



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE ECONOMIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Rudrá Balmant Ferreira de Moura

QUESTÕES METODOLÓGICAS EM MODELOS DE SIMULAÇÃO BASEADOS EM
AGENTES PARA O ESTUDO MACRODINÂMICO DE SISTEMAS COMPLEXOS E
EVOLUCIONÁRIOS: A CALIBRAÇÃO, A VALIDAÇÃO E A ANÁLISE DE
SENSIBILIDADE

Rio de Janeiro

2023

Rudrá Balmant Ferreira de Moura

QUESTÕES METODOLÓGICAS EM MODELOS DE SIMULAÇÃO BASEADOS EM
AGENTES PARA O ESTUDO MACRODINÂMICO DE SISTEMAS COMPLEXOS E
EVOLUCIONÁRIOS: A CALIBRAÇÃO, A VALIDAÇÃO E A ANÁLISE DE
SENSIBILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Esther Dweck

Coorientador: Prof. Emérito Dr. Mario Luiz Possas

Rio de Janeiro

2023

FICHA CATALOGRÁFICA

M929q Moura, Rudrá Balmant Ferreira de.
Questões metodológicas em modelos de simulação baseados em agentes para o estudo macrodinâmico de sistemas complexos e evolucionários: a calibração, a validação e a análise de sensibilidade / Rudrá Balmant Ferreira de Moura. – 2023.
175 f.; 31 cm.

Orientadora: Esther Dweck.
Coorientador: Mario Luiz Possas
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Economia, Programa de Pós-Graduação em Economia da Indústria e da Tecnologia, 2023.
Bibliografia: f. 168-175.

1. Macroeconomia. 2. Modelo de simulação. 3. Metodologia. I. Dweck, Esther, orient. II. Possas, Mario Luiz, coorient. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Economia. IV. Título.

CDD 339

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária: Luiza Hiromi Arao CRB/7 – 6787

Biblioteca Eugênio Gudim/CCJE/UFRJ

Rudrá Balmant Ferreira de Moura

QUESTÕES METODOLÓGICAS EM MODELOS DE SIMULAÇÃO BASEADOS EM
AGENTES PARA O ESTUDO MACRODINÂMICO DE SISTEMAS COMPLEXOS E
EVOLUCIONÁRIOS: A CALIBRAÇÃO, A VALIDAÇÃO E A ANÁLISE DE
SENSIBILIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2023

Prof^a. Dr^a. Esther Dweck – Orientadora
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Emérito Dr. Mario Luiz Possas - Coorientador
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Dr. Ítalo Pedrosa Gomes Martins
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Pereira
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

RESUMO

Modelos de simulação baseados em agentes com vistas à integração micro-macrodinâmica vêm ganhando popularidade nas ciências econômicas, principalmente após a crise financeira de 2008 que ensejou críticas contundentes aos modelos tradicionais da macroeconomia, tal como as formulações conhecidas como *Dynamic Stochastic General Equilibrium* (DSGE). No entanto, juntamente ao ganho de popularidade também se prosperou o destaque à algumas críticas de cunho metodológico relacionadas tanto ao processo de construção quanto à análise desses modelos de simulação. O objetivo, portanto, desse trabalho é explorar metodologicamente discussões selecionadas acerca da calibração, da validação e da análise de sensibilidade nesses modelos, ilustrando a prática adotada em cada uma dessas questões em três famílias de modelos baseados em agentes evolucionários com integração micro-macro, destacando tanto as discussões na literatura quanto a prática em três diferentes famílias dos modelos. São, dessa forma, apresentadas e examinadas as famílias de modelos, por meio de suas diferentes versões publicadas, do Modelo Micro Macro Multissetorial (MMM), do modelo popularizado como *Schumpeter meets Keynes* (K+S) e do modelo fundado em Caiani *et al.* (2016). Adiciona-se à exposição um exercício de simulação considerando uma regra de limitação de gasto do governo integrada ao MMM voltado a ilustrar especificamente às discussões abordadas sobre a análise de sensibilidade.

Palavras-chave: Modelos de Simulação, Modelos Baseados em Agentes, ABM, Metodologia, Calibração, Validação, Análise de Sensibilidade

ABSTRACT

Agent based simulation models with a view to micro-macrodynamics integration have been gaining popularity in the economic sciences, especially after the 2008 financial crisis, which led to strong criticism of traditional macroeconomic models, such as the New-Keynesian formulations known as Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE). However, along with the gain in popularity, there has also been a rise in the prominence of some methodological criticisms related to both the construction process and the analysis of these simulation models. The aim of this dissertation is therefore to methodologically explore selected discussions about calibration, validation and sensitivity analysis in these models, illustrating the practice adopted in each of these issues in three families of agent based evolutionary models with micro-macro integration, highlighting both the discussions in the literature and the practice in three different families of these models. In this way, the families of models are presented and examined, through their different published versions, the Micro Macro Multisector model (MMM), the model popularized as Schumpeter meets Keynes (K+S) and the model based on Caiani et al. (2016). An MMM simulation exercise regarding a fiscal rule is added to the presentation to specifically illustrate the discussions on sensitivity analysis.

Keywords: Simulation Models, Agent-Based Models, ABM, Methodology, Calibration, Validation, Sensitivity Analysis

SUMÁRIO

1	Introdução: economia, sistemas complexos e modelos de simulação baseados em agentes.	9
2	Questões metodológicas selecionadas: calibração, validação e análise de sensibilidade de modelos de simulação baseados em agentes.....	14
2.1	Introdução	14
2.2	A calibração, validação e verificação de modelos	15
2.2.1	A verificação e validação de modelos	15
2.2.2	A calibração de modelos.....	20
2.3	Análise de sensibilidade	27
2.3.1	Introdução	27
2.3.2	Planejamento do experimento.....	31
2.3.3	Meta-modelagem.....	37
2.3.4	Medidas de sensibilidade.....	46
2.4	Discussão	49
3	Modelos baseados em agentes e aspectos metodológicos.....	50
3.1	Introdução	50
3.2	O modelo Micro Macro Multissetorial (MMM)	50
3.2.1	Introdução	50
3.2.2	Descrição do modelo	51
3.2.3	As equações do modelo	55
3.2.3.1	A produção efetiva da firma	57
3.2.3.2	A decisão de investimento	59
3.2.3.3	O avanço técnico em processo e produto.....	63
3.2.3.4	Os custos da firma	65
3.2.3.5	O mark-up e o preço	68
3.2.3.6	O consumo das classes de renda	69
3.2.3.7	Demanda efetiva aos setores e a parcela de mercado apropriada	72
3.2.3.8	Vendas e lucros	73
3.2.3.9	O governo.....	75
3.2.3.10	O setor externo	79
3.2.3.11	O setor financeiro	81
3.2.3.12	Geração e apropriação de renda.....	86
3.2.3.13	Entrada e saída de firmas.....	87
3.2.4	Calibração do modelo.....	89
3.2.5	Validação do modelo.....	96
3.2.6	Análise de sensibilidade	100
3.3	O Modelo Schumpeter meets Keynes (K+S).....	105

3.3.1	Introdução	105
3.3.2	Descrição do modelo	105
3.3.3	As equações do modelo	109
3.3.3.1	O setor de bens de consumo	110
3.3.3.2	O setor de bens de capital	115
3.3.3.3	O Governo	118
3.3.3.4	O Setor financeiro	119
3.3.3.5	O mercado de trabalho.....	121
3.3.3.6	Entrada e saída de firmas.....	124
3.3.3.7	Variáveis agregadas.....	125
3.3.4	Calibração e validação.....	126
3.3.4.1	Calibração do modelo.....	126
3.3.4.2	Validação do modelo.....	128
3.3.5	Análise de sensibilidade	131
3.4	O modelo Caiani et al. (2016)	136
3.4.1	Introdução	136
3.4.2	Descrição do modelo	136
3.4.3	As equações do modelo	139
3.4.3.1	Para todos os agentes.....	139
3.4.3.2	As firmas bens de consumo	141
3.4.3.3	As firmas bens de capital.....	144
3.4.3.4	O setor financeiro	145
3.4.3.5	O setor público	147
3.4.3.6	O mercado de trabalho.....	148
3.4.3.7	Falência de firmas e bancos.....	149
3.4.4	Calibração	150
3.4.5	Validação.....	153
3.4.6	Análise de sensibilidade	155
3.5	Discussão	156
4	Um exemplo de exercício de simulação e análise de sensibilidade	157
4.1	Introdução	157
4.2	Simulação e análise de sensibilidade de uma proposta de regra fiscal no modelo MMM.....	158
4.3	Discussão	168
	REFERÊNCIAS.....	170

1 Introdução: economia, sistemas complexos e modelos de simulação baseados em agentes.

A crise de 2008 reforçou uma série de críticas correntes aos modelos tradicionais da macroeconomia, inclusive por parte de economistas ortodoxos, que apontaram fragilidades nas famílias de modelos novo-keynesianos conhecidos como *Dynamic Stochastic General Equilibrium* (DSGE).¹

Apesar da difusão praticamente hegemônica em termos de modelagem macroeconômica, é reconhecido que os chamados DSGEs não se mostraram capazes de retratar fenômenos econômicos relevantes e recorrentes tais como crises², por exemplo.

Em específico, são modelos convenientemente construídos para que possuam solução analítica de equilíbrio geral. Tendo-se encontrado a trajetória de equilíbrio, somente perturbações de caráter exógeno são admitidas e são introduzidas por meio de choques estocásticos.³

Uma primeira observação metodológica relevante se refere à resolução analítica desses modelos por meio do expediente de equilíbrio geral. Isso implica que comportamentos

¹ Por exemplo, conforme explicitado por Blanchard (2018, p.51) ao alegar que DSGEs não são capazes de, nem deveriam, proporcionar representação da realidade: “DSGE modellers should accept the fact that theoretical models cannot, and thus should not, fit reality closely. The models should capture what we believe are the macroessential characteristics of the behavior of firms and people, and not try to capture all relevant dynamics.”

² Como admite, por exemplo, Joseph Stiglitz: “A lição que a crise nos forçou a levar para casa – uma que já deveríamos ter aprendido há muito tempo – é que os mercados econômicos, por si mesmos, não são necessariamente eficientes, estáveis, nem se autocorrigem. Uma das razões pelas quais se falhou não apenas em prevenir a crise, mas também em responder a ela, foi que muitos dos modelos predominantes, fundamentados em pressupostos especiais, levavam a pensar que o mercado era eficiente, estável e se autocorrigia. Como nossos modelos não analisavam adequadamente as causas da crise, não podíamos reagir a ela de forma a lograr uma recuperação forte e rápida, nem agir de modo a reduzir significativamente a probabilidade de uma recorrência” (Stiglitz in: Akerlof et al. 2016, p.295).

³ “This equilibrium shortcut was a natural way to examine patterns in the economy and render them open to mathematical analysis. (...) But there has been a price for this equilibrium finesse. Economists have objected to it – to the neoclassical construction it has brought about – on the grounds that it posits an idealized, rationalized, world that distorts reality, one whose underlying assumptions are often chosen for analytical convenience” (Arthur, 2015, p.3-4).

fora do equilíbrio são sumariamente considerados como desimportantes, transitórios e não afeitos ao comportamento inerente às dinâmicas econômicas.^{4,5}

Para além disso, é uma premissa analogamente forte condicionar todo e qualquer fenômeno de cunho macroeconômico a princípios puramente determinísticos e intrinsecamente estáveis, o que não encontra razoabilidade na economia, muito menos no mundo dos chamados fenômenos naturais.^{6,7}

Considerando-se, assim, as limitações da abordagem tradicional e a relevância de se ter um suporte metodológico coerente com o objeto de estudo⁸, o presente trabalho busca explorar questões metodológicas associadas a uma abordagem micro-macro alternativa à tradicional, comumente chamada de *Agent Based Models* (ABM).

É importante já deixar demarcado que ao longo dos capítulos que compõem o presente texto o termo ABM é utilizado seguindo a aceção já bem assentada separadamente por diversos autores, que abrange uma gama diversa e heterogenia de modelos em diferentes áreas do conhecimento e, em particular, na economia, seguindo a tradição teórica tanto ortodoxa quanto heterodoxa, que consiste na visão, resumidamente, de uma abordagem para modelação que se aproveita do potencial do uso da programação em computadores para o

⁴ “A suposição de que desequilíbrios e falhas de coordenação pertencem ao cotidiano da economia de mercado (...). Ela equivale a supor que, neste ambiente não-ergódico e não-estacionário que caracteriza a economia capitalista, os agentes podem cometer erros de previsão sistematicamente, sem por isso serem irracionais, e os mercados podem não estar em equilíbrio (e portanto “cleared”, embora a recíproca possa não ser verdadeira) mesmo em condições competitivas. Assim, tanto num contexto estático (tratado como equilíbrio geral competitivo) quanto na dinâmica de uma trajetória temporal, a imposição de condições de equilíbrio como um pré-requisito da análise científica (...) torna-se uma restrição, além de desnecessária, sufocante” (Possas, 2002, p.136-137, grifos no original).

⁵ “A interação entre agentes (em princípio) igualmente racionais, mas heterogêneos no que diz respeito às informações e ao poder de mercado, e que tomam suas decisões baseados em expectativas formuladas em condições de incerteza, pode determinar resultados muito distintos dos sugeridos pelos modelos equilibristas; em lugar de tender a uma determinada configuração de equilíbrio, os mercados podem desenvolver trajetórias ao longo das quais sucedem-se graus e tipos diferentes de desequilíbrio” (Macedo e Silva, 1999, p.14).

⁶ Conforme, por exemplo, comenta Prigogine (1997, p.73) ao apontar a relação entre processos físicos irreversíveis (não-determinísticos) e situações fora do equilíbrio: “irreversible processes describe fundamental features of nature leading to nonequilibrium dissipative structures”.

⁷ O físico Per Bak interessantemente expõe a contradição contida na formulação teórica da economia tradicional em relação ao que já se entende como estabelecido nas ciências físicas e propõe uma explicação para tal: “The obsession with the simple equilibrium Picture probably stems from the fact that economists long ago believed that their field had to be as ‘scientific’ as physics, meaning that everything had to be predictable. What irony! In physics detailed predictability has long ago been devalued and abandoned as a largely irrelevant concept. Economists were imitating a science whose nature they did not understand” (Bak, 1996, p.185, grifo no original).

⁸ Conforme ressalta Dweck (2006, p.123): “O instrumento metodológico utilizado na pesquisa científica influencia os objetivos a que esta se propõe e, portanto, deve estar de acordo com o objeto que se quer abordar, de forma que não limite o potencial de exploração do mesmo”.

estudo de processos econômicos modelados como sistemas dinâmicos caracterizados pela interação de agentes.⁹

A utilização de um instrumental de simulação numérica¹⁰, como, por exemplo, como processo gerador de séries temporais de dados de ABMs, em lugar da busca por soluções analíticas de equilíbrio¹¹, vem como consequência da caracterização da economia como um sistema complexo evolucionário (ou adaptativo), composto por agentes heterogêneos que interagem de forma endógena entre si ao longo do tempo. Arthur (2015) deixa explícito no excerto reproduzido abaixo essa caracterização do que chama de economia da complexidade:

“Complexity economics builds on the proposition that the economy is not necessarily in equilibrium: economic agents (firms, consumers, investors) constantly change their actions and strategies in response to the outcome they mutually create. (...) Complexity economics thus sees the economy as in motion, perpetually ‘computing’ itself – perpetually constructing itself anew. Where equilibrium economics emphasizes order, determinacy, deduction, and stasis, complexity economics emphasizes contingency, indeterminacy, sense-making, and openness to change” (Arthur, 2015, p.1).

Cumprido destacar que caracterizar a economia como um sistema complexo demanda a elucidação do que se concerne pelo termo. Holland (2014, p.3 - 6) ao reconhecer a não existência de definição rigorosa para complexidade destaca que a presença de comportamentos emergentes é um requisito inerente a designação de complexidade¹² e distingue que sistemas complexos apresentam determinados comportamentos reconhecíveis, como, por exemplo, padrões de auto-organização, comportamentos caóticos, onde pequenas

⁹ Seguindo, por exemplo, a definição de Tesfatsion (2006, p. 835) denominada pela autora de *Agent-based Computational Economics* (ACE). Em Axelrod e Tesfatsion (2006, p.1650, grifos no original) é oferecida uma abrangente descrição do que se entende por ABM, reproduzida a seguir: “ABM begins with assumptions about agents and their interactions and then uses computer simulation to generate ‘histories’ that can reveal the dynamic consequences of these assumptions. Thus, ABM researches can investigate how large-scale effects arise from the micro-processes of interactions among many agents. These agents can represent people (say consumers, sellers, or voters), but they can also represent social groupings such as families, firms, communities, government agencies and nations”.

¹⁰ Metodologicamente, Axelrod e Tesfatsion (2006, p.1650) distinguem as características de uma abordagem por simulação em comparação aos demais formatos adotados nas ciências: “Simulation, in general, and ABM in particular, is a third way of doing science in addition to deduction and induction. Scientists use deduction to derive theorems from assumptions, and induction to find patterns in empirical data. Simulation, like deduction, starts with a set of explicit assumptions. But unlike deduction, simulation does not prove theorems with generality. Instead, simulation generates data suitable for analysis by induction”.

¹¹ “Recent advances in computing power, along with successes in other domains such as ecology, have resulted in the emergence of a growing community arguing that agent-based models (ABMs), which simulate systems at the level of individual agents and the interactions between them, may provide a more principled approach to the modelling of the economy, which has traditionally been studied through the lens of general equilibrium theory and a set of restrictive and often empirically inconsistent assumptions” (Platt, 2020, p.1).

¹² “Emergence is the primary characteristic that distinguishes complex systems as an important subset of complicated systems” (Ibid., p.85, grifo no original).

mudanças nas condições iniciais produzem grandes variações, comportamentos de cauda longa, em que eventos raros podem ocorrer com maior frequência que o esperado, e interações adaptativas, no sentido que estratégias podem ser modificadas de maneira diversa devido justamente à interação entre agentes. Similarmente, Bak (1996, p.1 e 2) identifica a complexidade pela tendência de sistemas extensos com muitos componentes evoluírem para estados críticos em desequilíbrio em que pequenas perturbações podem levar a eventos de grande escala devido apenas às interações dinâmicas entre os agentes, o que chama de criticalidade auto-organizada.

Assim, ao amparo da concepção de complexidade e seguindo-se a visão que a economia é um sistema complexo e evolucionário a abordagem da modelagem e análise pela simulação de ABMs é não apenas metodologicamente coerente, mas também possibilita o estudo dos mais variados fenômenos de cunho econômico sem a estrita necessidade de se recorrer a situações de equilíbrio, em particular, e a formulações que prescindam de solução analítica de forma geral, expediente, a propósito, tradicionalmente adotado na macroeconomia heterodoxa.

