suscetível a debates a questão prática da implantação da metodologia ou, equivalentemente, a aceitação dela por parte dos jogadores. Sobre esse tema, a inclusão dos conceitos do *core* e do debate relacionado à suas características em futuras pesquisas poderia ser importante exatamente para discutir a estabilidade das coalizões e do resultado do valor de Shapley.

Tomando como exemplo a aplicação que trata do caso das hidrelétricas, a questão da dificuldade de implantação é vista de forma bastante nítida. Foram simulados três cenários. No primeiro, Itarantim e Itagimirim perdem em relação ao *status quo*, enquanto que no segundo e no terceiro Itarantim, Itagimirim e Itapebi perdem. Portanto, ainda que os

municípios revelem ganhos em todos os cenários ao alocarem o custo conjuntamente ao invés de individualmente, a comparação com a realidade mostra que poderia haver dificuldades para colocar a metodologia em prática.

De modo geral, viu-se que o *core* tem a importante propriedade da estabilidade, mas apresenta as limitações de que pode ser um conjunto vazio ou indicar um conjunto amplo de resultados. Além disso, Roth (1988) afirma que há certa complexidade no *core* que é um reflexo da complexidade subjacente ao próprio processo de interação estratégica envolvendo múltiplos jogadores. Provavelmente esse seja o motivo do *core* ser discutido muito mais teoricamente e conceitualmente e ser pouco encontrado em aplicações práticas e em predições ou indicações de resultados, onde o valor de Shapley permanece como um dos conceitos de solução mais utilizados e difundidos. Mas, obviamente, isso não diminui a importância da relação entre os dois conceitos.

Debatendo agora de forma mais específica as aplicações e a questão da dificuldade de implantação do valor de Shapley, pode-se fazer mais alguns comentários que servem não somente como conclusões gerais, mas, podem lançar luz sobre novas pesquisas. Em relação ao artigo que aborda a compensação financeira hidrelétrica (Capítulo 4), como ficou claro na discussão sobre o *core*, poderia ocorrer dificuldades em aceitar a metodologia do valor de Shapley na prática porque em todos os resultados apresentados (e com qualquer outra ponderação que fosse escolhida) sempre haveria um ou mais municípios em pior situação em comparação ao *status quo* (que é a distribuição atual da compensação levando em conta apenas a área inundada).

Uma forma de contornar essa limitação é que houvesse um aumento do valor da compensação paga aos municípios, ao invés de uma simples redistribuição do valor atualmente pago pela UHE Itapebi (como foi feito na aplicação). Até porque o trabalho observou a presença de ônus adicionais não mitigados (relacionado a aspectos econômicos, de

saúde, e de serviços públicos) sob a hipótese de que a compensação financeira atual não capta todos os impactos, de modo que um caminho para futuros estudos parece não passar apenas pela redistribuição do valor atualmente arrecadado, mas, sim, por um acréscimo no mesmo.

Outro tema que pode suscitar debates em relação à aplicação que trata da compensação financeira hidrelétrica está relacionado aos agentes relevantes na discussão, ou, de uma forma mais direta: quem deveria receber essa compensação? Isso porque apenas alguns grupos sociais são identificados como afetados (como pescadores, lavadeiras, etc.). Contudo, a compensação financeira é proposta para ser paga ao município, o que vale dizer é exatamente o que acontece no mundo real. Uma forma de tratar esse problema com mais eficiência em novos estudos seria considerar indenizações individuais para os grupos diretamente afetados e supor que os municípios (representado pelas prefeituras) receberiam apenas a compensação relacionada a efeitos difusos, que são aqueles que não podem ser atribuídos com clareza a algum grupo específico, ainda que essa opção possa esbarrar em dificuldades de mensuração.

Em relação ao artigo que trata da alocação dos custos de despoluição da baía de Guanabara (Capítulo 5), a questão da implantação da metodologia do valor de Shapley na prática também poderia ter dificuldades pelas razões óbvias de que o artigo faz um exercício que atribui os custos dos projetos de despoluição aos municípios (que são os agentes que despejam os esgotos sem tratamento nas águas da baía). Assim, certamente haveria resistência desses agentes em suportar os custos que historicamente vem sendo responsabilidade dos governos estadual e federal. Sobre essa aplicação, cabe ainda uma observação adicional quando se fala em atribuir os custos aos municípios. Sabe-se que na prática existem companhias de água e saneamento (algumas até privatizadas) que são responsáveis pelo serviço. Por facilidade de exposição indicou-se o nome do município porque é mais prático de identificar do que se fosse anunciada cada companhia de saneamento. Mas, o nome dos

municípios está representando os respectivos órgãos responsáveis pelos serviços de saneamento.