No entanto, a abordagem de simulação de ABMs não é livre de críticas pertinentes a fragilidades metodológicas. Decerto que a crise de 2008 tenha trazido maior fôlego e difusão para modelos de simulação ABM¹³, mas também proporcionou relevo às críticas metodológicas já correntes que, entre outros aspectos, versam sobre a falta de robustez dos resultados, em face tanto à realidade empírica quanto à exploração da sensibilidade paramétrica, da não padronização de procedimentos e protocolos e da ampla variedade de modelos.¹⁴

¹³ Vale observar que Fagiolo, Moneta e Windrum (2007, p.197) destacam que o interesse na simulação de modelos baseados em agentes vem ganhando impulso já desde as décadas de 70 e 80: "In fact, the interest in AB modeling was stimulated by the breakdown of the general equilibrium approach and the rise of new classical macro models in the 1970s and 1980s. This became the dominant means of representing a dynamic, decentralized market economy in neoclassical economics. AB models reject the aprioristic commitment of neoclassical models to individual hyper-rationality, continuous equilibrium, and representative agents". LeBaron e Tesfatsion (2008, p.246) argumentam na mesma linha; "Starting around the mid-1980s, various researchers have sought to develop agent-based computational economics tools able to capture in useful terms the complexity of real-world economic phenomena".

¹⁴ Conforme, por exemplo, comentam Plat (2020, p.1): "Despite the (...) successes, ABMs face strong criticisms of their own, focused particularly on the inadequacy of current validation and calibration practices"; Fagiolo, Moneta e Windrum (2007, p.197): "[An] important aspect, recognised by AB modelers themselves, is a perceived lack of robustness in AB modeling"; e "AB models tend in fact to differentiate along four key dimensions: the nature of the object(s) under study, the goal of the analysis, the modeling assumptions, and the method of sensitivity analysis that is used" (Ibid., p.204).

Dessa feita, o objetivo do presente trabalho é o de apresentar a discussão sobre três aspectos metodológicos selecionados pertinentes à abordagem de simulação de modelos baseados em agentes objetos de críticas na literatura, designadamente a calibração e validação de modelos e discussões a respeito da exploração paramétrica global por meio de técnicas de análise de sensibilidade. Para tanto, além desse capítulo introdutório o capítulo 2, a seguir, dividido em duas principais seções, explora diferentes proposições teóricas qualitativas e quantitativas sobre calibração e validação de modelos, na seção 2.2, enquanto a seção 2.3 discorre sobre técnicas de análise de sensibilidade, dedicando especial foco em uma específica abordagem adotada em versões de duas famílias de modelos contempladas aqui. Como adiantado, o capítulo 3 apresenta em suas seções três famílias de modelos de simulação direcionadas à integração micro-macrodinâmica com vistas a exposição de uma sucinta descrição de cada modelo, suas formas funcionais e a prática adotada em cada um deles no que tange a validação, a calibração e a análise de sensibilidade. Assim, a seção 3.2 trata da família de modelos Micro Macro Multissetorial (MMM), a seção 3.3 apresenta diferentes versões da família de modelos conhecidos pelo denominação *Schumpeter meets Keynes* (K+S) e a seção 3.4 aborda o modelo Caiani et al. (2016). Por fim, a última parte do presente texto, o capítulo 4, é dedicada à ilustração do procedimento de análise de sensibilidade global, discutida no capítulo 2, por meio da simulação de uma regra fiscal de limitação de gasto de governo incorporada ao modelo MMM.

2 Questões metodológicas selecionadas: calibração, validação e análise de sensibilidade de modelos de simulação baseados em agentes.

2.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo expõe-se a partir da literatura voltada a modelos de simulação baseados em agentes as discussões e abordagens propostas relativas a calibração dos parâmetros exógenos, da validação empírica e verificação dos comportamentos das séries de dados gerados pelo exercício de simulação e das técnicas de análise de sensibilidade empregadas para exploração paramétrica dos efeitos das variáveis de entrada (*inputs*) do modelo em relação as séries temporais geradas pela simulação.

Para fins expositivos, condensa-se a apresentação referente às abordagens de calibração e validação na seção 2.2, a seguir, haja vista que frequentemente na literatura ambos os assuntos são abordados em conjunto e, por vezes, de forma intercambiável. Assim, a seção é segmentada em duas subseções, sendo a primeira, 2.2.1, voltada a discussão acerca da validação e verificação de modelos, enquanto a subseção 2.2.2 é destinada às abordagens de calibração dos parâmetros.

Já as discussões relativas à análise de sensibilidade são separadamente apresentadas na seção 2.3, última do presente capítulo, dedicando-se especial destaque a uma resumida explicação teórica relacionadas às etapas referentes à abordagem adotada especificamente em duas famílias de modelos apresentadas no capítulo 2.4.¹⁵ Desse modo, além da introdução da seção, mais três subseções compõem a apresentação do assunto, em que a subseção 2.3.2 aborda o tema de planejamento do experimento (*design of experiments*), a subseção 2.3.3 trata de meta-modelagem e, por fim, a subseção 2.3.4 é destinada a descrição de medidas de sensibilidade.

¹⁵ Nomeadamente, o modelo MMM, descrito na subseção 3.2, e o modelo K+S descrito na subseção 3.3.

2.2 A CALIBRAÇÃO, VALIDAÇÃO E VERIFICAÇÃO DE MODELOS

O objetivo dessa seção é apresentar sucintamente uma discussão sobre validação e calibração de modelos de simulação por meio da exposição e contraste de distintas visões e métodos propostas na literatura, com maior ênfase em publicações mais recentes, tratando-se, de forma não exaustiva, tanto de abordagens quantitativas¹⁶ quanto daquelas qualitativas, para validação e calibração.

De início, é importante ressaltar que muitas vezes não há uma distinção clara entre os procedimentos voltados à calibração e aqueles cujo objeto é a validação do modelo, tendo-se em muitas publicações ambos os termos sido referenciados de forma intercambiável¹⁷, e, portanto, torna-se inevitável nas duas subseções a seguir se comentar sobre calibração na apresentação das abordagens de validação e vice-versa. Além disso, inexistente protocolo geral amplamente difundido voltado para ambos os procedimentos¹⁸. Também vale observar que o termo calibração é substituído em publicações pelo termo estimação nos casos especificamente de abordagens desenvolvidas para ABMs geralmente de pequena escala com poucos parâmetros e baixo custo computacional, em que se é possível diretamente estimar os parâmetros do modelo, conforme exemplificado em subseção mais à frente no caso do método da inferência indireta, por exemplo.¹⁹

Dessa forma, a subseção 2.2.1 a seguir é voltada para a discussão e abordagens tanto de validação quanto sobre verificação de modelos, enquanto a subseção 2.2.2 é dedicada a discussão e métodos de calibração.

2.2.1 A verificação e validação de modelos

“[The] statistical properties of the artificial data and of the real-world can be compared and this constitutes what we call empirical validation. (...) Summing up, validating a simulation model amounts to assessing the extent by which the model structure represents the data generating process that underlies the societal reality

¹⁶ Há uma visão, vale de início comentar, que preconiza que a utilização, por exemplo, de uma abordagem de validação quantitativa pressupõe o emprego de alguma técnica de calibração também quantitativa, como, por exemplo, salientam Lamperti, Roventini e Sani (2018, p.369): “a quantitative calibration consists in the determination of input values such that the output satisfies certain calibration conditions, coming from, e.g., a statistical hypothesis test or the evaluation of a likelihood or loss function”.

¹⁷ Conforme observam Platt (2020, p.2) e Fagiolo et al. (2019, p.773), por exemplo.

¹⁸ Martinoli, Moneta e Pallante (2022, p.4) e Fagiolo, Moneta e Windrum (2007, p.202).

¹⁹ Contudo, de forma geral, como explicado por Fagiolo et al. (2019, p.773), a presença de interações microeconômicas de caráter complexo e de não linearidades impedem a obtenção de solução fechada quanto a função de verossimilhança ou quanto aos momentos, sendo, nesses casos, impraticável a estimação dos parâmetros.

but that cannot be directly observed. Validation involves use of both artificial data derived from the model and real observational data” (Fagiolo et al., 2019, p.770 e 771).

Para fins de desambiguação, é adotada aqui a diferenciação entre os procedimentos de validação e verificação de modelos de simulação, seguindo-se, para tanto, a argumentação alinhavada por Beisbart (2019) que define que a verificação tem como objeto a investigação da implementação do código de computador relativo ao modelo²⁰ no sentido de se avaliar se o código implementado fielmente corresponde à conceptualização do modelo, suas relações e interações, entendidas pelo modelador²¹ (Ibid., p.1008). Em outras palavras, pela verificação se avalia se o código programado resulta quando compilado e simulado em erros ou comportamentos anômalos²² em relação à descrição conceptual do modelo. Já a validação é direcionada para constatar que o modelo simulado representa com fidelidade o mundo real ou o sistema a ser estudado.²³ Esse visão para a validação de modelos se coaduna com a perspectiva que considera que resultados de modelos de simulação são relevantes na medida em que os comportamentos reproduzidos por esses modelos são empiricamente plausíveis.²⁴

Dessa feita, aqui é distinguido pelo termo verificação o que Fagiolo et al. (2019, p.775-76) denominam de validação de entrada (*input validation*, no original em inglês) e que, particularmente, discriminam como abordagens direcionadas na literatura para i) o teste e seleção das regras de comportamento dos agentes do modelo²⁵; ii) a seleção das condições iniciais, caracterizada pela preocupação quanto à sensibilidade do modelo às diferentes

²⁰ Vale desvelar a distinção que o autor faz entre o modelo e o código: “a model is something different from a code because the former is, e.g., a set of equations, while a code is a set of instructions” (Ibid., p.1008).

²¹ No caso, adiciona-se, o modelador pode não necessariamente ser também o programador do código, caso que pode trazer maiores dificuldades para o procedimento de verificação do modelo.

²² Não no sentido de comportamentos emergentes ou à priori inesperados, mas de comportamentos devidos a erros e/ ou má especificação do código.

²³ Ibid., p.1010. Nas palavras de Beisbart: “The aim of validation (...) is to show that a model accurately represents the real world, or more specifically, the target system, in some respects that depend on the intended uses”.

²⁴ Como, por exemplo, é defendido no trecho reproduzido a seguir sobre, especificamente, calibração e validação quantitativas: “It is evident that the results of simulations are reliable and useful insofar as the models are empirically plausible; namely to the extent that they are taken to the data through estimation, calibration or validation” (Martinoli, Moneta e Pallante, 2022, p.2).

²⁵ Essa categoria aqui chamada de verificação, ligada a construção do modelo e suas formas funcionais, é voltada para redução do que os autores se referem como “*wilderness of bounded rationality*” e, para tanto, organiza-se em três distintas abordagens: a) “*adjustment heuristics*”, em que o comportamento dos agentes é conformado por princípios econômicos básicos, isto é, o comportamento por heurística; b) “*management science*”, quando se recorre à literatura de administração para modelar-se o comportamento dos agentes; e c) “*empirical microeconomics*”, que apregoa buscar evidências empíricas microeconômicas para modelagem do comportamento dos agentes (idem).

possíveis trajetórias simuladas dadas as distintas configurações de parâmetros²⁶; e quanto iii) à exploração do espaço paramétrico, no sentido de avaliar o impacto dinâmico devido às diferentes configurações de parâmetros do modelo e voltado para o que chamam de robustez²⁷ dos experimentos de simulação²⁸.

Outro exemplo de verificação pode ser visto no modelo Caiani et al. (2016), explorado na subseção 3.4 do capítulo seguinte, em que as identidades contábeis referentes à manutenção da consistência entre fluxos e estoques, conhecida como agenda SFC (do inglês *Stock Flow Consistency*), é utilizada para verificação do modelo, não somente a cada período simulado, mas também em relação aos diferentes níveis de agregação.²⁹

Passando-se para a exposição da validação de modelos, seguindo-se a organização traçada por Fagiolo et al. (2019, p.776), denominada na publicação como validação de saída (*output validation*), que tem definição semelhante à enunciada acima, como sendo o processo de avaliação da medida em que as séries temporais geradas pelo exercício de simulação do modelo representam com boa fidelidade os comportamentos observados no mundo real e, adicionam os autores, tendo-se a abordagem mais difundida em modelos baseados em agentes, para tanto, aquela cujo foco reside na replicação de fatos estilizados a nível macro e, por vezes, também micro.

Mesmo com a proliferação de novas abordagens desenvolvidas para validação de modelos por meio de técnicas como por medidas oriundas da teoria da informação ou por comparação de relações de causalidade por regressão de séries temporais, essas técnicas seguem em geral, discorrem os autores, da comparação dos dados do modelo simulado e das séries empíricas em relação aos padrões que concebem (ou originam) a informação relevante do sistema que se tenha o interesse em examinar e contemplam apenas séries temporais

²⁶ “Even simple and deterministic ABMs can display chaotic dynamics, wherein small deviations between two configurations may generate extremely different time series (...). The problem of sensitive dependence on initial conditions can be tackled in small- scale models, which are typically analytically solvable (...). On the contrary, it is still an open issue in more complex models, where the large support from which initial-condition values can be drawn implies huge computational issues” (Idem).

²⁷ O termo robustez é definido pelos autores da seguinte forma: “For robustness of the model, we here mean the stability of the results to small variations of the parameters” (Ibid., p.776).

²⁸ Cumpre observar que essa questão localizada pelos autores quanto à exploração do espaço paramétrico e que é evidentemente relacionada tanto a calibração quanto a verificação e validação de modelos é abordada aqui separadamente na seção 2.3 a seguir, dedicada a exibição das abordagens convencionalmente chamadas de análise de sensibilidade.

²⁹ O assunto é apresentado e melhor detalhado na subseção 3.4.5 sobre os procedimentos de validação da família do modelo Caiani et al. (2016).

agregadas, sendo a incorporação nessas técnicas do comportamento microeconômico uma fronteira ainda a se alcançar para validação de ABMs³⁰.

Em uma célebre publicação menos recente, Fagiolo, Moneta e Windrum (2007), por sua vez, reconhecem a validação empírica como um aspecto metodológico problemático da literatura de ABMs³¹ que, por consequência, também envolve o questionamento quanto à construção de modelos, à calibração de parâmetros, às condições iniciais e à variabilidade estocástica, no sentido de inquirir sobre a compatibilização dessas características em relação aos dados empíricos disponíveis.³² Assim, a partir dessa preocupação os autores definem a validação empírica como o procedimento voltado à avaliação do quanto o processo de geração de dados do modelo simulado constitui uma boa representação dos dados observados na realidade empírica (Ibid., p.200).

São apresentados exemplos de diferentes abordagens, descritas na publicação como sendo as mais influentes e difundidas na literatura, tendo-se em comum entre elas o esforço para redução do número de parâmetros e configurações por meio da vinculação do modelo a uma realidade empírica observada, feito, no entanto, em cada abordagem de maneira distinta. Assim, são destacados no artigo os métodos: i) de calibração indireta, comentado separadamente em parágrafo mais abaixo na próxima subseção, que consiste na seleção dos fatos estilizados ou regularidades transversais empíricas que se deseja replicar, na conformação dos comportamentos microeconômicos do modelo mais próximos possíveis da evidência empírica, da restrição paramétrica às configurações de parâmetros e condições iniciais compatíveis com os fatos estilizados de interesse e, por fim, da investigação quanto aos mecanismos de causalidade subjacentes à replicação dos fatos estilizados ou regularidade que se deseja estudar; ii) a abordagem Werker-Brenner, que compreende, assim como no procedimento anteriormente descrito, na calibração de condições iniciais e no intervalo dos

³⁰ Idem. "Note that all these recently developed validation techniques focus only on aggregate time series, while most of ABMs have been (...) able to replicate *both* micro and macro stylized facts. We believe that the next challenge is to further extend the new approaches to validate AMBs also in terms of microeconomic behaviors" (Idem, grifo no original).

³¹ Ibid., p.197-98. Não somente a validação, vale mencionar, mas os autores enumeram quatro problemas associados à percepção de falta de robustez da modelagem ABM. Nomeadamente, a) a inexistência de um ou um conjunto de modelos amplamente difundidos; b) a falta de comparabilidade entre modelos; c) a falta de padronização de técnicas para construção e análise de modelos; e, como mencionado no corpo do texto, d) a relação problemática entre modelos e dados empíricos.

³² Conforme incitam os autores ao questionamento: "If we do proceed down the path of empirical validation, then how should we relate and calibrate the construction of parameters, initial conditions, and stochastic variability in AB models to the existing empirical data" (Idem).

parâmetros de acordo com evidências empíricas, quando disponíveis³³, na subsequente validação das séries geradas pela simulação de cada especificação de parâmetros definidas na etapa anterior por meio de técnicas de inferência bayesiana, de modo a descartar aquelas configurações de parâmetros não compatíveis com a validação empírica, e, em seguida, em uma consecutiva nova rodada de calibração com as configurações restantes que, para tanto, também se recorre a testemunhos históricos de especialistas para maior restrição da variação paramétrica; e iii) a abordagem historicamente compatível (tradução livre para *history-friendly*), que restringe parâmetros, interações e regras de decisão à história empiricamente observada de uma indústria em particular, sendo, dessa forma, um exercício de calibração subordinado às características únicas históricas de uma indústria ou mesmo um setor.

A abordagem de Guerini e Moneta (2017) é direcionada para a proposição de um método para validação empírica de modelos de simulação baseado na comparação da estrutura de modelos VAR estimados, tanto em respeito às séries simuladas quanto aos dados reais, por meio de algoritmos de busca de causalidade, constituindo, na visão de Guerini e Moneta, um teste de validade externa de modelos (Ibid., p.134), e aplicado na publicação à versão do modelo K+S desenvolvida em Dosi et al. (2015)³⁴.

Os autores indicam, nesse contexto, que a replicação de fatos estilizados seria insuficiente e pouco rigorosa para a validação de modelos, dado que os mesmos fatos empíricos poderiam ser replicados através de estruturas de causalidade completamente diferentes. Nas palavras dos autores, “[reliability] can be improved only through a validation exercise designed to provide evidence that the modelled data generating mechanism is an adequate representation of the real-data generating mechanism”.³⁵

³³ Caso contrário, quando não houver observações empíricas para balizar a calibração o método recomenda a definição mais geral possível, com amplos intervalos de variação para os parâmetros, por exemplo (Ibid., p.210).

³⁴ Essa e outras versões da família K+S é apresentada na seção 3.3 do capítulo seguinte.

³⁵ Ibid., p.127. Vale aqui reproduzir a integridade da crítica, nesse sentido, delineada por Guerini e Moneta: “the most serious methodological problem ABM experience nowadays is their unclear relationship with the empirical evidence. (...) The value of ABMs has been up to now evaluated according to their ex-post ability to reproduce a number of stylized facts even if other validation procedures are available (...). We argue that such an evaluation strategy is not rigorous enough. Indeed the reproduction, no matter how robust, of a set of statistical properties of the data by a model is a relatively weak form of validation, since, in general, given a set of statistical dependencies, there are possibly many causal structures that may have generated them. Thus models that incorporate different causal structures on which diverse and even opposite practical policy suggestions can be grounded, may well replicate the same empirical facts” (Guerini e Moneta, 2017, p.126).

Em essência, o procedimento proposto envolve i) a compatibilização das séries geradas pelo exercício de simulação com as séries empíricas referentes à economia dos Estados Unidos³⁶, em termos de dimensão em número de períodos das séries, descartando dos dados simulados um período inicial transiente, e em nível por meio de transformação logarítmica de ambas as séries; ii) a averiguação quanto a estacionariedade e ergodicidade das séries simuladas, suposições necessárias ao procedimento proposto³⁷; iii) a estimação da forma reduzida de um modelo VAR para ambas as séries; e iv) a recuperação do modelo SVAR subjacente por estratégia de identificação com o uso de algoritmos de busca de causalidade nos vetores de resíduos dos VAR estimados. Com isso, compara-se, para as séries reais e simuladas, as estruturas de causalidade estimadas por meio de três medidas de distância, de modo a indicar “how many of the real-world estimated causal effects are captured also by the agente-based model under validation inquiry” (Ibid., p.133).

A subseção a seguir versa sobre abordagens para a calibração de modelos.

2.2.2 A calibração de modelos

“Calibration has a long tradition in economics and has been interpreted in multiple ways (...). The common ground is to find numerical values for the parameters of the modeled artificial economies. The strategies for selecting these values have been diverse (...): parameters are derived from unrelated econometric studies or are chosen to guarantee that the model replicates some specific statistical properties of the data. In other cases, one relies on theoretical considerations and background knowledge. (...) The prevalent view, however, is that calibration allows the researcher to set the parameters so that the data generated by the model share specific properties with the observed data” (Martinoli, Moneta e Pallante, 2022, p.2).

Passando-se para a organização das diferentes abordagens mais recentes para calibração de modelos, Fagiolo et al. (2019, p.773-74) propõem distinguir os métodos de abordagem frequentista daqueles que empregam uma abordagem bayesiana. Nos primeiros, nomeadamente, destaca-se a inferência indireta, desenvolvida para modelos baseados em

³⁶ São consideradas tanto para as séries simuladas quanto para as empíricas os dados em nível agregado para a) consumo agregado; b) investimento privado bruto; c) taxa de desemprego; d) PIB; e) índice de preços corrente; e d) taxa efetiva de títulos públicos. Além disso, os dados empíricos coletados referem-se ao período de 1959 até 2014, em base trimestral (Ibid., p.134).

³⁷ “Some considerations about two underlying assumptions are needed. For the model to be a good proxy of the data generating process, we require that it be in a statistical equilibrium state in which the properties of the analyzed series are constant. In particular we require that the series, or transformation of them (...), have distributional properties that are time-independent; secondly we require that the series are ergodic, meaning that the observed time series are a random sample of a multivariate stochastic process” (Ibid., p.132).

agentes de pequena escala, e o método dos momentos simulados, quando a função referente aos momentos é desconhecida, caso da maioria dos modelos de larga escala, e, portanto, tem que ser aproximada por exercícios de simulação de Monte Carlo, tendo o objetivo do método encontrar o menor valor de uma medida de distância entre os momentos simulados e os inferidos de séries temporais empíricas, de modo a encontrar a configuração de parâmetros desse respectivo menor valor.³⁸ Os segundos, seguindo a popularização da estimação de modelos DSGE por métodos bayesianos, reduzem a discricionariedade na escolha da função de momentos ou qualquer outra métrica para a avaliação da distância mínima, no entanto remanescem críticas quanto a seleção da distribuição *prior* e pelo possível alto custo computacional associado.³⁹

Vale aqui destacar, conforme já comentado, a metodologia chamada de calibração indireta que é descrita por Fagiolo et al. (2019, p.765) como sendo o procedimento mais adotado na literatura de ABM⁴⁰, sendo considerado pelos autores como o primeiro teste de validação que qualquer ABM deve cumprir⁴¹ e que é ligada diretamente à validação do modelo na medida em que a calibração é bem-sucedida se as séries temporais geradas pelo exercício de simulação do modelo replicarem os fatos estilizados⁴², a nível micro e macro, selecionados

³⁸ Os autores advertem sobre o método dos momentos simulados (Idem): “This procedure is sufficiently general and in practice when the model complexity increases, and the simulation time becomes a relevant constraint. First, an analytical solution for the problem of minimization of the approximate distance function is rarely available, forcing one to rely on numerical approximations. Second, moment selection is arbitrary and different choices may lead to differing estimation results. Third, the procedure is computationally intensive as one needs to run a sufficient number of Monte Carlo simulations of the model for each instance of the parameter space, and then evaluate the distance between the generated moments and those observed in sampled real-world data”.

³⁹ “Bayesian methods are not exempted from these issues (...), the selection of the prior distribution can possibly generate an artificial curvature to the posterior distribution, when the likelihood tends to be flat, thus ending up in an interval calibration exercise. Second, the computational cost of Bayesian techniques is especially high when they are applied to ABMs for estimating the likelihood function” (Idem).

⁴⁰ Muito embora não esteja explicitamente discriminado no exame das respectivas publicações, Lamperti, Roventini e Sani (2018, p.369) afirmam que esse é o método de calibração/ validação adotado na família de modelos K+S, em específico em Dosi et al. (2015), e, igualmente, em Caiani et al. (2016), ambas famílias abordadas em minúcia no capítulo 2.4. Ademais, para a família de modelos MMM é relatado em Dweck (2006, p.136) a também utilização do procedimento de calibração indireta de seu modelo.

⁴¹ Ibid., p.769.

⁴² Vale se aproveitar da definição geral e exemplificação de fatos estilizados descrita pelos autores, reproduzida no trecho a seguir: “For the sake of generality, let us define as a stylized fact any possible type of measurable unconditional object that can be investigated by mean of some econometric exercises or more generally by statistical techniques. (...) Examples of micro and macro stylized facts that have been empirically identified and replicated by means of ABMs in different fields encompass fat-tailed distributions of returns, endogenous emergence of flash crashes, long-run coexistence of heterogeneous investing rules in finance; fat tailed distributions of firm growth rates, Zipf distribution of firm size, negative correlations between prices and market shares in monopolistic competitive markets in industrial dynamics; investment lumpiness, Okun and Beveridge curve, cyclical co-movements of variables in macroeconomics” (Fagiolo et al., 2019, p. 765-66).

pelo usuário. Fagiolo, Moneta e Windrum (2007, p.209-10)⁴³ observam que o procedimento de calibração indireta é passível de críticas no que diz respeito a inexistência de tentativa de calibrar parâmetros micro e macro a partir dos correspondentes valores empíricos, quanto a interpretação, no contexto do fenômeno que se deseja estudar, dos subconjuntos de configurações de parâmetros e condições iniciais que não correspondem às trajetórias simuladas compatíveis com os fatos estilizados e regularidades previamente selecionadas e, além disso, pelo fato de ser computacionalmente intensivo dada a possível necessidade de diversas rodadas tentativas do procedimento.

Um levantamento de diferentes métodos de calibração é organizado por Platt (2020, p.2, 3) que os compara por meio de experimentos conduzidos tanto em modelos de formulação simplificada⁴⁴ e solução analítica, possibilitando uma comparação por uma medida de distância euclidiana a partir dos experimentos de calibração com o valor verdadeiro, quanto em um modelo ABM de maior escala em que é aplicada parte das abordagens testadas que se mostraram mais promissoras nos exames com os modelos mais simples.⁴⁵

Na publicação é proposta a categorização das estratégias de calibração em três distintas naturezas: i) a calibração por observação direta, que é para os casos em que os parâmetros do modelo refletem diretamente valores observáveis e, portanto, podem ser coletados ou inferidos empiricamente; ii) calibração por métodos analíticos, para o caso de parâmetros que não representam quantidades diretamente observáveis, em que se torna necessário o uso de técnicas de estimação estatística, tal como estimação por máxima verossimilhança ou método dos momentos⁴⁶; e iii) métodos de calibração baseados em

⁴³ Os autores resume o método da seguinte forma: “As its name suggests, the indirect calibration approach first performs output validation, and then indirectly calibrates the model by focusing on the parameters that are consistent with output validation” (Fagiolo, Moneta e Windrum, 2007, p.208).

⁴⁴ Especificamente os métodos de calibração testados pelo autor são aplicados em um modelo auto-regressivo (AR) de primeira ordem, com apenas um parâmetro calibrável, um modelo auto-regressivo de médias móveis (ARMA) com erros de heterocedasticidade condicional auto-regressiva (ARCH), uma formulação de passeio aleatório com mudanças estruturais, um modelo de agentes heterogêneos voltado a modelar transações de ativos financeiros e um modelo ABM de larga escala voltado a representar o mercado imobiliário do Reino Unido.

⁴⁵ Platt ao realizar os testes propostos das diferentes metodologias nos distintos modelos propostos conclui que para os modelos mais simples a abordagem bayesiana se mostrou mais acurada enquanto que no modelo ABM de maior complexidade os resultados foram menos decisivos e com maiores limitações, tendo-se que realizar previamente uma triagem e redução dos parâmetros livres por meio de efeitos elementares (Morris, 1991), contudo com resultados ainda favoráveis para a abordagem bayesiana testada (Ibid., p.25 e 26).

⁴⁶ Platt (Ibid., p.3) comenta sobre a adequabilidade e viabilidade do emprego desses métodos puramente analíticos: “in general it [maximum likelihood estimation] and related methods are not appropriate as they rely

simulação, explorados em maior profundidade na publicação, discriminados por Platt em a) métodos de distância mínima simulada e b) baseados em aproximações da função de verossimilhança por abordagens tanto frequentistas quanto bayesianas.

Dentre os métodos baseados em simulação vale destacar a abordagem que se utiliza de alguma medida de distância mínima simulada⁴⁷, sendo em seus mais variados formatos⁴⁸ a abordagem mais difundida na literatura de calibragem quantitativa de ABM⁴⁹. De forma geral, utiliza-se alguma medida de distância fornecida por uma função objetivo selecionada voltada a medir o grau de dissemelhança entre séries empíricas e as séries simuladas e suas respectivas replicações de Monte Carlo. Um exemplo desse método é apresentado mais abaixo pela proposta de Martinoli, Moneta e Pallante (2022).

Adicionalmente, Platt comenta (Ibid., p.4) sobre os custos computacionais proibitivos decorrentes da grande quantidade de dados que precisam ser gerados pela simulação nos métodos quantitativos de calibração mais recentes, principalmente em modelos ABM de grande escala. Para contornar essa dificuldade associada a modelos computacionalmente intensivos, uma abordagem na visão do autor promissória é a utilização de meta-modelos para exploração paramétrica de modo a amparar o processo de calibração. Um exemplo próximo a esse tipo de uso de meta-modelagem pode ser visto em Dosi et al. (2022), detalhada na subseção 3.3.5, abaixo, que discute a família de modelos K+S. Outros exemplos de propostas de calibração pela utilização de diferentes técnicas de meta-modelagem são relatados mais adiante. A discussão sobre meta-modelos e, especificamente, o método Kriging é realizada na subseção 2.3.3 a seguir sobre análise de sensibilidade.

Mais recentemente, Martinoli, Moneta e Pallante (2022) propõem o que chamam de protocolo geral voltado tanto à calibração quanto à validação de modelos de simulação a partir do uso de uma medida de menor distância entre configurações dos parâmetros, isto é,

on obtaining an analytical expression of the joint density function of time series simulated by the model. This is possible only for very simple models and even then is nontrivial”.

⁴⁷ “Broadly speaking, these methods involve the construction of an objective function that measures the distance between simulated and measured time series for a given set of parameters, followed by the application of optimization methods” (Ibid., p.3).

⁴⁸ Platt enumera (Ibid., p.3 e 4) alguns métodos de distância mínima simulada que utilizam, por exemplo, como medida de distância as somas ponderadas dos erros quadrados entre os momentos simulados e empíricos, o método dos momentos simulados, métodos baseados em teoria da informação tal como o critério de informação de Markov e aqueles voltados à comparação dos mecanismos de causalidade usando regressões de modelos de vetores auto-regressivos estruturais (SVAR).

⁴⁹ Ibid., p.7.

diferentes calibrações, e séries temporais de dados empíricos⁵⁰. O procedimento, bastante semelhante a proposta de Guerini e Moneta (2017) relatada acima, consiste na estimação de modelos VAR, tanto para as séries temporais geradas pela simulação e suas replicações de Monte Carlo, quanto para as séries de dados empíricos coletados, cuja estratégia de identificação local adotada baseia-se na análise do componente independente, o termo de erro ou choque, resultando em cada modelo estimado na distinção dos vetores dos choques e da matriz que descreve os impactos contemporâneos dos choques na variável de interesse que, por sua vez, é utilizada no cálculo dos índices de distância mínimos em relação a cada configuração dos parâmetros e respectivas simulações e as séries empíricas.

Assim, a partir dos indicadores de mínima distância são excluídas as configurações de parâmetros cujos indicadores se mostram estatisticamente indistinguíveis e com os restantes são inferidos grafos que representam as relações causais entre os componentes de choque e as variáveis do modelo VAR, para as séries simuladas e as de dados reais. Por fim, os grafos gerados das séries simuladas e empíricas são comparados de forma a distinguir aqueles estatisticamente mais semelhantes e, por esse critério, é realizada uma triagem das configurações de parâmetros⁵¹. Adiciona-se que esse procedimento é aplicado ao modelo DSK⁵², da família K+S, e os dados macroeconômicos coletados são referentes às séries temporais do Estados Unidos.

Com esse procedimento, os autores reforçam que as distintas possíveis configurações de parâmetros para calibração do modelo devem ser selecionadas de modo que as estruturas de causalidade emergentes observadas nas variáveis agregadas simuladas sejam as mais semelhantes possíveis às estruturas observadas nos dados reais, o que, por consequência, condiciona a seleção da configuração dos parâmetros para calibração também à validação do modelo.⁵³

⁵⁰ É reconhecida, vale ressaltar, pelos autores as semelhanças do procedimento que propõem para modelos de simulação com aqueles empregados para calibração de modelos DSGE (Ibid., p.5): “In spite of the focus on ABMs, our calibration step shares some similarities with the literature on calibration of DSGE models (...) in which general equilibrium models are calibrated relying on indirect inference and, more in general, on simulated minimum-distance. The objective (binding) functions to be optimized involve the minimization of the distance between the impulse response functions of the models and the empirical impulse response functions”.

⁵¹ Ibid., p.4 – 13.

⁵² Cf. Lamperti et al. (2018)

⁵³ Ibid., p.3. Nas palavras dos autores: “Our aim is to identify a set of structural shocks and estimate their dynamic causal effects on the variables of interest. We do this both for the model’s and the ‘real-world’ DGP [Data

Partindo-se para um exemplo de método de calibração que se utiliza de meta-modelos⁵⁴ para representação das relações entre os parâmetros e as variáveis resposta da simulação de interesse em conjunção a uma medida de menor distância, a proposta de Chen e Desiderio (2022) se baseia em um método de simples aplicação amparado por técnicas habituais de regressão por mínimos quadrados ordinários (MQO) para estimação do meta-modelo. Resumidamente, para cada configuração de parâmetros do modelo e seus respectivos valores esperados da estatística ou momento de interesse, é computado as distâncias entre as estatísticas simuladas e observadas empiricamente, ordenando-as e, por fim, encontrando-se a configuração de parâmetros de respectiva menor distância.

Isso é feito ao se definir a estatística simulada de interesse como a variável resposta do meta-modelo estimado por regressão, definindo-o em função dos parâmetros que se deseja calibrar, a partir de uma amostra de n vetores de parâmetros cujos valores são aleatoriamente definidos e n vetores de sementes aleatórias. Os autores argumentam (Ibid., p.692) que se o modelo de regressão for corretamente especificado os erros serão independentes dos vetores de parâmetros e se não houver covariância entre os vetores de parâmetros e de sementes aleatórias o meta-modelo proverá o verdadeiro valor médio da estatística simulada de interesse. No entanto, não há indicação no artigo de como se definir a especificação correta do modelo de regressão⁵⁵, muito embora seja admitido que a metodologia proposta envolve uma renúncia à precisão em favor da simplicidade e relativo baixo custo computacional.⁵⁶

Generating Process], using an identification method that exploits non-Gaussianity, in the spirit of a flourishing literature in structural VAR analysis that relies on statistical identification approaches” (Idem).

⁵⁴ Para adiantar uma discussão aqui retomada em subseção mais adiante, vale reproduzir a seguinte explicação sobre o uso de um meta-modelo em sua abordagem: “A (...) approach to calibration that avoids to simulate a computational model (including ABMs) for the whole parameter space is based on the concept of meta-modeling. Meta-modeling, mainly used in sensitivity analysis, is the process of approximation of an unknown complicated relationship between input factors (...) and model output (...) with a simpler one of known shape” (Chen e Desiderio, 2022, p.690, grifo no original).

⁵⁵ Há, no entanto, no artigo o comentário que o dilema sobre a escolha da melhor especificação recai também sobre todos os outros métodos baseados em meta-modelagem e que diferentes especificações podem ser testadas na execução do procedimento (Ibid., p.698).

⁵⁶ A menor precisão do método fica revelada nas duas passagens reproduzidas a seguir: “Calibration procedures based on meta-modeling such as ours are therefore intended to increase the speed of the calibration process at the expense of its accuracy, because the statistics (...) are approximated by the fitted values of the meta-model” (Ibid., p.691). E, “The merit of our approach is its speed and ease of implementation, obtained however at the price of a loss of accuracy caused by the use of approximated simulated statistics” (Ibid., p.694).

Outro exemplo de uso de meta-modelos, neste caso, através de uma abordagem comparativamente mais sofisticada, é encontrado em Lamperti, Roventini e Sani (2018) com a utilização de técnicas não paramétricas de aprendizado de máquinas (*Machine Learning*) aliadas a um planejamento iterativo para amostragem no sentido de propiciar um rito recursivo de aprendizagem para aproximação do meta-modelo.⁵⁷

Em linhas gerais, o procedimento se inicia pela extração de uma grande amostra de configurações de parâmetros, que representam uma *proxy* da totalidade do espaço paramétrico⁵⁸, e, a partir dessas, é aleatoriamente extraído um pequeno subconjunto de combinações de parâmetros que são submetidos à simulação do modelo⁵⁹. Assim, a depender da variável resposta simulada de interesse avaliada em função de algum critério de calibração definido pelo usuário cada configuração ganha um rótulo, seja de caráter binário, como positivo ou negativo, verdadeiro ou falso, seja um valor real, um número ou vetor, que quantitativamente representa alguma propriedade.

Com essa amostra e rótulos o meta-modelo é ensinado e com ele avalia-se a probabilidade quanto aos rótulos de configurações de parâmetros ainda não simuladas. Segue-se que outra pequena amostra de configurações não rotuladas é extraída, escolhendo-se preferencialmente aquelas configurações cuja probabilidade avaliada pelo meta-modelo foi dada como positiva para o critério de calibração, e submetida à simulação do modelo, propriamente rotulada e agregada para o aprendizado do meta-modelo, assim, repetindo-se todo o processo de forma recursiva até exaurir-se o orçamento computacional definido pelo usuário. Os autores empregam o procedimento proposto em dois distintos modelos e concluem que o meta-modelo resultante apresenta alta precisão e menor custo computacional em relação a outros procedimentos como, por exemplo, o método Kringing.

Por fim, diferentemente dos procedimentos até aqui mencionados a proposta de calibração de Caiani et al. (2016) volta-se tanto para diminuição da arbitrariedade na escolha

⁵⁷ O procedimento, nas palavras dos autores, é resumido da seguinte forma: “Our approach explores the ABM parameter space using a non-parametric machine learning surrogate and iterative sampling algorithm that intelligently searches the response surface with few limiting conditions. In particular, no parametric assumptions or knowledge of the topology governing the spatial distribution of the data is required” (Ibid., p.367).

⁵⁸ Os autores informam que o método de amostragem escolhido é de preferência do usuário e que eles empregam no exercício descrito na publicação a amostragem de Sobol *quase*-aleatória (Ibid., p.367 e 370).