Ainda sobre o Capítulo 5, uma sugestão para futuros trabalhos é abordar não apenas os custos dos projetos de despoluição, mas também os benefícios que os municípios obteriam com a limpeza da baía. A quantificação dos benefícios certamente seria um ponto a favor para convencê-los a aceitar o fato de que eles passariam a ser responsabilizados pelos custos causados. Ainda que sejam necessários estudos mais precisos, a literatura e a experiência prática em outras baías e rios que foram despoluídos pelo mundo apontam ganhos expressivos como, por exemplo, a redução de despesas no sistema de saúde, valorização imobiliária, aumento da renda do turismo e de outras atividades econômicas (como a pesca), maiores oportunidades de lazer para a população, etc.

No que se refere à aplicação que estuda os custos dos consórcios intermunicipais para tratamento de resíduos sólidos (Capítulo 6), acredita-se que um problema que deve ser debatido em futuras pesquisas é a questão das externalidades negativas decorrentes da instalação do aterro sanitário e das atividades relacionadas ao manejo dos resíduos sólidos. Muitos municípios poderiam preferir não ser a sede da CTDR nem das Estações de Transferência uma vez que existem riscos ambientais decorrentes da instalação das mesmas. Além disso, é comum haver uma desvalorização imobiliária de áreas próximas ao terreno reservado para a disposição do lixo, entre outros problemas. Uma forma de lidar com o assunto é que o município sede seja compensado financeiramente com uma redução dos custos alocados a ele.

Não só no caso dos resíduos sólidos, mas em todas as demais aplicações podem ser identificadas oportunidades de abordar o tema das externalidades ambientais e seus efeitos indesejados. Porém, essa é uma questão bastante ampla que pode ser discutida exclusivamente em outros trabalhos. Nesta Tese, o foco foi estritamente a alocação de custos.

Ainda sobre o Capítulo 6 percebe-se que os resultados da metodologia do valor de Shapley trazem poucas mudanças em relação aos resultados do *status quo*, de modo que também poderia ser observada uma dificuldade em implantar uma nova fórmula na prática. Os municípios poderiam questionar o fato de que se existe uma fórmula vigente que dá um resultado próximo então seria custoso ou desnecessário mobilizar os participantes para aprender uma nova fórmula. Ainda mais que, apesar, da metodologia do valor de Shapley ser considerada de fácil compreensão pelos estudiosos dos jogos, os agentes reais não acostumados com termos econômicos podem não ter essa mesma percepção.

Por fim, reitera-se que com a extensa discussão proposta nessa Tese acerca do conceito de solução do valor de Shapley (que envolveu teoria, revisões de literatura e três aplicações) espera-se ter dado uma contribuição metodológica às discussões envolvendo problemas de alocação do meio ambiente no Brasil, onde ainda há uma escassez considerável de pesquisas semelhantes utilizando essa metodologia, não obstante sua grande difusão em âmbito internacional.

Referências Bibliográficas

AL-KHATIB, I. A.; MONOU, M.; ZAHRA, A. S.; SHAHEEN, H. Q.; KASSINOS, D. Solid waste characterization, quantification and management practices in developing countries. A case study: Nablus district – Palestine. **Journal of Environmental Management**, v. 91, n. 5, p. 1131-1138, 2010.

ALIPRANTIS, C. D.; CHAKRABARTI, S. K. **Games and decision making**. New York: Oxford University Press, 2000.

ANEEL. **Agência Nacional de Energia Elétrica**. Disponível em < <http://www.aneel.gov.br> >. Acesso em: 20 dez. 2014.

AUMANN, R. J. Linearity of unrestrictedly transferable utilities. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 7, n. 3, p. 281-284, 1960.

AUMANN, R. J.; PELEG, B. Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 66, n. 3, p. 173-179, 1960.

BORN, M. S.; GENSKOW, K.; FILBERT, T.; HERNANDEZ-MORA, N.; KEEFER, M. L.; WHITE, K. A. Socioeconomic and institutional dimensions of dam removals: the Wisconsin experience. **Environmental Management**, v. 22, n. 3, p. 359–370, 1998.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Promulgada em 5 de outubro, 1988.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº 7.990**, 1989.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº 9.433**, 1997.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº 9.984**, 2000.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei Federal nº. 12.305**, 2010.

BROWN, P. H.; TULLOS, D.; TILT, B.; MAGEE, D.; WOLF, A. T. Modeling the costs and benefits of dam construction from a multidisciplinary perspective. **Journal of Environmental Management**, v. 90, p. S303–S311, 2009.