⁵⁹ Destaca-se que em todas as simulações executadas no procedimento é mantida fixa a semente de números pseudoaleatórios: “the seed of the pseudo-random number generator is fixed and kept constant across runs of the model over different parameter vectors” (Ibid., p.374).

de valores para calibração quanto para o cuidado na definição da condição inicial da simulação, garantindo-se desde o início a consistência entre os fluxos e os estoques. A proposta, discutida aqui com maior abrangência na subseção 3.4.4, consiste na imposição de simetria e homogeneidade inicial e na condição de estado estacionário com possibilidade de crescimento nominal por inflação exógena para, a partir de uma versão agregada do modelo e por meio das relações intersetoriais e de consistência entre fluxos e estoques, chegar em um sistema de equações simultâneas que pode ser numericamente resolvido ao se definir exogenamente valores para parte dos parâmetros calibráveis do modelo. Desse modo, apenas parte dos parâmetros e valores iniciais deve ser definida de forma exógena pelo usuário do modelo, tendo-se o restante definido seguindo o procedimento de calibração.⁶⁰

A próxima seção trata da análise de sensibilidade de parâmetros e condições iniciais do modelo, comentando sobre algumas diferentes abordagens e dedicando o foco ao procedimento específico adotado em duas das famílias de modelos aqui contempladas.

2.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

2.3.1 Introdução

“[Sensitivity] analysis can serve a number of useful purposes in the economy of modelling. It can surprise the analyst, uncover technical errors in the model, identify critical regions in the space of inputs, establish priorities for research, simplify models and defend against falsifications of the analysis. In the context of models used for policy assessment, sensitivity analysis can verify whether policy options can be distinguished from one another given the uncertainties in the system” (Saltelli et al., 2008, p.11).

Em linhas gerais, entende-se por análise de sensibilidade a verificação de quais parâmetros de entrada (*inputs*) são os mais importantes em influenciar a incerteza de

⁶⁰ A adoção de tal procedimento ocorre, por exemplo, em Martins (2018, p.80), em Possas, Dweck e Vianna (2020, p.6) e Vianna (2021, p.134), esses dois últimos pertencentes a família de modelos MMM abordada no seção 3.2 mais adiante.

determinada variável resposta (*output*) do modelo⁶¹, no sentido de indicar a relativa importância desses parâmetros de entrada na determinação da variável resposta.^{62, 63}

No contexto de modelos de simulação uma das utilidades do procedimento deriva da necessidade da averiguação de quais circunstâncias e especificações de parâmetros levam aos mesmos determinados resultados objetos dos experimentos realizados ou, em outras palavras, procura-se descrever o comportamento do modelo ao longo do espaço paramétrico ao se verificar a sensibilidade de um ou mais parâmetros de saída selecionados em relação aos demais parâmetros de interesse relativamente ao experimento conduzido.

Para tanto, há uma série de métodos disponíveis, como, a título de exemplo, a sensibilidade local, em pontos específicos, por meio de derivadas parciais⁶⁴, a técnica de efeitos elementares que apesar de guardar similaridade com a abordagem por meio de derivadas não se restringe a sensibilidade local ao buscar explorar variados pontos do espaço paramétrico e procedimentos de decomposição da variância da variável resposta em relação as variáveis de entrada, seja por meio da decomposição dos efeitos de primeira, segunda e demais eventuais ordens de interação ou dos efeitos totais de interação entre as variáveis.

Para os fins de exposição do procedimento de análise de sensibilidade é adotada na presente seção a divisão distinguida por, entre outros, Dosi, Pereira e Virgillito (2017, p.183), Dosi et al. (2017b, p.707), Fagiolo et al. (2019, p.779) e Possas, Dweck e Vianna (2020, p.14) que, em síntese, consiste em três etapas que compreendem i) amostragem (ou planejamento

⁶¹ Vale observar que, de forma geral, é passível de ser entendido como parâmetros de entrada do modelo tanto as condições iniciais, as especificações, hipóteses e formas funcionais quanto as variáveis propriamente ditas. No entanto, para fins de exposição da análise de sensibilidade aqui se denota como parâmetros ou variáveis de entrada apenas aqueles que podem variar exogenamente no intuito de se estudar seus efeitos na variável resposta do modelo.

⁶² Saltelli et al., 2008, p.7 e 9. Os autores, nomeadamente, enunciam a seguinte definição, reproduzida aqui em livre tradução (Ibid., p.1): análise de sensibilidade é o estudo de como a incerteza relacionada à saída (*output*) de um modelo, seja ele numérico ou não, pode ser partilhada entre diferentes fontes de incerteza das entradas (*input*) do modelo.

⁶³ Vale, aqui, reproduzir o comentário de Saltelli et al. (2008, p.278) no trecho a seguir: “A global sensitivity analysis might serve variously (...) both the modellers and the critics of the model. Yet there is no magic formula – a sensitivity analysis may reveal to which assumptions a model is more sensitive but say nothing about the defensibility of these assumptions”.

⁶⁴ Considerada a forma mais comum na literatura de se avaliar a sensibilidade de um parâmetro, dado que, por definição, a derivada $\partial Y_j / \partial X_i$ pode ser vista como a sensibilidade de Y_j em relação a X_i . No entanto, seu emprego é desaconselhado quando o modelo é de linearidade desconhecida e o intervalo de variação da variável de entrada é incerto: “the fatal limitation of a derivative-based approach is that it is unwarranted when the model input is uncertain and when the model is of unknown linearity. In other words, derivatives are only informative at the base point where they are computed and do not provide for an exploration of the rest of the space of the input factors” (Ibid., p.11).

do experimento⁶⁵), ii) estimação do meta-modelo e iii) a decomposição da variância. Em específico, seguindo-se o proposto por Salle e Yıldızoğlu (2014), é descrito o planejamento do experimento por meio de Hiper cubo Latino Quase Ortogonal⁶⁶ (HLQO) e é exposto a estimação do meta-modelo pelo método Kriging⁶⁷.

Dessa forma, essas três etapas são separadamente destacadas nas próximas subseções, onde em 2.3.2 é discutido o planejamento do experimento, em 2.3.3 versa-se sobre meta-modelagem e em 2.3.4 é tratado o indicador de sensibilidade por decomposição de Sobol’.

Observa-se, adicionalmente, que o discernimento quanto às superfícies de resposta de determinada combinação de parâmetros propiciadas pela análise de sensibilidade pode ser igualmente visto como parte do procedimento de validação de modelos, em termos de exploração de configurações de parâmetros que o levariam a comportamentos distantes da realidade empírica, a e na avaliação quanto a robustez dos experimentos conduzidos, em particular, para as implicações de diferentes políticas.⁶⁸

Antes de prosseguir, ainda na presente introdução, trata-se brevemente do método de efeitos elementares⁶⁹, dado sua importância e relativa facilidade para identificação de fatores relevantes no contexto de modelos de simulação computacionalmente custosos.

O método de efeitos elementares examina o efeito de cada variável individualmente e é considerado ideal para triagem de variáveis relevantes em modelos extensos com muitos parâmetros por ser de baixo custo computacional e depender de um relativamente pequeno número de pontos amostrais.

⁶⁵ Tradução para o termo em inglês “design of experiments” ou, em francês, “planification d’expériences”, encontrado em publicações em português.

⁶⁶ Do inglês, Nearly Orthogonal Latin Hypercube.

⁶⁷ Há publicações em português que denominam o método matemático como Kringagem ou Krigeagem. No entanto, escolheu-se aqui referir-se à metodologia pelo designativo em inglês que homenageia o engenheiro de minas sul africano Danie Krige cujo trabalho empírico em geoestatística levou à formalização do método pelo matemático francês George Matheron que cunhou a denominação em francês Krigeage (Kleijnen, 2015, p.180).

⁶⁸ Cf. Fagiolo et al. (2019, p.779). Semelhantemente, Fagiolo, Moneta e Windrum (2007, p.205) destacam que a técnica de análise de sensibilidade que, pelo menos, explore como os resultados obtidos nos experimentos dependem a) dos parâmetros micro-macro; b) das condições iniciais; e c) da variabilidade estocástica tem profunda implicação para fins de validação empírica do modelo considerado.

⁶⁹ A exposição a seguir do método de efeitos elementares é baseada em Saltelli et al. (2008, p.38-39 e p.109-112). Além disso, uma referência basilar do método é Morris (1991).

Assim, como se define no emprego de derivadas parciais, o conceito adotado é o de variação local em torno de um ponto base. No entanto, por construção, considera-se para o cálculo dos efeitos elementares faixas mais amplas de variação em cada variável de entrada e não se fica restrito a um ponto amostral específico, pois se utiliza como medida de sensibilidade a média e o desvio-padrão da distribuição dos efeitos elementares calculados. Recomenda-se, ademais, sua utilização antes do emprego de métodos de decomposição da variância para a redução (triagem) do número de variáveis em modelos computacionalmente intensivos⁷⁰.

Especificamente, considerando-se um modelo genérico $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, onde Y é a variável resposta e $x_i, i=1, 2, \dots, k$, corresponde as k variáveis independentes que variam em um hipercubo unitário de dimensão k cujo espaço de cada variável de entrada x_i é dividido em p intervalos discretos. Os hiperplanos entre o espaço de variação das distintas variáveis, dividido em p níveis, contém o conjunto de todos os valores que $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ pode assumir, chamado de conjunto Ω . Define-se, portanto, o efeito elementar EE_i da variável x_i para um dado valor de \mathbf{X} pela expressão reproduzida abaixo, onde $1/(p-1) \leq \Delta \leq 1 - 1/(p-1)$. Qualquer ponto transformado por $(\mathbf{X} + e_i \Delta)$ pertence a Ω , em que e_i é um vetor do qual o i -ésimo elemento tem valor um e zero em todas os outros.

$$EE_i = \frac{[Y(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta, \dots, x_k) - Y(x_1, x_2, \dots, x_k)]}{\Delta}$$

Ao se selecionar aleatoriamente diferentes $\mathbf{X} \in \Omega$ forma-se uma distribuição finita de distintos efeitos elementares EE_i para a variável i cuja média e desvio-padrão amostral podem ser estimados. Assim, para cada variável x_i , obtém-se as medidas de sensibilidade μ , σ e μ^* que são, respectivamente, a média, o desvio-padrão e a média dos valores absolutos dos diferentes EE_i . Esse último, a média dos valores absolutos μ^* , é estimado por, para um número r de efeitos elementares calculados para a variável i , $\mu_i^* = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |EE_i^j|$ e deve ser analisado em conjunto com os outros indicadores dada a possibilidade de efeitos elementares distintos se cancelarem por possuírem sinais opostos.

⁷⁰ Conforme é procedido, por exemplo, em Dosi et al. (2017b, p.706).

Dessa forma, as variáveis de entrada do modelo podem ser ranqueadas conforme sua relevância em termos de efeitos na variável resposta Y de acordo com os valores obtidos para μ , σ e μ^* .

2.3.2 Planejamento do experimento

“[The] amount of information revealed via sensitivity analysis depends heavily on the number of sample points that are simulated and where they are located” (saltelli et al., 2008, p.109)

Entende-se por planejamento do experimento a escolha do método⁷¹ para seleção dos valores ou faixas de valores das variáveis de entrada para se rodar a simulação do modelo e suas eventuais sucessivas replicações, no caso de modelos com interação estocástica. Isto é, consiste na etapa de seleção dos n pontos experimentais relativos as n diferentes configurações do modelo que se pretende testar em relação aos k parâmetros do modelo de modo a se obter uma matriz X de dimensão $(n \times k)$ que, portanto, constitui a amostra. Assim, cada linha da matriz X , um vetor de dimensão $(1 \times k)$, representa uma observação, denominada um ponto do experimento.⁷²

A escolha do método de planejamento do experimento adequado é relevante tanto por ele ser intimamente relacionado ao procedimento de estimação do meta-modelo e, por consequência, na qualidade do indicador de sensibilidade⁷³, quanto pela consideração do custo computacional associado à realização do exercício de simulação para cada configuração do modelo⁷⁴. Ou seja, para modelos suficientemente complexos é impraticável e indesejável

⁷¹ Box e Draper (1987, p.41), por exemplo, referem-se ao planejamento do experimento como um cronograma de condições a se seguir na realização do experimento. Salle e Yildizoğlu (2014, p.510) recontam que o desenvolvimento da preocupação com o planejamento do experimento surge na década de 1920 para experimentos empíricos na agricultura cujo livro de Fisher (1935) intitulado “*Design of experiments*” é obra de referência.

⁷² Salle e Yildizoğlu, 2014, p.512 e Sanchez, 2005, p.71.

⁷³ Wang e Shan (2007, p.373). A relação entre planejamento do experimento e o meta-modelo é direta, pois independentemente do método de meta-modelagem a estimação paramétrica é realizada no conjunto de pontos do experimento e nos valores obtidos na simulação para a variável resposta. “[Where] to arrange the sample points over the experimental domain is closely related to the choice of the meta-model” (Salle e Yildizoğlu, 2014, p.512).

⁷⁴ Considerando-se, em termos gerais, que tal custo computacional é proporcional a extensão do modelo, entendido tanto pela quantidade de parâmetros quanto pela complexidade das relações encadeadas pelas formas funcionais subjacentes, além da presença de componentes estocásticos que demandam maior número de replicações do experimento de simulação. Justamente pelo custo computacional Salle e Yildizoğlu (2014, p.508) estabelecem que o “DoE [Design of Experiments] aims to minimize the sample size of parameter configurations under the constraint of their representativeness”.

definir-se um número de configurações que compreendam a totalidade do espaço paramétrico das variáveis de entrada e a sucessiva execução das respectivas simulações⁷⁵ e, tendo-se que definir uma amostra, a própria definição desses valores no que tange sua localização espacial no sentido de estarem mais concentrados ou espaçados ao longo do domínio de cada parâmetro impacta diretamente na qualidade do meta-modelo estimado e, conseqüentemente, na consistência da decomposição da variância das variáveis de interesse. Nesse sentido, o objetivo do planejamento do experimento é a seleção do menor número n de pontos do experimento de modo a possibilitar a melhor aproximação do modelo⁷⁶ por meio da meta-modelagem.

Antes de tratar-se especificamente da amostragem por hipercubo latino, cumpre aqui destacar que dentre os métodos de planejamento do experimento existentes na literatura a chamada abordagem clássica⁷⁷ alia o método fatorial ou uma medida composta dele para a amostragem à uma estimação estatística do meta-modelo, linear ou polinomial de maior grau, por meio de mínimos quadrados ordinários. O planejamento do experimento pelo método fatorial busca examinar todas as possíveis combinações entre determinado número de níveis para cada variável de entrada. Isto é, para um modelo de k variáveis, tendo-se n_i níveis estabelecidos para cada variável, $i=1,2,\dots,k$, tem-se que $N = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ é o número de todas as combinações possíveis de valores amostrais entre os níveis das variáveis.

Se o exercício de simulação, por exemplo, for executado com a amostra composta por todas as N combinações possíveis o planejamento é chamado de fatorial completo (*Full Factorial*). Por sua vez, denomina-se fatorial fracionado (*fractional factorial*) para o caso de se adotar um subconjunto menor que N para a amostra.

⁷⁵ Um método comum para a realização do planejamento do experimento é a amostragem aleatória por meio de exercícios de Monte Carlo, lançando-se mão de um alto número de simulações. Apesar de ineficiente, é uma abordagem popular tendo em vista que o tamanho adequado para a amostra e sua localização no domínio é de antemão desconhecida no caso de modelos cujas funções subjacentes são de forma funcional e complexidade desconhecida, tipicamente chamados de função ou modelo caixa-preta (Wang e Shan, 2007, p.372 e 377). Sobre a ineficiência da amostragem Salle e Yildizoğlu (2014, p.509) comentam: “A main drawback of traditional Monte Carlo sampling is typically that many sample points are redundant by falling into regions of the parameter space containing very little informative value, because sampling is performed from a uniform distribution”.

⁷⁶ Wang e Shan (2007, p.371 e 372, grifo no original) tratando do planejamento de experimento por hipercubo latino (*latin hypercube*) estabelecem que “the ‘appropriate’ sample size depends on the complexity of the function to be approximated [por meio da meta-modelagem]. In general, more sample points offer more information of the function, however, at a higher expense. For low order functions, after reaching a certain sample size, increasing the number of sample points does not contribute much to the approximation accuracy”.

⁷⁷ Toda a exposição, a seguir, da chamada abordagem clássica é baseada em: Saltelli et al., 2008, p.71-72; Sanchez, 2005, p.73-74; Salle e Yildizoğlu, 2014, p.513 e Box e Draper, 1987, p.105 e p.503.

Para, por exemplo, dois níveis para cada uma das k variáveis, onde tradicionalmente se utiliza +1 e -1 para, respectivamente, um valor baixo e um alto através de uma transformação dos valores originais, tem-se $N = 2^k$ observações para a amostra que correspondem aos cantos de um hipercubo de dimensão k cuja característica de ortogonalidade facilita a análise da variável resposta do meta-modelo estimado.

Pelo custo computacional elevado quando o número k de variáveis é grande se recomenda iniciar por um planejamento fatorial de dois níveis, do tipo 2^k , e meta-modelo polinomial de primeiro grau para, ao se constatar variáveis não influentes descarta-las e, assim, avançar, sucessivamente, para maior número de níveis e graus do polinômio estimado.

Apesar da simplicidade conceitual, o planejamento do experimento clássico pode levar a problemas na análise, pois ao definir pontos nas extremidades o método pode não captar eventuais irregularidades no interior do domínio, como em modelos com dinâmicas muito não lineares, e pode não ser praticável em modelos com muitas variáveis pelo caráter explosivo do número de simulações necessárias, visto que para m níveis e k variáveis um fatorial completo necessita de m^k observações para a amostragem.

Já pelo planejamento do experimento por hipercubo latino o valor para cada variável que compõem a amostra é selecionado individualmente ao longo de $s > 2$ segmentos ou níveis de mesmo comprimento e é preciso que s divida n , o número de pontos experimentais, ou seja igual, $s = n$.⁷⁸ Essa estratégia para composição da amostra resulta que para cada variável de entrada do modelo cada um dos seus $s = n$ níveis aparecem uma e apenas uma vez na matriz da amostra do experimento.⁷⁹

⁷⁸ Saltelli et al., 2008, p.76 e Jourdan, 2005, p.70.

⁷⁹ A forma como isso se procede é descrita por Cioppa e Lucas (2007, p.47, grifos no original) no seguinte excerto que ressalta diferentes abordagens para definição do valor em cada nível como a mediana ou um ponto aleatório do intervalo de cada segmento: "In LH sampling, the input variables are considered to be random variables with known distribution functions. For each input variable x_i , 'all portions of its distribution [are] represented by input values' by dividing its range into 'n strata of equal marginal probability $1/n$, and [sampling] once from each stratum' (McKay, Beckman, and Conover 1979). In practice, many analysts take a fixed value in each stratum (e.g., the median) rather than a random value or sample from a discrete uniform distribution (see Koehler and Owen 1996)". Ademais, Kleijnen (2015, p.199, grifo meu) elucida no trecho a seguir a origem desse tipo de amostragem: "Technically, LHS [Latin Hypercube Sampling] is a type of stratified sampling based on the classic *Latin square* designs, which are square matrixes filled with different symbols such that each symbol occurs exactly once in each row and exactly once in each column".

Concretamente, Cioppa e Lucas (2007, p.48-49), partindo do procedimento proposto em Ye (1998)⁸⁰, explicam como se constrói um hipercubo latino para o planejamento do experimento⁸¹. Seja a matriz \mathbf{M} de dimensão $q \times k$, onde q é número de níveis positivos para cada variável, supondo-se que haja quantidade igual de níveis positivos e negativos para as variáveis e $s = n$, definido por $q = (n - 1)/2$, e k é o número de variáveis de entrada do modelo, em que o número de pontos experimentais n guarda a seguinte relação com o parâmetro m : $n = 2^m + 1$, sendo $m > 1$.

A primeira coluna da matriz \mathbf{M} é formada pelo vetor \mathbf{e} cujos elementos são os primeiros q números naturais $(1, 2, \dots, q)$ dispostos em qualquer ordem e as demais colunas são obtidas pela transformação do vetor \mathbf{e} realizadas pelas matrizes de permutação A_L ⁸², da seguinte maneira, para $i = 1, 2, \dots, m - 1$ tem-se as colunas formadas por $A_i \mathbf{e}$ e as outras colunas formadas por $A_i A_j \mathbf{e}$ para $i = 1, 2, \dots, m - 2$ e $i, j = i + 1, \dots, m - 1$, conforme mostrado abaixo em que a matriz \mathbf{M} é representada de forma estilizada pelos vetores correspondentes a cada uma de suas k colunas.

$$\mathbf{M} = [[\mathbf{e}][A_1 \mathbf{e}] \dots [A_{m-1} \mathbf{e}][A_1 A_2 \mathbf{e}] \dots [A_{m-2} A_{m-1} \mathbf{e}]]$$

Por conseguinte, o hipercubo latino é formado ao se multiplicar elemento a elemento, pelo produto de Hadamard, a matriz \mathbf{M} com a Matriz \mathbf{S} , criada para adicionar sinal aos q níveis⁸³, e, assim, obtendo-se a matriz \mathbf{T} que é, por sua vez, expandida ao se adicionar uma

⁸⁰ Ye, K. Q., 1998, "Orthogonal Column Latin Hypercubes and Their Application in Computer Experiments". Cioppa e Lucas (Ibid.) apresentam a formulação proposta por Ye para construção de hipercubos latinos ortogonais e, a partir dela, modificam características da formação de duas matrizes utilizadas para criação do hipercubo para acomodar mais variáveis, embora renunciando à ortogonalidade estrita do hipercubo latino.

⁸¹ Aqui vale suscitar a observação de Dosi et al. (2022, p.11) que comenta que a amostragem de pontos do espaço paramétrico deveria mais apropriadamente ser denominada de quasi-experimento, pois as observações são selecionadas para a amostra pelas condições impostas pelo hipercubo latino, no caso específico, um hipercubo latino quase ortogonal.

⁸² Uma matriz de permutação é uma matriz quadrada que permuta as linhas quando pré-multiplicada e as colunas quando pós-multiplicada. Considerando, novamente, o número de pontos experimentais $n = 2^m + 1$, $m > 1$, para $L = 1, 2, \dots, m - 1$, define-se a matriz $A_L = I \otimes \dots \otimes I \otimes R \otimes \dots \otimes R$, onde I é a matriz identidade de ordem 2, que é multiplicada $(m - 1 - L)$ vezes, \otimes denota o produto de Kronecker e $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que é multiplicado L vezes.

⁸³ A matriz \mathbf{S} é composta pela primeira coluna com as q linhas $+1$ e as demais colunas são formadas da mesma maneira que se constrói um planejamento fatorial completo do tipo 2^{m-1} incluindo interações dois a dois, ver Sanchez (2005, p.73-74). Em específico, da segunda coluna em diante são formadas pelo vetores $a_k = \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{B}_{m-1}$, em que $\mathbf{B}_{m-k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $i \neq m - k$ e \otimes o produto de Kronecker, tendo-se, assim, após a primeira coluna de $+1$ mais $(m - 1)$ colunas a_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$, e as $\binom{m-1}{2}$ demais colunas formadas por $a_i a_j$, $i = 1, 2, \dots, m - 2$ e $j = i + 1, \dots, m - 1$.

linha de zeros, a origem, e mais q linhas com os valores dos elementos simétricos aos obtidos em T. Dessa maneira, o hipercubo latino gerado possui $(2^m + 1)$ linhas, o número de pontos do experimento, e $\left(m + \binom{m-1}{2}\right)$ colunas, o número máximo de variáveis de entrada representadas através do hipercubo latino.

As características do hipercubo latino criado, seguindo-se o descrito acima, quanto a, por exemplo, ortogonalidade⁸⁴ e propriedades desejáveis de preenchimento do espaço⁸⁵ pertinente ao domínio das variáveis são condicionadas a escolha do vetor \mathbf{e} . Isto é, um vetor \mathbf{e} cujas q entradas são dispostas em ordem aleatória gera um hipercubo latino com características aleatórias e não necessariamente desejáveis para um adequado planejamento do experimento.

Assim, o procedimento pode ser conformado de modo a criar hipercubos latinos ortogonais, no entanto eles não necessariamente possuem boas propriedades de preenchimento de espaço.⁸⁶ Ao se relaxar a exigência de ortogonalidade e se admitir hipercubos quase ortogonais é possível gerar hipercubos com boas propriedades de preenchimento do espaço que estão tabuladas e disponíveis para até 29 variáveis de entrada. Como já relatado, os autores definem um hipercubo latino como quase ortogonal quando a

⁸⁴ A ortogonalidade é desejável dado que multicolinearidade afeta a precisão dos coeficientes estimados por regressão, por exemplo. Cioppa e Lucas (Ibid., p.47) adotam duas medidas para mensurar a ortogonalidade. Uma medida é o módulo da correlação máxima entre duas variáveis x_i e x_j , máximo de $|\rho_{ij}|$ ou ρ_{max} , para todo i e j tal que $i \neq j$. Assim, uma matriz ortogonal tem o indicador $|\rho_{ij}| = 0$. A outra medida é chamada de *Condition number*, denotada por $Cond(\mathbf{X}^t\mathbf{X})$, usada com indicador de não ortogonalidade, em que uma matriz ortogonal tem $Cond(\mathbf{X}^t\mathbf{X}) = 1$. Conforme observam os autores: “An orthogonal design is desirable because it gives uncorrelated estimates of the coefficients in a linear regression model and enhances the performance of many other procedures, such as classification and regression tree models”. Sobre as medidas expostas e a definição assumida para quase ortogonalidade pelos autores: “ $\rho_{max}(\dots)$ gives the worst correlation between design matrix columns, whereas the other measure, $Cond(\mathbf{X}^t\mathbf{X})$, assesses the overall degree of nonorthogonality of the design matrix. A design matrix will be classified as *nearly orthogonal* if it has a maximum pairwise correlation no greater than .03 and a condition number no greater than 1.13” (Idem, grifos no original).

⁸⁵ Analogamente à avaliação de ortogonalidade os autores utilizam duas medidas para avaliar as propriedades de preenchimento do espaço (*space-filling properties*) da matriz com a amostra do experimento: “The two measures that we use to assess the space-filling of a design matrix are the modified L_2 discrepancy and the Euclidean maxmin distance”. “This article uses ML_2 [modified L_2] discrepancy to measure the space filling of a design, with smaller values preferred over large ones”. “[The] elements of \mathbf{d} are the Euclidean distances between the n design points, ordered from smallest to largest. (...) [A] larger value is better. A large value of d_1 means that no two points are within d_1 each other.” (Idem.).

⁸⁶ Cioppa e Lucas (idem) logram na geração de hipercubos latinos ortogonais com até $k = 67$ variáveis de entrada e $n = 4097$ pontos do experimento e conjecturam a possibilidade para quando $k > 67$ ao se manter as relações $n = 2^m + 1$ e $k = m + \binom{m-1}{2}$.

medida para correlação máxima ρ_{max} não seja maior que 0,03 e que a medida *condition number* não ultrapasse 1,13.⁸⁷

Dessa forma, os autores ao considerarem hipercubos que possuam pelo menos uma das permutações do vetor e que gera um hipercubo ortogonal chegam em hipercubos quase ortogonais com boas propriedades para o planejamento do experimento. Isso é feito avaliando-se pelas medidas de preenchimento do espaço sucessivos hipercubos quase ortogonais gerados aleatoriamente e organizando-os pelos que apresentam melhores valores para os indicadores. O problema de otimização ilustrativo do procedimento é apresentado pela expressão a seguir, onde a função g representa a soma dos valores ranqueados para as medidas Mn de distância Euclidiana e ML_2 de discrepância, sujeitos a restrição para a medida de correlação ρ_{max} e de *Condition number* $Cond(\mathbf{X}^t\mathbf{X})$ especificados abaixo.

$$\min_{\substack{S.A \\ \rho_{max} \leq 0,03 \text{ e} \\ Cond(\mathbf{X}^t\mathbf{X}) \leq 1,13}} g(Mn, ML_2)$$

Dessa feita, Cioppa e Lucas (Ibid., p.51) identificam hipercubos latinos quase ortogonais para $k = 11$ e $n = 33$, para $k = 16$ e $n = 65$ e para $k = 22$ com $n = 129$ observações. Ademais, em planilha disponível na internet⁸⁸ há, além dos hipercubos mencionados, valores tabulados para $k = 29$ e $n = 257$.

Por fim, vale adicionar que Parker (2022) propõe uma extensão das amostragens já tabuladas, como os HLQO, por exemplo, ao adicionar mais pontos experimentais n , promovendo, a título de exemplo, o aumento de graus de liberdade para estimação de meta-modelos, mantendo-se fixo o número de variáveis k . Isso é feito, sucintamente, através da permutação das colunas dos *designs* originais, empilhando-as (do inglês, *stacking*) abaixo da matriz que se busca estender e avaliando-se sua qualidade pelas medidas de preenchimento de espaço e correlação cruzada, de forma semelhante a já especificada acima.⁸⁹

⁸⁷ Ver na nota 84 o significado para ambas medidas mencionadas.

⁸⁸ Ver em Sanchez e Upton (2022), "NOLHdesigns spreadsheet". Disponível em <http://harvest.nps.edu/> [acessado em 29/03/2023].

⁸⁹ "We can extend these designs by adding more design points, with the goal of extracting more information from our experimentation. (...) The key idea is that any reordering (or permutation) of the columns of an $n \times K$ base design matrix (...) will generate a column reordered $n \times K$ design with equivalent space-filling and correlation properties" (Ibid., p.29).

2.3.3 Meta-modelagem

“The combination of this DoE [near orthogonal Latin hypercube] and this meta-model [Kriging] is very interesting because we obtain a faithful vision of the model’s behavior, and of its sensitivity to different parameter values using a considerably smaller set of simulation runs. (...) The DoE allows to choose only a small subset of parameters values to be run and, based on the model’s outcomes evaluated for those values, a kriging meta-model interpolates the model’s behavior for unsampled parameter values.” (Salle e Yıldizoğlu, 2014, p.508 e 511).

Tendo-se definido o planejamento do experimento e executado as simulações de modo a se obter os respectivos valores para a variável, ou as variáveis, resposta a etapa seguinte para a análise de sensibilidade consiste no emprego do procedimento de meta-modelagem⁹⁰.

De forma geral, o meta-modelo é uma função estimada, parametricamente ou não, voltado a representar aproximadamente a relação, entre as variáveis de entrada e a variável resposta, implícita ao modelo simulado, isto é, estima-se o meta-modelo a partir dos dados gerados pela simulação de modo a identificar analiticamente e de maneira simplificada a relação entre as variáveis.

Essa etapa é principalmente relevante para modelos cujo processo de simulação possui alto custo computacional, em que através do meta-modelo estimado não apenas se representa a relação aproximada entre os valores simulados e os respectivos valores das variáveis de entrada, mas também para qualquer combinação de valores das variáveis de entrada que não foram sujeitos ao exercício de simulação, assim representando de forma aproximada a totalidade do espaço amostral sem a necessidade árdua de se executar o

⁹⁰ Meta-modelo também é chamado de modelo substituto, do inglês *“surrogate”*, aproximação do modelo, modelo do modelo ou metodologia de superfície de resposta (*response surfaces*) e é utilizada na investigação das mais diversas áreas das ciências e empregado para variados objetivos. Independentemente do objetivo a intenção é se estimar uma função $Y = f(x_1, \dots, x_k)$, para k variáveis de entrada, que adequadamente aproxime o modelo original simulado. Como explica Kleijnen no contexto de modelos de simulação: “[we use] metamodels for the explanation of the simulation model’s behavior, and for the prediction of the simulation output for input combinations that were not yet simulated” (2015, p.180). “The final goals of metamodeling may be Validation and Verification (V&V) of the simulation model, sensitivity or what-if analysis of that model, and optimization of the simulated system” (2009, p.707).

exercício de simulação para toda e qualquer combinação de valores das variáveis de entrada.^{91, 92}

Especificamente, a estimação do meta-modelo pelo método Kriging, objeto da presente explanação, consiste em um modelo de correlação espacial criado na geoestatística e posteriormente adotado em modelos de simulação determinística e aleatória⁹³. É um processo gaussiano⁹⁴ utilizado em áreas cujos meta-modelos precisam ser ajustados a dados, gerados ou coletados, mais extensos que áreas que podem satisfatoriamente ter aproximações por regressões polinomiais de baixo grau, por exemplo.⁹⁵

O Kriging é uma técnica de meta-modelagem capaz de dar conta dos efeitos de primeira e das demais ordens de interação entre as variáveis⁹⁶ ao longo de todo domínio do experimento dada suas propriedades de interpolação espacial, explicitadas adiante, e é particularmente relevante em modelos de simulação que contenham interações não-lineares e com a possibilidade de alta sensibilidade na variável resposta para pequenas variações das variáveis de entrada.⁹⁷

Concretamente, o meta-modelo por Kriging em sua versão mais simples segue o formato da equação [a], abaixo, onde $y(x)$ é o vetor correspondente a função resposta do

⁹¹ Kleijnen, 2009, p.707, Saltelli et al., 2008, p.212 e Wang e Shan, 2007, p.371. Existe diversos métodos de estimação do meta-modelo, como, por exemplo, por meio de mínimos quadrados ordinários em uma função polinomial utilizado no método clássico de planejamento do experimento, considerado precursor desses métodos e o uso de redes neurais associada a aprendizado de máquina para aproximação do modelo (Ibid., p.372 e Jourdan, 2005, p.71).

⁹² Conforme comentam Ankenman et al. (2008, p.362, grifos no original) : “rather than executing a simulation run whenever a ‘what if’ question is posed, or trying to anticipate every scenario of interest in advance, we use the simulation to ‘map’ the performance response surfaces of interest as functions of the controllable design or decision variables”.

⁹³ A diferenciação entre simulação determinística e aleatória, retomada mais adiante, nas palavras de Kleijnen (2009, p.707, grifos no original), é explicitada no seguinte trecho: “Deterministic simulations give the same output for the same input. (...) *Random simulations* use Pseudo-Random Numbers (PRNs) inside their models, so simulations of the same input combination give different outputs (unless, the PRN streams are identical; i.e, the PRN seeds are identical)”.

⁹⁴ Suscintamente, na estatística se define um processo Gaussiano como uma coleção de variáveis aleatórias em que qualquer parte finita dela possua distribuição conjunta gaussiana, ou seja, uma distribuição normal multivariada. O processo gaussiano possui a propriedade de ser completamente especificado por meio de sua função de média $m(x) = E[f(x)]$, geralmente definida como zero, e sua função de covariância $E[(f(x) - m(x))(f(x') - m(x'))]$, onde $f(x)$ é o processo real e é utilizado como método de aproximação ao usar regressão linear, como no caso do Kriging, originário na estatística espacial com duas ou três dimensões (Rasmussen e Willians, 2006, p.13, 14 e 30).

⁹⁵ Kleijnen, 2009, p.708.

⁹⁶ O tema de ordens de interação entre as variáveis é retomado e explicado na próxima subseção 2.3.4 sobre medidas de sensibilidade como o indicador de decomposição da variância.

⁹⁷ Salle e Yildizoğlu, 2014, p.511 e 513.

meta-modelo⁹⁸, μ é o componente de tendência global, que no caso do chamado Kriging ordinário⁹⁹ é uma constante calculada como sendo a média da função resposta ao longo da amostra definida no planejamento do experimento, ou seja, $\mu = E[y(x)]$, o ruído que representa desvios locais do componente de tendência global é denotado por $M(x)$, também chamado de ruído extrínseco¹⁰⁰, que segue um processo estacionário gaussiano de média zero, e x representa os pontos referentes às variáveis de entrada do modelo de simulação¹⁰¹.

102

$$y(x) = \mu + M(x) \quad [a]$$

O formato relatado em [a] referente ao Kriging ordinário juntamente com uma concisa exposição da forma procedida para estimação de seus parâmetros é acompanhada, nos parágrafos adiante da presente subseção, pelo casos do Kriging universal, quando assume-se para a tendência global μ uma relação não constante, e do Kriging estocástico que adiciona um termo de ruído médio por conta dos desvios em relação ao valor predito.

Suscintamente, Kriging se utiliza do critério de ajuste baseado no melhor preditor linear não viesado (BLUP) para a estimação de seus parâmetros, aliado a um estimador de

⁹⁸ Para fins expositivos, daqui em diante, segue-se a notação de Kleijnen (2015) para o método Kriging, em que o x entre parênteses exprime que os valores presentes no vetor y dependem dos valores da matriz do planejamento do experimento $\mathbf{X}' = (x_1, \dots, x_n)$. A variável resposta do modelo original simulado será denotada por $w = (w(x_1), \dots, w(x_n))'$ de modo a distingui-la da variável resposta do meta-modelo y . Será, ademais, considerada somente uma variável resposta da simulação para fins de estimação do meta-modelo, no entanto é igualmente admissível a execução do mesmo procedimento Kriging separadamente para cada variável resposta de interesse do modelo simulado (Ibid., p. 708).

⁹⁹ Os casos de Kriging universal e estocástico serão abordados separadamente a seguir.

¹⁰⁰ Nomenclatura dada para diferenciar do termo ruído intrínseco, também chamado de ruído branco, presente no caso de Kriging estocástico, apresentado à frente (Kleijnen, 2009, p.709). Ankenman et al. (2008, p.363, grifo no original) comentam que se denomina intrínseco “because it comes from the nature of the stochastic simulation itself”, diferenciando-se do “extrinsic uncertainty, since it is imposed on the problem (not intrinsic to it) to aid in developing a metamodel”.

¹⁰¹ Conforme mencionado, $\mathbf{X}'_{k \times n} = (x_1, \dots, x_n)$ é a matriz do planejamento do experimento. Adota-se também a seguinte notação $x_i = (x_{i,j}), i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$. Ressalta-se que o Kriging ordinário, com média constante, não significa que o meta-modelo estimado gerará superfícies planas e, além disso, é considerado suficientemente adequado para meta-modelagem de modelos de variada complexidade (Kleijnen, 2009, p.709 e Jourdan, 2005, p.6 8 e 69). Kleijnen (2015, p.181) chega a afirmar que na prática o Kriging Ordinário é mais provável em fornecer melhores preditores do que o Kriging Universal.

¹⁰² Vale reforçar que a presente exposição do método de meta-modelagem por Kriging acompanha em grande parte a explanação de Kleijnen (2015, pp.181-189, 197, 198 e 206-208) que adota uma visão frequentista da estatística para o método Kriging, não obstante a existência de métodos bayesianos para estimar os parâmetros: “we adhere to a frequentist view in this book. Nevertheless, we mention that there are many publications that interpret Kriging models in a Bayesian way. (...) Our major problem with Bayesian approach to Kriging is that we find it hard to come up with prior distributions for the Kriging parameters” (Ibid., p.190, grifo no original).

máxima verossimilhança para o parâmetro da função de correlação adotada para o meta-modelo, conforme tratado a seguir.