BVRIO/FUNBIO. **Sistemas de cotas negociáveis e o controle de efluentes industriais na baía de Guanabara**. Rio de Janeiro: Bolsa Verde do Rio de Janeiro; Fundo Brasileiro para a Biodiversidade, 2013.

CASTAÑO-PARDO, A.; GARCIA-DIAZ, A. Highway cost allocation: An application of the theory of nonatomic games. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 29, n. 3, p. 187-203, 1995.

COPPETEC - Laboratório de hidrologia e estudos de meio ambiente da COPPE/UFRJ. **Plano Estadual de Recursos Hídricos do Estado do Rio de Janeiro - Relatório Síntese**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 2014.

COX JR, L. A. A new measure of attributable risk for public health applications. **Management Science**, v. 31, n. 7, p. 800-813, 1985.

CUNHA, V.; CAIXETA FILHO, J. V. Gerenciamento da coleta de resíduos sólidos urbanos: estruturação e aplicação de modelo não linear de programação por metas. **Gestão & Produção**, v. 9, n. 2, p. 143-161, 2002.

DINAR, A.; ALBIAC, J.; SANCHEZ-SORIANO, J. **Game Theory and Policy Making in Natural Resources and the Environment**. London: Routledge Publishing, 2008.

DINAR, A.; YARON, D.; KANNAI, Y. Sharing regional cooperative gains from reusing effluent for irrigation. **Water Resources Research**, v. 22, n. 3, p. 339-344, 1986.

DIXIT, A.; NALEBUFF, B. **Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life**. New York: W. W. Norton & Company, 1991.

DIXIT, A.; SKEATH, S.; REILEY JR., D. **Games of Strategy**. New York: W. W. Norton & Company, 2004.

DUBEY, P. The Shapley value as aircraft landing fees revisited. **Management Science**, v. 28, n. 8, p. 869-874, 1982.

EZEAH, C.; ROBERTS, C. L. Analysis of barriers and success factors affecting the adoption of sustainable management of municipal solid waste in Nigeria. **Journal of Environmental Management**, v. 103, p. 9-14, 2012.

FERES, J. Em Águas Turvas: governança do programa de despoluição da baía de Guanabara. In: **Boletim de Análise Político-Institucional / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada**. Rio de Janeiro: IPEA, 2014.

FIESTRAS-JANEIRO, M. G.; GARCÍA-JURADO, I.; MOSQUERA, M. A. Cooperative games and cost allocation problems. **Top**, v. 19, n. 1, p. 1-22, 2011.

FRAGNELLI, V.; GARCÍA-JURADO, I.; NORDE, H.; PATRONE, F.; TIJS, S. How to share railways infrastructure costs? In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 91-101.

FRAGNELLI, V.; IANDOLINO, A. A cost allocation problem in urban solid wastes collection and disposal. **Mathematical Methods of Operations Research**, v. 59, n. 3, p. 447-463, 2004.

GAVIÃO, A. B. **Gestão de conflitos ambientais frente à implantação de hidrelétricas: estudo de caso do aproveitamento hidrelétrico de Itapebi/BA**. 127 f. Dissertação de Mestrado em Regulação da Indústria de Energia. Universidade Salvador – UNIFACS, Salvador, 2006.

GIBBONS, R. **Game theory for applied economists**. Princeton: Princeton University Press, 1992.

GRAHN-VOORNEVELD, S. Sharing costs in Swedish road ownership associations. **Transportation Research Part A: Policy and Practice**, v. 46, n. 4, p. 645-651, 2012.

HART, S. Shapley value. In: EATWELL, J.; MILGRATE, M.; NEWMAN, P. **The New Palgrave: Game Theory**. New York: W W Norton, 1989. p. 210-216.

IBGE. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **IBGE – Cidades**. Disponível em: <<http://www.cidades.ibge.gov.br/xtras/home.php>>. Acesso em: 20 mai. 2016.

INSTITUTO TRATA BRASIL. **Benefícios econômicos da expansão do saneamento na Baía de Guanabara**. São Paulo: ITB, 2014.

INSTITUTO TRATA BRASIL. **Tratamento dos esgotos em Niterói avançam e município está perto da universalização**. Disponível em: <<http://www.tratabrasil.org.br/tratamento-dos-esgotos-em-niteroi-avancam-e-municipio-esta-perto-da-universalizacao>>. Acesso em: 20 dez. 2016.

JORGENSEN, S. A dynamic game of waste management. **Journal of Economic Dynamics & Control**, v. 34, n. 2, p. 258-265, 2010.