Kriging calcula o preditor da função resposta do meta-modelo em relação a um novo ponto denotado por x_0 , cujas combinações de variáveis de entrada que o definem não constam no planejamento do experimento \mathbf{X} , por meio da combinação linear dos n valores observados para a variável resposta decorrentes do exercício de simulação w_i , $w = (w(x_1), \dots, w(x_n))'$,¹⁰³ e uma matriz de pesos λ , conforme descrito em [b].

$$\hat{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \lambda' w \quad [b]$$

Onde, a matriz dos pesos $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ representada por seus vetores colunas λ_i não são constantes e decrescem com a distância entre um novo ponto do experimento x_0 e um ponto x_i já contido na amostra do experimento. Assim, para determinação dos valores ótimos para os pesos explora-se o fato que o melhor preditor linear não viesado (BLUP)¹⁰⁴ minimiza o erro quadrado médio (EQM) do preditor de y , conforme disposto abaixo.

$$\begin{aligned} \text{Min EQM}[\hat{y}(x_0)] &= \text{Min } E \left[(\hat{y}(x_0) - w(x_0))^2 \right], \\ \text{s. a: } E[\hat{y}(x_0)] &= E[w(x_0)] \end{aligned} \quad [c]$$

Resolvendo-se o problema de otimização em [c], com a restrição do preditor não ser viesado¹⁰⁵, implica que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathbf{1}' \lambda = 1$, onde $\mathbf{1}' = (1, \dots, 1)$ é um vetor de dimensão n com todos elementos iguais a unidade, e, portanto, pode ser demonstrado que os pesos λ_0 ótimos são denotados pela expressão [d], abaixo, em que $\Sigma = \text{Cov}(y_i, y_{i'}), i, i' = 1, \dots, n$, representa a matriz simétrica e positivamente definida de ordem $n \times n$ com as covariâncias entre os pontos velhos, ou seja, os pontos do experimento, e $\sigma(x_0) = \text{Cov}(y_i, y_0)$ denota o vetor de

¹⁰³ Alerta-se para a notação adotada explicitada na nota 98.

¹⁰⁴ Do inglês Best Linear Unbiased Predictor (BLUP).

¹⁰⁵ Justamente devido à restrição do problema de otimização para Kriging Ordinário, em simulações determinísticas, que o método é conhecido como interpolação exata, em que para toda combinação de valores das variáveis de entrada do planejamento do experimento o preditor do meta-modelo coincide com a variável resposta obtida na simulação, isto é, $\hat{y}(x_i) = w(x_i), i = 1, \dots, n$ (Kleijnen, 2015, p.181-182).

dimensão n com as covariâncias entre pontos velhos e novos para a função resposta do meta-modelo.^{106,107}

$$\lambda'_0 = [\sigma(x_0) + \mathbf{1} \frac{1 - \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\sigma(x_0)}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}]' \Sigma^{-1} \quad [d]$$

Enfim, a partir das equações [a], [b] e [d], acima, chega-se no formato calculado para a expressão do meta-modelo, em [e], e seu respectivo erro quadrático médio (EQM), que equivale à variância do preditor, chamada de variância de Kriging, em [f], no qual o termo τ^2 denota a variância da variável resposta do meta-modelo y .¹⁰⁸

$$\hat{y}(x_0) = \mu + \sigma(x_0)' \Sigma^{-1} (W - \mu \mathbf{1}) \quad [e]$$

$$EQM[\hat{y}(x_0)] = \tau^2 - \sigma(x_0)' \Sigma^{-1} \sigma(x_0) + \frac{[1 - \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\sigma(x_0)]^2}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \quad [f]$$

Seguindo-se, por sua vez, para o caso mais geral, no chamado Kriging Universal o termo μ em [a] deixa de ser definido como uma constante e é substituído por $f(x)'\beta$, como exposto em [g], abaixo, em que $f(x)$ é um vetor de dimensão $q \times 1$ de funções pré-determinadas e β é um vetor de dimensão $q \times 1$ de parâmetros a serem estimados e $x \in \mathbb{R}^k$.

$$y(x) = f(x)'\beta + M(x) \quad [g]$$

Assim, os q valores dos coeficientes do vetor β podem ser estimados por meio de mínimos quadrados generalizados (MQG), em que ao se definir o formato das funções $F_x \equiv (f(x_1), \dots, f(x_n))'$ de ordem $(n \times q)$ pode-se chegar na expressão abaixo, onde $C = \tau^2 \Sigma$.¹⁰⁹

$$\hat{\beta} = (F_x' C^{-1} F_x)^{-1} F_x' C^{-1} W \quad [h]$$

¹⁰⁶ Reitera-se que aqui se está chamando de ponto velho aquele pertencente ao planejamento do experimento e um ponto novo, denotado por x_0 , uma combinação de valores entre o k parâmetros que não está contemplado na matriz do experimento X .

¹⁰⁷ Kleijnen, 2009, p.710 e Kleijnen, 2015, p.182-183.

¹⁰⁸ Adiciona-se que o componente de tendência μ no Kriging ordinário pelo procedimento de estimação dos parâmetros do meta-modelo, comentado acima, resulta em $\hat{\mu} = (\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'\Sigma^{-1}W$, conforme Kleijnen (2009, p.710). Quanto ao erro quadrático médio em [f], vale notar que além de ser parte do procedimento para estimação dos parâmetros ele fornece uma medida para precisão do preditor \hat{y} e também é útil para computar-se o seu intervalo de confiança (Kleijnen, 2015, p.189-190).

¹⁰⁹ O estimador $\hat{\beta}$ segue o exposto em Salle e Yıldızoğlu (2014, p.515), feito os devidos ajustes para fins de consistência da notação. Destaca-se que na prática, define-se uma função polinomial de baixo grau para a tendência do meta-modelo como, por exemplo, uma função afim ou um polinômio de segundo grau para, assim, proceder a validação do meta-modelo, conforme comentado mais adiante.

Ressalta-se que os valores ótimos de λ em [d] e, portanto, o preditor \hat{y} do meta-modelo, em [e], dependem das medidas do grau de interdependência entre as variáveis, isto é, das covariâncias ou, semelhantemente, das correlações, tanto entre os valores da variável resposta nos pontos velhos já presentes na amostra do experimento, a matriz de covariância $\Sigma = Cov(y_i, y_{i'}), i, i' = 1, \dots, n$, quanto no vetor $\sigma(x_0)$ com as covariâncias entre valores da variável resposta para pontos velhos e novos. Particularmente, o preditor \hat{y} varia apenas com $\sigma(x_0)$, o vetor de dimensão n com as covariâncias $Cov(y_i, y_0)$, pois os demais parâmetros μ e Σ são definidos pela amostra do experimento X e pelos valores para a variável resposta provenientes do exercício da simulação.¹¹⁰

Fica, portanto, patente a importância da determinação da forma da função de correlação, por consequência, a função de covariância, para se estimar o meta-modelo Kriging. Na prática escolhe-se determinada função de correlação que resulte em matrizes de covariância válidas, positivamente definidas, para processos estacionários. Por definição, em um processo estacionário as correlações dependem apenas da distância, dada por h , entre os pontos experimentais nas k dimensões, $h_{g,g',j} = |x_{g,j} - x_{g',j}|$, onde $j = 1, \dots, k$ e $g, g' = 0, 1, \dots, n$ representa tanto o ponto novo quanto os n pontos experimentais velhos.

A expressão abaixo reproduz um formato popular para a função de correlação em exercícios de simulação, em que o parâmetro θ_j representa a importância da variável de entrada j relativa à variável resposta¹¹¹, h_j é a distância mencionada acima e o expoente p_j quantifica a suavidade da função de correlação.¹¹²

$$\rho(\mathbf{h}) = \prod_{j=1}^k e^{(-\theta_j h_j^{p_j})} = e^{(-\sum_{j=1}^k \theta_j h_j^{p_j})} \quad [i]$$

¹¹⁰ Cf. Kleijnen, 2009, p.710 e Kleijnen, 2015, p.183-184.

¹¹¹ Conforme Salle e Yildizoğlu (2014, p.514) explicam, em que $g = 1, \dots, k$ representa as k variáveis de entrada do modelo de simulação: “The higher θ_g , the lower the correlation between the responses evaluated for close values of fator x_g , and the smaller the importance of fator g on the response y ”.

¹¹² Kleijnen (2015, p.185-186). Há vários tipos de processos de covariância estacionária como, por exemplo, o exponencial, em que $p = 1$, e o gaussiano, onde $p = 2$, na expressão [i]. O autor salienta que: “By definition, a stationary process has a constant mean, a constant variance, and covariances that depend only on the distance between the input combinations (or ‘points’ in \mathbb{R}^k)” (p.181, grifo no original) . “Because Kriging assumes a stationary process, the correlations (...) depend only on the distances in the k dimensions” (p.185). Ademais, Salle e Yildizoğlu (2014, p.518 e Jourdan, 2005, p.67) observam que formas mais complexas para a função de correlação podem ser escolhidas, no entanto isso requer mais observações, ou seja, mais pontos do experimento simulados, para que precisamente sejam estimados seus parâmetros.

Tendo-se definida a função de correlação resta estimar o parâmetro θ_j que é normalmente feito por meio de um estimador de máxima verossimilhança sob suposições gaussianas de forma a chegar na definição dos parâmetros do meta-modelo, representados aqui, para fins de notação, por $\hat{\psi} = (\hat{\mu}, \hat{\tau}^2, \hat{\theta}')$, isto é, os parâmetros já estimados pelos procedimentos acima resumidos para a tendência $\hat{\mu}$, para a variância da função resposta do meta-modelo $\hat{\tau}^2$ e o parâmetro $\hat{\theta}$ da função de correlação escolhida.¹¹³

Adiciona-se que os exercícios de simulação baseados em agentes aqui considerados frequentemente possuem modelos com componentes estocásticos e, portanto, exigem replicações com diferentes sementes de números pseudoaleatórios (*pseudo random number*) de modo que se obtenha as variáveis resposta da simulação em forma de médias de monte-carlo com seus respectivos intervalos de confiança. Isto é, execuções diferentes com as mesmas variáveis de entrada geram valores diferentes para a variável resposta e, portanto, é necessário replicar-se algumas vezes a simulação do modelo com as mesmas configurações das variáveis de entrada para se avaliar de forma significativa a variável resposta a cada ponto do experimento do planejamento.¹¹⁴

Nesse caso, a meta-modelagem adequada é a do Kriging estocástico, a qual se adiciona à equação [a] um termo de ruído intrínseco $\varepsilon_r(x)$, onde r denota a replicação, $r = 1, \dots, m$, e $\varepsilon_r(x)$ segue uma distribuição gaussiana com média zero e variância $Var[\varepsilon_r(x)]$. Ademais, cada observação da variável resposta do modelo w_i é apenas um valor dos muitos possíveis e, portanto, para a estimação do meta-modelo este deve ser substituído pela sua média entre as m_i replicações¹¹⁵, $\bar{w}_i = \sum_{r=1}^{m_i} w_{i,r} / m_i$, o que também ocorre para a função resposta do meta-modelo e o termo de ruído intrínseco, conforme mostrado em [j], abaixo.¹¹⁶

$$\bar{y}(x_i) = \mu + M(x) + \bar{\varepsilon}(x_i) \quad [j]$$

¹¹³ Ibid., p.187-190.

¹¹⁴ Salle e Yıldızoğlu (2014, p.518 e 519). Vale reproduzir a observação de Kleijnen (2009, p.709) sobre replicações do experimento de simulação: "Note that (by definition) replications give Independent and Identically Distributed (IID) simulation outputs, because they use non-overlapping PRN [pseudo random number] streams through the judicious selection of the vector of PRN seeds".

¹¹⁵ Analogamente, a variância de w_i pode ser calculada direto da amostra a partir das m_i replicações, $m_i > 1$, por $Var(w_i) = \frac{\sum_{r=1}^{m_i} (w_{i,r} - \bar{w}_i)^2}{m_i - 1}$. Em particular, considerando-se um número constante de replicações $m_i = m$ a expressão para a média da variável resposta w para a combinação de valores para as k variáveis de entrada i é dado por $\bar{w}_i = \frac{\sum_{r=1}^m w_{i,r}}{m}$. Cf. Kleijnen, 2009, p.709.

¹¹⁶ Cf. Kleijnen, 2015, p.207-208.

O modelo [j] se resolve da mesma forma descrita no Kriging ordinário, substituindo-se nas expressões [e] e [f] o termo referente à matriz de covariância Σ por $(\Sigma_m + \Sigma_\varepsilon)$, onde Σ_m e Σ_ε são as matrizes de covariância dos ruídos extrínseco e intrínseco, respectivamente, e o vetor com os valores para função resposta w por \bar{w} de modo a obter-se as expressões, abaixo, em que, vale repetir, $\hat{\psi} = (\hat{\mu}, \hat{\tau}^2, \hat{\theta}')$ representa os parâmetros estimados conforme já descrito.¹¹⁷ Adiciona-se que pelo segundo termo à direita da equação [k] se verifica que o preditor \hat{y} é não linear¹¹⁸.

$$\hat{y}(x_0, \hat{\psi}) = \hat{\mu} + \hat{\sigma}(x_0)'(\hat{\Sigma}_M + \hat{\Sigma}_\varepsilon)^{-1}(\bar{w} - \hat{\mu}\mathbf{1}) \quad [k]$$

$$EQM[\hat{y}(x_0, \hat{\psi})] = \hat{\tau}^2 - \hat{\sigma}(x_0)'(\hat{\Sigma}_M + \hat{\Sigma}_\varepsilon)^{-1}\hat{\sigma}(x_0) + \frac{[1 - \mathbf{1}'(\hat{\Sigma}_M + \hat{\Sigma}_\varepsilon)^{-1}\sigma(x_0)]^2}{\mathbf{1}'(\hat{\Sigma}_M + \hat{\Sigma}_\varepsilon)^{-1}\mathbf{1}} \quad [l]$$

Seguidamente a obtenção do meta-modelo por Kriging, é necessário conduzir sua validação para que se avalie a eficácia do procedimento, no que tange a conformidade da escolha tanto da função que define a tendência global quanto da função de correlação selecionada.¹¹⁹ Salle e Yıldızoğlu (2014, p.518) recomendam, para tanto, o emprego do expediente da validação cruzada e da validação externa, comentadas brevemente a seguir.¹²⁰

Na validação cruzada se estima o meta-modelo a partir de uma matriz de planejamento do experimento modificada, com pontos do experimento retirados, para, então, por meio de medidas de erro da predição, como o coeficiente de preditividade Q^2 , comparar-se os erros entre a variável resposta do meta-modelo \hat{y} e os valores reais da simulação nos pontos retirados.¹²¹

¹¹⁷ Ankenman et al. (2008, p.364) esclarecem que se nessa formulação estocástica do Kriging em [k] a incerteza ou ruído intrínseco não existisse o parâmetro $\hat{\Sigma}_\varepsilon$ desapareceria e a expressão em [k] se reduziria ao Kriging ordinário determinístico, exposto aqui em [e].

¹¹⁸ Observação igualmente válida para a expressão análoga em [e], mesmo tendo-se definido uma função linear em [b] (Kleijnen, 2015, p.189).

¹¹⁹ Wang e Shan (2007, p.372, grifo no original): “Metamodels, especially global metamodels, are to be validated before being used as a ‘surrogate’ of the computation-intensive process”.

¹²⁰ Lembrando-se que, conforme explicado acima, no Kriging estocástico a variável resposta do meta-modelo é avaliada, inclusive para validação do meta-modelo, a nível de cada observação do experimento em relação a sua média entre as replicações.

¹²¹ Wang e Shan (2007, p.372, 373) explicam sobre a variedade na validação cruzada em relação a retirada de pontos experimentais, como, por exemplo, pela separação da amostra inicial em p distintos subconjuntos para o meta-modelo ser estimado p vezes em que em cada uma delas um subconjunto é omitido e a medida de erro é calculado, chamado de “*p-fold cross validation*”, uma variação dessa abordagem, chamada de “*leave k-out*”, que em uma amostra com N observações são omitidos $\binom{N}{k}$ combinações e com os pontos experimentais restantes é estimado o meta-modelo e comparado os erros, ou o caso particular dessa abordagem quando k=1, chamado de “*leave-one-out cross validation*”. Os autores identificam que para meta-modelagem por Kriging

O chamado coeficiente de preditividade Q^2 (*predictivity coefficient*) é uma medida para a avaliação da qualidade da estimação do meta-modelo, semelhante ao R^2 em regressão linear, calculada por [m], abaixo, onde $\hat{y}(x_i)$ é o valor para variável resposta predita pelo meta-modelo, tendo-se retirada a observação i do planejamento do experimento, \bar{w} é a média global da variável resposta da simulação. Quanto mais próximo da unidade for Q^2 melhor é o meta-modelo e quanto mais próximo de zero pior é o poder preditivo de \hat{y} .¹²²

$$Q^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (w(x_i) - \hat{y}(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (w(x_i) - \bar{w})^2} \quad [m]$$

Em contrapartida, na validação externa pontos experimentais não contidos no planejamento do experimento são aleatoriamente selecionados para serem preditos por \hat{y}_0 do meta-modelo estimado a partir do planejamento do experimento original para, assim, serem comparados com a variável resposta w_0 decorrente da realização do exercício de simulação, onde o subscrito $i = 0$ representa o ponto fora da amostra do experimento.

Nesse procedimento o critério que define o melhor meta-modelo Kriging é aquele que minimiza a raiz do erro quadrático médio (REQM) do preditor, dado por [n], abaixo, onde m é o número de pontos externos na execução da validação, \hat{y} é o valor predito pelo meta-modelo e w o valor observado proveniente da simulação, em cada ponto externo $i = 1, \dots, m$.¹²³

$$REQM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (w_i - \hat{y}_i)^2}{m}} \quad [n]$$

recomenda-se definir o número k como uma proporção do tamanho da amostra e que a abordagem quando $k=1$ mostra-se insuficiente para medição da precisão do meta-modelo: “[the] leave-one-out cross validation is actually a measurement for degrees of insensitivity of a metamodel to lost information at its data points, while an insensitive metamodel is not necessarily accurate”.

¹²² Salle e Yildizoğlu (2014, p.518)

¹²³ (id.). Salle e Yildizoğlu destacam que é preferível se fiar na validação externa quando o planejamento do experimento possui um número pequeno de observações: “Both criteria [validação cruzada e externa] are broadly consistent with each other but relying on external validation is preferable when the DoE involves a small number of points because cross-validation may lead to imprecise estimations”. Wang e Shan (2007, p.373) alertam que a validação cruzada é insuficiente para avaliação do meta-modelo e, portanto, o emprego de pontos externos à amostra é essencial para a validação, utilizando-se de diferentes medidas como, a nível global, a raiz do erro quadrático médio (REQM) e a medida local de erro absoluto máximo, $MAX = \max|w_i - \hat{y}_i|$. Quanto menor o REQM e MAX mais preciso é o meta-modelo.

2.3.4 Medidas de sensibilidade

Enfim, a última etapa do procedimento da análise de sensibilidade consiste na decomposição da variância¹²⁴ que é realizada no conjunto de pontos simulados em conjunção daqueles obtidos por intermédio do meta-modelo.

Conforme exposto a seguir há medidas de sensibilidade à disposição para avaliação tanto dos efeitos de primeira, segunda e demais ordens de interação quanto para a medida do efeito total de uma variável incluindo o efeito na variável resposta de interesse decorrente de todas as eventuais interações¹²⁵.