JORGENSEN, S.; MARTÍN-HERRAN, G.; ZACCOUR, G. Dynamic games in the economics and management of pollution, **Environmental Modeling & Assessment**, v. 15, n. 6, p. 433-467, 2010.

KARMPERIS, A. C.; ARAVOSSIS, K.; TATSIOPOULOS, I. P.; SOTIRCHOS, A. Decision support models for solid waste management: review and game-theoretic approaches. **Waste Management**, v. 33, n. 5, p. 1290-301, 2013.

KUIPERS, J.; MOSQUERA, M.; ZARZUELO, J. Sharing costs in highways: A game theoretic approach. **European Journal of Operational Research**, v. 228, n. 1, p. 158-168, 2013.

LAND, M.; GEFELLER, O. A multiplicative variant of the Shapley value for factorizing the risk of disease. In: **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer US, 2000. p. 143-158

LEITE, G. B; VIEIRA, W. C. Proposta metodológica de cobrança pelo uso dos recursos hídricos usando o valor de Shapley: uma aplicação à bacia do rio Paraíba do Sul. **Estudos Econômicos (São Paulo)**, v. 40, n. 3, p. 651-677, 2010.

LEMAIRE, J. An application of game theory: cost allocation. **Astin Bulletin.**, v.14, n.1, p. 61-81, 1984.

LIMA, E. C. R. **Qualidade de água da baía de Guanabara e saneamento: uma abordagem sistêmica**. 183 f. Tese de Doutorado em Planejamento Energético. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

LIMA, G. R. **Análise dos impactos socioambientais de usinas hidrelétricas através do método de análise de grupamento**. 56 f. Monografia de Graduação de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

LITTLECHILD, S. C. A simple expression for the nucleolus in a special case. **International Journal of Game Theory**, v. 3, n. 1, p. 21-29, 1974.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A simple expression for the shapley value in a special case. **Management Science**, v. 20, n. 3, 370-372, 1973.

LITTLECHILD, S. C.; OWEN, G. A further note on the nucleolus of the airport game. **International Journal of Game Theory**, v. 5, n. 2-3, p. 91-95, 1976.

LOEHMAN, E.; ORLANDO, J.; TSCHIRHART, J.; WHINSTON, A. Cost allocation for a regional wastewater treatment system. **Water resources research**, v. 15, n. 2, p. 193-202, 1979.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M.; GREEN, J. **Microeconomic Theory**. New York: Oxford University Press, 1995.

McCULLY, P. **Rios silenciados: ecología y políticas de las grandes represas**. Santa Fé: Proteger, 2004.

MCMILLAN, J. **Games, Strategies and Managers: How Managers Can Use Game Theory to Make Better Business Decisions**. New York: Oxford University Press, 1992.

MINEHART, D.; NEEMAN, Z. Effective siting of waste treatment facilities. **Journal of Environmental Economics and Management**, v. 43, n. 2, p. 303-324, 2002.

MONTET, C.; SERRA, D. **Game theory and economics**. New York: Palgrave Macmillan, 2003.

MORETTI, S. A model for cooperative intermunicipal waste collection: cost evaluation toward fair cost allocation. In: CARRARO, C.; FRAGNELLI, V (Eds.). **Game Practice and the Environment**. Edward Elgar Publishing, 2004. p. 125-144.

MORIMOTO, R.; HOPE, C. Applying a cost-benefit analysis model to the Three Gorges project in China. **Impact Assessment and Project Appraisal**, v. 22, n. 3, p. 205-220, 2004.

MOULIN, H. An application of the Shapley value to fair division with money. **Econometrica**, v. 60, n. 6, p. 1331-1349, 1992.

MYERSON, R. B. **Game theory: an analysis of conflict**. Cambridge: Harvard University Press, 1991.

NOGUEIRA, I. Rio descumpre todas as metas ambientais para a Olimpíada. **Folha de São Paulo**, São Paulo, 02 jul. 2016. Disponível em: <<http://temas.folha.uol.com.br/um-mes-para-a-olimpiada/meio-ambiente/rio-descumpre-todas-as-metas-ambientais-para-a-olimpiada.shtml>>. Acesso em: 02 jul. 2016.

NORDE, H.; FRAGNELLI, V.; GARCIA-JURADO, I.; PATRONE, F.; TIJS, S.; Balancedness of Infrastructure Cost Games, **European Journal of Operational Research**, v. 136, n. 3, p. 635-654, 2002.

OLIVEIRA, L. C. **Economia, instituições e royalties: o caso dos municípios lindeiros ao lago de Itaipu binacional no oeste paranaense**. 244 f. Dissertação de Mestrado em Desenvolvimento Regional e Agronegócio. Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Toledo, 2008.