Com efeito, decompor-se a variância da variável resposta condicionada à uma ou às demais variáveis do modelo se traduz, em palavras, como uma medida de sensibilidade orientada para a descrição da incerteza associada à variável resposta do modelo e possui variadas fórmulas de indicadores para seu cálculo na literatura.¹²⁶

Tomando-se um indicador de sensibilidade em específico e considerando-se novamente, para fins ilustrativos, o modelo genérico $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, onde Y é a variável resposta e $x_i, i=1, 2, \dots, k$, representa as k variáveis de entrada, o chamado efeito de primeira ordem de uma variável x_i em relação à Y é dado por [o], abaixo, onde S_i representa o indicador de sensibilidade em relação ao fator i , $0 \leq S_i \leq 1$ e quanto maior for esse número mais importante é o fator i , Var_{x_i} é o operador da variância de Y condicionada ao fator x_i , $Var(Y)$ é a variância não condicionada de Y e $E_{x_{\sim i}}$ é a esperança matemática entre todos os fatores exceto o fator i . Isto é, tal medida de sensibilidade de primeira ordem indica a razão entre a variância do valor esperado de Y dado a variável x_i fixada, o numerador, e a variância total de Y , o denominador.

$$S_i = \frac{Var_{x_i}(E_{x_{\sim i}}(Y|x_i))}{Var(Y)} \quad [o]$$

¹²⁴ Também chamado de ANOVA (*Analysis of Variance*), MANOVA (*Multivariate Analysis of Variance*) ou também de decomposição de Sobol' ou método de Sobol' em homenagem ao matemático responsável por uma das formalizações da técnica Ilya M. Sobol'.

¹²⁵ "Two factors are said to interact when their effect on Y cannot be expressed as a sum of their single effects" (Saltelli et al., 2008, p.161).

¹²⁶ A exposição dos indicadores a seguir tem por base Saltelli et al., 2008, p.19-21 e 29-34.

Por conseguinte, analogamente, o efeito de segunda ordem retrata a resposta em Y da interação entre as variáveis x_i e x_j , tendo-se $i \neq j$, a qual não pode ser capturada apenas pelos efeitos de primeira ordem individuais de x_i e x_j e é denotado pela expressão [p], abaixo.

$$S_{i,j} = \frac{Var_{x_i x_j} \left(E_{x_{-i,j}}(Y|x_i, x_j) \right)}{Var(Y)} \quad [p]$$

Tendo-se em conta que em um modelo com k variáveis podem existir ou não efeitos de interação entre todas elas, caso fosse preciso calcular exaustivamente todas as ordens de interação seria necessário computar, para o caso do modelo genérico acima, $S_1, S_2, \dots, S_k, S_{1,2}, S_{1,3}, \dots, S_{1,2,3}, \dots, S_{1,2,\dots,k}$, isto é, seria preciso calcular $2^k - 1$ termos.

Assim, pode-se contornar tal exercício árduo e ainda se obter todo o espectro de influência dada pela interação de determinada variável pelo cálculo do efeito total de interação S_{Ti} que afere a contribuição total de uma variável x_i para a variação da variável resposta Y por meio do indicador de sensibilidade expresso em [q], abaixo. Uma variável cujo efeito total de interação S_{Ti} seja igual a zero não é influente para o comportamento da variável resposta Y.¹²⁷

$$S_{Ti} = 1 - \frac{Var_{x_{-i}} \left(E_{x_i}(Y|x_{-i}) \right)}{Var(Y)} \quad [q]$$

Segue-se que o emprego da variância para sucintamente mensurar a sensibilidade global advém das convenientes propriedades estatísticas da variância e do fato que sua adoção independe do modelo, ou seja, serve para qualquer modelo de simulação, apesar do elevado custo computacional relativo à decomposição, que também fundamenta o esforço da escolha eficiente para o planejamento do experimento e da técnica de meta-modelagem.¹²⁸

¹²⁷ Vale destacar os seguintes trechos de Saltelli et al., 2008, sobre sensibilidade e os indicadores de decomposição de variância e interações discutidos acima: “[V]ariance-based sensitivity measures provide a theoretical framework whereby – provided one has the patience to compute all interactions terms – one can achieve a full understanding of the model’s sensitivity pattern” (p.31). “[A] good, synthetic, though nonexhaustive characterization of the sensitivity pattern for a model with k factors is given by the total set of first-order terms plus the total effects”(p.33).

¹²⁸ Saltelli et al., 2008, p.158.

Resumidamente¹²⁹, o matemático russo Ilya M. Sobol' generaliza uma forma capaz de decompor a variância da variável resposta do modelo em frações atribuídas à influência das variáveis de entrada conforme se revela na expressão destacada a seguir.

Considerando-se ainda o modelo genérico $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ cujas variáveis de entrada x_i , $i=1,2,\dots,k$, são independentes e uniformemente distribuídas em um hipercubo de dimensão k e lado unitário, a expressão para a decomposição da variância generalizada por Sobol' é descrita em [r], abaixo, onde $Var(Y)$ é a variância não condicionada da variável resposta Y , $V_i = Var_{x_i}(E_{x_{\sim i}}(Y|x_i))$ e $V_{ij} = Var_{x_i, x_j}(E_{x_{\sim i, j}}(Y|x_i, x_j)) - V_i - V_j$, assim sucessivamente, e $E_{x_{\sim i}}$ é a esperança matemática entre todos os fatores exceto o fator i .

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_{i < j}^k V_{ij} + \dots + V_{12\dots k} \quad [r]$$

Isto é, em palavras, a expressão [r] comprova que se pode exaustivamente decompor a variância da variável resposta Y pelo somatório das variâncias condicionadas a cada variável de entrada x_i e a variância condicionada às interações entre as variáveis. A partir dessa expressão pode-se calcular os indicadores de sensibilidade de primeira e demais ordens de interação tratados acima em [o], [p], e [q] e, assim, obter-se um retrato da sensibilidade global da variável resposta de interesse em relação as variáveis de entrada pertinentes ao experimento de simulação conduzido.

Adiciona-se, por fim, que Salle e Yildizoğlu (2014, p.520) sugerem, na prática, a avaliação da sensibilidade da variável resposta do modelo de simulação por meio da construção de gráficos com os indicadores de sensibilidade provenientes da decomposição para evidenciar visualmente a proporção da variância da variável resposta que é devida a variância de cada variável de entrada e seus efeitos de interação. Por exemplo, traçando-se um gráfico de barras para cada variável de entrada para, assim, evidenciar a proporção da variância decorrente de efeitos de primeira ordem e efeitos totais ou uma superfície de três dimensões com um dos eixos contendo a medida de sensibilidade e nos outros dois determinadas variáveis de entrada de interesse do experimento.¹³⁰

¹²⁹ Seguindo-se Saltelli et al., 2008, p.159-162 e Sobol', 2001, p.271-273.

¹³⁰ Nas palavras dos autores: "It is usual to plot the sensitivity of the response to each factor in order to highlight the relative magnitude of the effects of the factors, and to indicate interaction effects or non-linearities" (Idem).

2.4 DISCUSSÃO

Levantou-se nas seções acima do presente capítulo discussões teóricas afeitas a três aspectos metodológicos selecionados pertinentes a modelos de simulação baseados em agentes, designadamente a calibração, a validação e a análise de sensibilidade dessa categoria de modelos, levando em conta, para tanto, diferentes abordagens teóricas presentes na literatura.

Para a calibração, validação e verificação de modelos, buscou-se relatar de forma não exaustiva distintas propostas teóricas sujeitas a aplicação em modelos de simulação, dando-se maior destaque a procedimentos quantitativos mais recentemente desenvolvidos de modo a perfazer um panorama geral de técnicas disponíveis. Tal organização é conveniente para o contraste e contextualização à luz da prática adotada nas diferentes famílias de modelos discutidas no próximo capítulo.

A seção acima prestou-se à exposição teórica relativa à análise de sensibilidade, com ênfase ao específico procedimento adotado em publicações de duas famílias de modelos tratadas no próximo capítulo, dividindo o enfoque em três partes referentes ao procedimento, o planejamento do experimento, a meta-modelagem por Kriging e a medida de sensibilidade por decomposição da variância de Sobol'. Adiciona-se que o procedimento relatado é utilizado na de avaliação de sensibilidade em exercício de simulação conduzido no último capítulo do texto de modo a ilustrar na prática as discussões teóricas abarcadas aqui.

3 Modelos baseados em agentes e aspectos metodológicos

3.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo dividido em três seções apresenta famílias de modelos de simulação heterodoxas direcionadas à integração micro-macrodinâmica, expondo para cada família a descrição do modelo, suas formas funcionais e a prática incorporada para calibração, validação e análise de sensibilidade das simulações, temas tratados de forma teórica no capítulo anterior.

Desse modo, na próxima seção 3.2 é apresentado a família de modelos Micro Macro Multissetorial (MMM), na seção seguinte 3.3 são abordados os modelos da família *Schumpeter meets Keynes* (K+S) e, por fim, a seção 3.4 trata dos modelos Caiani et al. (2016). A última seção 3.5 conclui o capítulo.

3.2 O MODELO MICRO MACRO MULTISSETORIAL (MMM)

3.2.1 Introdução

A presente seção possui tanto o objetivo de concisamente apresentar o modelo MMM, sua origem, principais versões e suas formas funcionais, quanto em evidenciar a forma adotada em suas diferentes versões no que tange a calibração, a validação empírica e a análise de sensibilidade.

Para tanto, segue-se nas próximas duas subseções, 3.2.2 e 3.2.3, um apanhando resumido de alguns trabalhos que compõem a família do modelo MMM, sua estruturação e equações, seguindo a última versão desenvolvida em Vianna (2021). Nas seções 3.2.4 e 3.2.5 são tratados, respectivamente, a calibração e validação do modelo e, na seção 3.2.6, é discutida a implementação do procedimento de análise de sensibilidade conduzido em suas últimas duas versões disponíveis.

Observa-se que apesar da destacada relevância na presente exposição não será tratado as referências teóricas do modelo que fundamentam sua constituição e suas formas funcionais e que devem ser consultadas em Possas (2002) e Possas e Dweck (2004, p.3 – 6).¹³¹

¹³¹ Além de maior detalhamento presente em Possas (1987) e de relevantes discussões abordadas em Possas (1999).

3.2.2 Descrição do modelo

“O propósito principal desse instrumental é integrar analiticamente os determinantes da dinâmica econômica capitalista global com as características estruturais e setoriais que os condicionam e modificam, ou seja, contribuir para a proposição de esquemas analíticos necessários à integração micro-macroeconômica”. (Dweck, 2006, p.75)

O MMM em sua origem em Possas (1983), exposto de forma compacta em Possas (1984), tem como unidade de decisão de menor agregação o nível setorial e representa as relações intersetoriais por meio de “técnicas de insumo-produto formuladas originalmente por Leontief e amplamente aperfeiçoadas e utilizadas desde então” (Ibid., p.479) com o intento de representar de maneira integrada os elementos essenciais da dinâmica econômica capitalista.¹³² Para tanto, o autor ao generalizar as relações intersetoriais e de decisão propostas chega a uma equação matricial a diferenças de terceira ordem com termo independente e coeficientes variáveis cuja solução possui um componente homogêneo, responsável pelas flutuações periódicas, e um componente de solução particular responsável pela tendência na trajetória (Ibid., p.501). Ao impor hipóteses simplificadoras ao modelo Possas obtém solução analítica de modo a possibilitar a análise das trajetórias, muito embora o autor tenha especificamente advertido sobre a necessidade de utilização de simulação por computador para uma avaliação mais abrangente do modelo¹³³.

Derivando diretamente de Possas (1983 e 1984), o modelo em Possas, Dweck e Reif (2004) é submetido aos primeiros exercícios de simulação em uma versão também especificada somente a nível macroeconômico, isto é, é um modelo multissetorial em que os setores produtivos são as unidades de decisão de menor nível de agregação. O modelo é constituído por quatro classes de renda e oito setores e a demanda autônoma é restrita às exportações e aos gastos de governo.¹³⁴ As análises de simulação no modelo são voltadas para

¹³² Nas palavras do autor: “O modelo será construído pela generalização para o conjunto da economia e integração dos processos de decisão e de interação relativos à produção, geração e distribuição de renda e investimento de uma indústria ou mercado qualquer” (Possas, 1984, p.483)

¹³³ A necessidade da utilização do expediente de simulação também é observada em Possas (1983, p.186/III). “A apresentação da versão mais geral e completa do modelo terá um conteúdo formal bastante complexo, e a análise rigorosa dos resultados exigiria um considerável esforço suplementar, principalmente através de simulações” Possas (1984, p.483) e “A presença das restrições e a variabilidade dos coeficientes tornam inviável obter uma solução algébrica para a equação, exigindo um tratamento através de simulação em computador” (ibid., p.501).

¹³⁴ Por trabalhar ao nível setorial não se tendo a presença específica de firmas essa “versão preliminar do modelo impede a incorporação de estratégias das firmas, entre elas estratégias tecnológicas, estando ausente qualquer

avaliação macrodinâmica do gasto público restrito por uma política fiscal de meta de superávit primário e das exportações nas trajetórias de crescimento e ciclo de longo prazo.

É em Possas e Dweck (2004) que a firma constitui a unidade básica de decisão, um agente do modelo, e, assim, por meio das relações endógenas intersetoriais, de decisão, de geração e distribuição de renda e de investimento efetua-se a integração micro-macro. Os autores além de apresentarem minuciosamente as equações do modelo comentando sobre suas fundamentações teóricas, também expõem exercícios preliminares de simulação que destacam o comportamento cíclico do produto agregado. Ademais, já realizam experimentos retomados nas versões posteriores do modelo acerca da influência do avanço técnico na tendência de crescimento.¹³⁵

Em Dweck (2006), avança-se na formalização do MMM com maior incorporação da dinâmica microeconômica e endogenização de parte da tendência, como um instrumental de simulação centrado na interação micro-macroeconômica capaz de fornecer uma integração dinâmica entre o ciclo e a tendência, constituindo, nas palavras da autora (Ibid., p.88), “um instrumental capaz de investigar as propriedades dinâmicas das economias capitalistas com especial enfoque para uma análise do desenvolvimento econômico”.

Análises do modelo semelhantes as efetuadas em Dweck (2006) são realizadas em Possas e Dweck (2011), destacando os mecanismos de determinação do crescimento e os efeitos dinâmicos, a nível setorial e distributivo, por exemplo, de cada componente autônomo da demanda, mostrando-os separadamente ao se executar experimentos de simulação com diferentes especificações que isolam os efeitos da inovação de processo e produto, dos gastos de governo e das exportações.¹³⁶

forma endógena de investimento autônomo” (Ibid., p. 8). Interessantemente, o setor produtivo dessa versão do modelo é formado por “oito setores: dois de bens de consumo (durável e não-durável); três de bens intermediários (químico, metalúrgico e outros); um de bens de capital; um agrícola; e um de serviços”, no sentido de permitir “a agregação dos dados do IBGE de forma a serem incorporados no modelo” (Ibid., p.16).

¹³⁵ Adiciona-se que as simulações são realizadas por meio do *software Laboratory of Simulation Development* (LSD) nessa versão (Ibid., p.10), prática que remanesce também nas versões mais recentes do modelo.

¹³⁶ Nas palavras dos autores: “Nas simulações que seguem, o foco é posto sobre a ligação entre as trajetórias macroeconômicas e, em especial, as inovações. O ponto central é explicar o mecanismo causal implícito no modelo que determina o crescimento econômico a longo prazo. Procura-se explicar como a mudança tecnológica e inovativa em geral, ao lado dos demais componentes de demanda agregada, influencia a tendência de crescimento, destacando o papel de cada um dos componentes de demanda, em particular dos determinantes do investimento, e da atuação sobre estes de uma restrição financeira” (Possas e Dweck, 2011, p.11).

Mais recentemente, Dweck, Vianna e Barbosa (2020) utilizam uma versão do MMM com o bloco referente ao governo com determinadas reformulações de modo a analisar a política fiscal pela especificação de diferentes regras fiscais que são testadas no modelo em relação aos seus efeitos em variáveis agregadas como o PIB, em termos de flutuação e crescimento de longo prazo. Dados os experimentos de simulação os autores concluem que regramentos que impõem maior restrição aos gastos de governo acabam por apresentar uma consolidação fiscal de caráter autodestrutivo em oposição ao pensamento tradicional de austeridade fiscal expansionista.

Em Possas, Dweck e Vianna (2020) é realizado em uma versão simplificada do modelo testes análogos aos conduzidos em Dweck (2006) e em Possas e Dweck (2011) sobre a relação entre avanço técnico e crescimento e, para tanto, introduzem um novo procedimento de calibração, tratado aqui na subseção 3.2.4, além do expediente de análise de sensibilidade utilizado para avaliação da robustez dos resultados dinâmicos e dos testes especificamente realizados.

O MMM é ampliado em Vianna (2021) ao desenvolver, em especial, o setor financeiro e pela adoção de alguma das especificações para o governo desenvolvidas em Dweck, Vianna e Barbosa (2020), além de reservar especial atenção para a manutenção da consistência entre fluxos e estoques (SFC). Os experimentos de simulação conduzidos nessa versão no sentido de investigar o papel da política monetária culminam na conclusão que a abordagem tradicional do regime de metas de inflação propalada pelo novo consenso macroeconômico é insuficiente para o controle do nível de inflação determinada por aspectos estruturais da economia, principalmente aqueles ligados ao setor externo. O modelo, seus agentes, decisões e inter-relações são concisamente descritas nos parágrafos restantes da presente seção com base nessa versão desenvolvida em Vianna (2021, p.70-72).

O modelo Micro Macro Multissetorial é construído de modo a prover uma descrição teórica geral de uma economia com pelo menos três setores produtivos, o setor de bens de consumo composto por F^c firmas, o setor de bens intermediário com F^{in} firmas e um setor de bens de capital com F^k firmas. Os agentes do modelo são as $F = F^c + F^{in} + F^k$ firmas dos três setores, as H classes de renda, os B bancos e os blocos do governo e do setor externo.

As firmas tomam decisões quanto à produção, mark-up e preço, investimento e busca tecnológica. Para produzir a firma necessita de bens intermediários, fixados em função do

coeficiente técnico de insumos, capital instalado, que delimita a capacidade produtiva, e trabalho empregado em quantidades determinadas pela produtividade do trabalho incorporada aos bens de capital instalados na firma e pelo nível de produção. Essa última, a quantidade em termos reais da produção, depende do nível esperado de encomendas e é restrita pela capacidade produtiva e pelo estoque de insumos da firma.

A decisão de investimento da firma é relacionada tanto à expansão da capacidade produtiva quanta à reposição, dada a depreciação do capital, obsolescência ou modernização. O investimento em expansão da capacidade é realizado de modo que a capacidade produtiva instalada ajustada ao grau de utilização desejado comporte as encomendas esperadas futuras. Já o investimento em reposição ocorre após sucesso da busca tecnológica de processo da firma, em que é necessário a aquisição de novo capital seguindo-se uma regra de *payback* para implementação da nova fronteira de produtividade do trabalho alcançada pelo avanço técnico.