OSBORNE, M. J.; RUBINSTEIN, A. **A course in game theory**. Cambridge: MIT Press, 1994.

PATRONE, F.; GARCÍA-JURADO, I.; TIJS, S (Ed.). **Game practice: contributions from applied game theory**. Springer Science & Business Media, 2000.

PELEG, B.; SUDHÖLTER, P. **Introduction to the theory of cooperative games**. New York: Springer Science & Business Media, 2007.

PEREIRA, A. K. **Desenvolvimentismo, conflito e conciliação de interesses na política de construção de hidrelétricas na amazônia brasileira**. Texto para Discussão 1884. Rio de Janeiro: IPEA, 2013.

PEREIRA, P. J. C. R. **Desafios do licenciamento ambiental de usinas hidrelétricas: um estudo de caso da UHE Itapebi**. 125 f. Dissertação de Mestrado em Políticas Públicas e Estratégias para o Desenvolvimento. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

QUINTELA, M. C. A.; CARVALHO, F. M. A. Compensações financeiras e royalties hidrelétricos na determinação do investimento público e das despesas sociais. **Revista de economia e agronegócio**, v.8, n. 1, p. 51 – 74, 2010.

ROTH, A. **The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

SEA/INEA. **O estado do ambiente: indicadores ambientais do Rio de Janeiro 2010**. Rio de Janeiro: Secretaria de Estado do Ambiente, Instituto Estadual do Ambiente, 2011.

SEA. **Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Rio de Janeiro – Relatório Síntese**. Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado do Ambiente (SEA), Instituto Estadual do Ambiente (INEA), 2013.

SEA. **Plano Estadual de Resíduos Sólidos do Rio de Janeiro – Volume 3: Arranjo Regional**. Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado do Ambiente (SEA), Instituto Estadual do Ambiente (INEA), 2013b.

SERRANO, R. Cooperative Games. In: **Computational Complexity**. New York: Springer, 2012. p. 666-674.

SHAPLEY, L. S. A value for n-person games. **Contributions to the Theory of Games**, v. 2, n. 28, p. 307-317, 1953.

SHAPLEY, L. S. Cores of convex games. **International journal of game theory**, v. 1, n. 1, p. 11-26, 1971.

SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. **American Political Science Review**, v. 48, n. 3, p. 787-792, 1954.

SILVA, L. L. **A compensação financeira das usinas hidrelétricas como instrumento econômico de desenvolvimento social, econômico e ambiental**. 147 f. Dissertação de Mestrado em Gestão Econômica do Meio Ambiente. Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

SILVEIRA, R. C. E.; PHILIPPI, L. S. Consórcios Públicos: uma alternativa viável para a gestão regionalizada de resíduos sólidos urbanos. **REDES**, Santa Cruz do Sul, v. 13, n. 1, p. 205 - 224, 2008.

SNIS. **Sistema Nacional de Informações em Saneamento**. Disponível em: <<http://app.cidades.gov.br/serieHistorica/>>. Acesso em 13 mai. 2016

STRAFFIN JR., P. D. The Shapley-Shubik and Banzhaf power indices as probabilities. In: ROTH, A. **The Shapley value: Essays in honor of Lloyd S. Shapley**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 71-81.

TIJS, S.; DRIESSEN, T. Game Theory and Cost Allocation Problems. **Management Science**, v. 32, n. 8, 1015-1028, 1986.

TILT, B.; BRAUN, Y.; HE, D. Social impacts of large dam projects: A comparison of international case studies and implications for best practice. **Journal of environmental management**, v. 90, p. S249–S257, 2009.

WIDGRÉN, M. Voting power in the EC decision making and the consequences of two different enlargements. **European Economic Review**, v. 38, n. 5, p. 1153-1170, 1994.

WINTER, E. The shapley value. In: AUMANN, R. J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 3. New York: Elsevier Science, 2002. p. 2025-2054.

YOUNG, C. E. F. et al. **Desenvolvimento de metodologia de avaliação ex post dos impactos socioeconômicos e ambientais de empreendimentos hidrelétricos**. Disponível em < <http://cbem.com.br/wp-content/uploads/2011/11/536.pdf> >. Centro Brasileiro de Energia e Mudanças Climáticas (CBEM), 2011.

YOUNG, H.P. Cost allocation. In: AUMANS, R.J.; HART, S. **Handbook of game theory with economic applications**, v. 2. New York: Elsevier Science, 1994. p. 1192-1235.

YOUNG, H.P.; OKADA, N.; HASHIMOTO, T. Cost allocation in water resources development. **Water resources research**, v. 18, n. 3, 463-475, 1982.