A busca tecnológica, que depende dos recursos direcionados para P&D, pode ser tanto em relação ao processo de produção quanto à qualidade do produto produzido e, em ambos os casos, pode se dar por meio de inovação ou de imitação. O sucesso inovativo ou imitativo no caso de processo pode levar a uma fronteira superior de produtividade do trabalho e a níveis superiores de qualidade do produto que pode possibilitar ganhos de competitividade.¹³⁷

A renda funcional gerada na decisão do nível de produção de todas as firmas se torna renda pessoal por meio de uma matriz de coeficientes de apropriação de renda que distribui lucros e salários, incluindo os benefícios, entre as H classes de renda¹³⁸. O consumo das classes de renda, por seu turno, é determinado, na parcela induzida, pela propensão a consumir da classe em relação a renda disponível média e pela parcela referente ao consumo autônomo da classe.

Tanto as classes de renda quanto as firmas estão sujeitas à restrição financeira. As firmas contam com seus lucros retidos, os fundos em contas de depósitos e empréstimos, de curto prazo para eventuais perdas líquida e de longo prazo em períodos de investimento, como recursos para seus gastos. As classes de renda também podem contar com recursos

¹³⁷ Adiciona-se que o consumo autônomo cresce com a variação da qualidade do produto.

¹³⁸ A forma mais simplificada seria uma matriz 2x2, isto é, duas classes de renda, uma recebendo exclusivamente salários e outra lucros.

líquidos em conta de depósitos e empréstimos de curto prazo para financiar decisões de consumo.

Desta feita, a produção agregada em relação a todas as firmas gera demanda endógena por insumos ao setor de bens intermediários, assim como as decisões agregadas de investimento promovem demanda ao setor de bens de capital e o consumo agregado das classes de renda acarreta demanda ao setor de bens de consumo.

Ademais, o governo e o setor externo também demandam bens aos três setores produtivos. O governo recebe impostos diretos e indiretos e emite dívida pública, paga salários aos funcionários públicos, benefícios de seguro desemprego, juros da dívida e tem seus gastos restringidos por regras fiscais. Ao setor externo, como dito, exporta-se bens dos três setores e parte dos gastos das firmas e das classes de renda é direcionado para importações.

Os bancos que constituem o setor financeiro emprestam para as firmas e para as classes de renda seguindo volumes máximos individualizados por cliente e por banco dado por regra regulatória e percepção quanto à fragilidade financeira, pagam taxas de juros das contas de depósito, distribuem lucros às classes de renda, além de receberem os juros e o principal dos empréstimos concedidos e os juros de títulos da dívida pública.

3.2.3 As equações do modelo

A descrição acima buscou condensar textualmente as relações dinâmicas estabelecidas entre os agentes e os setores no modelo¹³⁹. Continua-se nas subseções adiante sua apresentação por meio da descrição de suas formas funcionais subjacentes, primando-se o quanto possível pela concisão. Para tanto, ainda seguindo como referência a última versão formulada em Vianna (2021), assume-se aqui a mesma notação adotada pelo autor para os parâmetros e as equações, denotadas ao nível de seus respectivos agentes e tempo ao invés da adoção de notação matricial, conforme consta nas publicações anteriores do modelo¹⁴⁰.

¹³⁹ Outra interessante forma de expor visualmente essas relações, vale a mencionar, é encontrada em Vianna (2021, p.71) que apresenta a figura 3.1 ilustrando estilizadamente as relações entre setores e agentes do modelo, com distinção visual entre fluxos reais e financeiros.

¹⁴⁰ Seguindo a conformação e exposição original do modelo macroeconômico multisetorial por Possas (1984, p.483 e 484) que parte das técnicas de insumo-produto para formalização das relações intersetoriais: “A exclusão de qualquer agregação além do mínimo razoável – o nível de indústria ou mercado para a produção e o investimento, as categorias funcionais ou sociais para a formação e apropriação de rendimentos – torna

Optou-se, contudo, pela ordem de exposição das equações de maneira distinta¹⁴¹ e pela omissão de algumas formas funcionais, em específico do setor financeiro.

Há, vale ressaltar, nessa versão uma destacada preocupação em relação a consistência entre fluxos e estoques, comumente conhecida como agenda SFC¹⁴² cuja discussão não será abordada. Outro recurso fundamental para compreensão das relações dinâmicas do modelo é a sua linha do tempo ou cronologia de eventos onde é descrita a sequência de eventos ocorrida em cada período discreto de tempo, isto é, a ordem em que são calculadas as variáveis a cada período.

Resumidamente, no início de cada período discreto de tempo são fixadas todas as taxas de juros para o período, os custos da firma são recalculados e as decisões quanto ao mark-up e preço são tomadas. Em seguida, decisões quanto a produção são realizadas e as demandas setoriais externa, de governo e o consumo das classes de renda são determinadas, nessa ordem, e, portanto, a demanda efetiva às firmas. Após, as vendas de cada firma são determinadas, os impostos indiretos são pagos, recursos em pesquisa e desenvolvimento (P&D) são alocados, juros são pagos e recebidos e lucros são determinados e distribuídos. A seguir, as decisões de investimento são tomadas e após as condições financeiras serem avaliadas o investimento efetivo é feito. Por fim, ocorrem entradas e saídas de firmas e a renda é determinada e distribuída.

Vale adicionar que apesar de sua grande extensão em número de equações¹⁴³, entende-se que é necessário expô-las aqui não apenas à guisa de comparação com as outras famílias de modelos abordadas, mas também porque a calibração, as propriedades resultantes do exercício de simulação, a validação e a análise de sensibilidade de qualquer

inevitável o emprego do cálculo matricial, à custa da simplicidade e alguma transparência analítica, mas em benefício, espera-se, do realismo e rigor da abordagem”.

¹⁴¹ Vianna (2021, p.78) apresenta as equações seguindo a ordem estabelecida pela linha do tempo de etapas principais subjacentes ao modelo. Aqui a ordem de apresentação segue proximamente aquela disposta no resumo das equações feito em Dweck, Vianna e Barbosa (2020, p.202-207), similar ao adotado em Dweck (2006, p.97-122).

¹⁴² SFC se refere a *Stock-Flow Consistency*, em inglês, e a consistência entre fluxos e estoques é observada por meio do uso de balanços contábeis, conforme Vianna (2021, p.68): “the MMM model is a SFC model, as it possesses a complete and coherent accounting system. Firms and income classes have balance sheet, and the model keeps track of the financial-real transactions undertaken by agents and the flows of real-financial stocks they create”.

¹⁴³ São expostas e comentadas nas subseções a seguir 106 equações de modo a descrever comportamentos e interações dos distintos agentes e agregações do modelo.

modelo baseado em agentes somente fazem sentido à luz especificamente de suas formas funcionais simuladas.¹⁴⁴

Ademais, observa-se, os exercícios de simulação efetuados no modelo são executados através do *software* LSD¹⁴⁵ em que todas as suas equações são codificadas na linguagem do programa, além das demais regras de comportamentos e interações entre os agentes, definição das condições iniciais e especificações pertinentes ao funcionamento adequado no modelo de simulação.

Segue-se, assim, a apresentação das equações do modelo separadamente em subseções referentes a produção, o investimento e a busca tecnológica, os custos, mark-up e preço, o consumo das classes de renda, demanda efetiva e parcela de mercado, as vendas e o lucro, o governo, o setor externo e o setor financeiro, a geração e apropriação de renda e a entrada e saída de firmas.

3.2.3.1 A produção efetiva da firma

A produção efetiva de cada firma a cada período de produção t , unidade básica de tempo no modelo, denotado por $x_{i,t}^*$, depende das encomendas esperadas $o_{i,t}^e$ somada a uma parcela delas, σ_i , voltada a manutenção desejada de estoques de bens produzidos, descontado do estoque de bens finais já produzidos do período anterior, $inv_{i,t-1}^s$, conforme explícito na expressão (1), abaixo. O nível de produção efetiva é restrito pela capacidade produtiva instalada, denotado por $x_{i,t}^p$ e pelo estoque existente de bens intermediários, conforme representado pela desigualdade exposta em (1.2), em que $inp_{i,t-1}^s$ é o estoque de insumos e α_i é o coeficiente técnico de insumos de produção¹⁴⁶.

¹⁴⁴ Além disso, é oportuno que se tenha uma versão em português expondo as formas funcionais do modelo, aproveitando-se que para os fins aqui presentes ter-se um texto de tamanho reduzido não é prioritário.

¹⁴⁵ Como já mencionado, O LSD (*Laboratory for Simulation Development*) é uma plataforma para se escrever modelos e executar simulações que é gratuitamente disponibilizado sob licença pública geral GNU e pode ser obtido pelo endereço <https://github.com/marcov64/Lsd>.

¹⁴⁶ É em Dweck, Vianna e Barbosa (2020, p.202) que explicitamente se coloca como restrição à produção da firma, além da capacidade produtiva, o nível em termos de produtos correspondente ao estoque de insumos acumulados até o período anterior, muito embora ainda utilize a denominação produção planejada (ou programada) presente nas versões anteriores do modelo, como originalmente em Possas (1984, p.484), Possas e Dweck (2004, p.10 e 12), Dweck (2006, p.97 e 99) e Possas e Dweck (2011, p.7) em que a restrição de disponibilidade de insumos aplicava-se a produção planejada restringindo-a a parcela correspondente ao valor mínimo da razão entre os insumos disponíveis e os necessários ao nível de produção planejado. A diferença, evidentemente, é apenas em termos de exposição do modelo ao integrar-se a restrição de insumos à equação de produção efetiva, abandonando-se a separação lógica entre uma etapa de produção planejada e outra de

A decisão de produção, dessa forma, é voltada tanto para atender o nível de encomendas esperadas quanto para a manutenção dos estoques, seguindo uma proporção fixa das encomendas, em nível seguro de forma a poder lidar com flutuações de demanda inesperadas.¹⁴⁷

$$x_{i,t}^* = o_{i,t}^e(1 + \sigma_i) - inv_{i,t-1}^s \quad (1)$$

$$0 < x_{i,t}^* < x_{i,t}^p \quad (1.1)$$

$$0 < x_{i,t}^* < \frac{inp_{i,t-1}^s}{\alpha_i} \quad (1.2)$$

Cada firma define o nível de produção a partir das encomendas esperadas, $o_{i,t}^e$, que, por sua vez, são definidas por uma regra de expectativa extrapolativa baseada nas encomendas do período anterior, adicionadas a variação observada nas encomendas ajustada a um parâmetro expectacional γ_i , conforme consta na expressão (2), onde $o_{i,t-1}$ são as encomendas do período t-1.

$$o_{i,t}^e = o_{i,t-1} + \gamma_i \left(\frac{o_{i,t-1} - o_{i,t-2}}{o_{i,t-2}} \right) \quad (2)$$

A expressão para produção exibida acima se aplica aos setores de bens de consumo e de bens intermediários. Para a produção efetiva das firmas, $x_{i,t}^*$, do setor de bens de capital, especificamente, o nível é definido com base nas encomendas efetivas recebidas, que levam a quantidade Γ de períodos de produção, chamado de período de investimento, para produção, instalação e operação do bem de capital encomendado. Assim, conforme disposto em (3), em cada período de produção uma parcela das encomendas passadas é produzida, em que $o_{i,t-b}$ são encomendas da firma i de bens de capital no período t-b.

$$x_{i,t}^* = \sum_{b=1}^{\Gamma} \frac{o_{i,t-b}}{\Gamma} \quad (3)$$

Para produção as firmas necessitam de insumos produzidos pelo setor de bens intermediários que são demandados no período corrente para serem utilizados no próximo período de produção. Assim, a demanda por bens intermediários da firma i, denotado por

produção efetiva: "Actual production is planned production subject to the intermediate goods constraint" (Possas e Dweck, 2004, p.17).

¹⁴⁷ Possas e Dweck, 2004, p.10. A produção da firma segue a mesma equação disposta na versão originária em Possas (1984, p.484), onde se observa que a "equação simplesmente afirma que a produção visa atender as vendas esperadas e o acréscimo de estoques desejados".

$inp_{i,t}^d$, segundo definido em (4), depende também de uma regra para expectativas quanto às encomendas, descontado do estoque corrente de insumos e dos insumos necessários para a produção corrente, em que α_i é o coeficiente técnico dos insumos da firma i e $o_{i,t-1}$ são as encomendas efetivas em $t-1$.

$$inp_{i,t}^d = \alpha_i \cdot x_{i,t}^* \left(1 + \gamma_i \left(\frac{o_{i,t-1} - o_{i,t-2}}{o_{i,t-2}} \right) \right) - (inp_{i,t-1}^s - \alpha_i \cdot x_{i,t}^*) \quad (4)$$

3.2.3.2 A decisão de investimento

Conforme mencionado acima em relação a expressão (3), o período de investimento, denotado por Γ representa a quantidade de períodos de produção em que a firma realiza suas decisões de investimento¹⁴⁸. Desse modo, individualmente para cada firma a cada Γ períodos é tomada a última decisão da cronologia de eventos do modelo¹⁴⁹ que concerne o investimento, tanto em expansão da capacidade produtiva quanto em gastos para a reposição do bem de capital¹⁵⁰.

O investimento desejado em expansão de capacidade, denotado por $(x^p)_{i,\Gamma}^d$ na equação (5), abaixo é determinado de acordo com a expectativa quanto as encomendas no período de investimento $\Gamma + 2$, $o_{i,\Gamma+2}^e$, ajustado pelo grau de utilização da capacidade desejado, pcu_i^d , descontando-se da capacidade produtiva corrente no período de investimento Γ , representado por $x_{i,\Gamma}^p$.¹⁵¹

As encomendas esperadas descritas em (6), por sua vez, seguem regra análoga à adotada em (2), a qual se projeta o nível de encomendas esperadas ao fim do período de

¹⁴⁸ Ressalta-se, conforme explica Possas (1984, p.493), que é definido como o período de investimento “o intervalo de tempo de referência como o período de gestação ou maturação do investimento em cada setor, isto é, o intervalo entre a decisão de investir e a disponibilidade da nova capacidade produtiva para entrar em operação”.

¹⁴⁹ As etapas em cada período discreto de tempo que representam a ordem que os agentes tomam suas decisões, em inglês, *timeline of events*, já resumidamente comentados acima.

¹⁵⁰ Admite-se no modelo que a reposição do capital é devida à depreciação física e obsolescência tecnológica, essa, no caso, devido a ocorrência de um sucesso inovativo ou imitativo associado ao gasto em pesquisa e desenvolvimento (P&D) que pressupõe para efetivação da nova fronteira de produtividade do trabalho alcançada um gasto em forma de investimento autônomo em um novo bem de capital.

¹⁵¹ A capacidade produtiva existente no período de investimento Γ , $x_{i,\Gamma}^p$, vale notar, já considera a reposição do capital depreciado até esse referido período. Nas palavras de Vianna (2021, p.110) sobre esse termo na equação (5): “the existing productive capacity must be subtracted, already discounting the physically depreciated capital goods of the last investment period, and the productive capacity which will depreciate in the next investment period while new capital goods do not arrive”.

investimento $\Gamma + 2$,¹⁵² a partir da média de encomendas observadas no período de investimento anterior, $\bar{o}_{i,\Gamma-1}$, adicionado a variação na média das encomendas ajustadas pelo parâmetro que reflete as expectativas da firma γ_i .¹⁵³

Dessa forma, em termos monetários, o gasto devido ao investimento em expansão da capacidade desejada, representado por $x_{i,\Gamma}^d$ em (7), abaixo, é calculado pela multiplicação do investimento desejado em expansão da capacidade pela razão capital produto da firma, β_i , e por $\bar{p}_{k,t}$ que representa a média do preço dos bens de capital do setor k.

$$(x^p)_{i,\Gamma}^d = \frac{o_{i,\Gamma+2}^e}{pcu_i^d} - x_{i,\Gamma}^p \quad (5)$$

$$o_{i,\Gamma+2}^e = \bar{o}_{i,\Gamma-1} + 2\gamma_i \left(\frac{\bar{o}_{i,\Gamma-1} - \bar{o}_{i,\Gamma-2}}{\bar{o}_{i,\Gamma-2}} \right) \quad (6)$$

$$x_{i,\Gamma}^d = \beta_i \cdot (x^p)_{i,\Gamma}^d \cdot \bar{p}_{k,t} \quad (7)$$

Já o gasto desejado para investimento em reposição ou modernização de bens de capital advém do sucesso do esforço para avanço técnico da firma, apresentado mais a diante, seja em inovação ou imitação. Isto é, o número desejado de capitais da firma i para reposição, denotado por $k_{i,\Gamma}^d$ em (8), a seguir, é definido seguindo-se uma regra de tempo de retorno do valor gasto (*payback period rule*), exposta em (9), de forma a definir o investimento desejado em reposição $ri_{i,\Gamma}^d$, ao multiplicar o número desejado de capitais para reposição pelo preço médio praticado no setor de bens de capital $\bar{p}_{k,t}$.

Assim, para se implementar nova fronteira de produtividade do trabalho alcançada no esforço de P&D é necessário a aquisição de novo bem de capital¹⁵⁴ no sentido que após o sucesso do avanço técnico a firma vai desejar repor aqueles bens de capital cuja produtividade

¹⁵² Isto é, considerando os investimentos efetuados no próximo período de investimento $\Gamma + 1$ e sua subsequente produção, instalação e operação no período de investimento $\Gamma + 2$.

¹⁵³ O parâmetro de expectativas γ_i é multiplicado por 2, na equação (6), pois o esse mesmo parâmetro é aplicado à variação da média das encomendas no período $\Gamma + 1$ e no período de investimento $\Gamma + 2$, conforme similarmente é procedido em Dweck (2006, p.108).

¹⁵⁴ Na presente versão do modelo, exposta em Vianna (2021), apenas o sucesso do esforço de inovação ou imitação de processo requer novo bem de capital para efetivação da produtividade do trabalho alcançada, distintamente das versões anteriormente consolidadas em que também há a necessidade, além da utilização de trabalho, da aquisição de novo bem de capital para se implementar um sucesso no avanço da qualidade do produto, entendida, assim, como um esforço em diferenciação do bem produzido (Ibid. p.106, nota 16). Ademais, nas versões mais recentes, apenas em Possas, Dweck e Vianna (2020, p.4, nota 4) é indicado a presença de tal simplificação quanto a ausência de investimento autônomo na inovação ou imitação de produto, enquanto que em Dweck, Vianna e Barbosa (2020) não fica explícito pelo texto a adoção de tal simplificação.

corrente¹⁵⁵ seja suficientemente menor que a produtividade alcançada de modo que a razão entre o custo já considerando o adicional pelo financiamento do bem de capital novo a uma taxa de juros de longo prazo, no numerador, e a extensão da redução do custo associado ao ganho de produtividade, no denominador, seja menor que determinado número de períodos pb_i , conforme exposta na regra de *payback* em (9), onde $ir_{i,t}^{lt}$ representa a taxa de juros para crédito de longo prazo, $wr_{i,t}$ é o salário nominal, $\phi_{i,t}^p$ é a produtividade do trabalho potencial obtido pelo P&D e $\phi_{k,t}$ é a produtividade do trabalho corrente de cada bem de capital k .

$$ri_{i,t}^d = k_{i,t}^d \cdot \bar{p}_{k,t} \quad (8)$$

$$\frac{\bar{p}_{k,t} (1 + ir_{i,t}^{lt})}{\frac{wr_{i,t}^p}{\phi_{i,t}^p} - \frac{wr_{i,t}}{\phi_{k,t}}} < pb_i \quad (9)$$

Desta feita, o montante desejado de gastos em investimento, simbolizado por $i_{i,t}^d$ em (10), é formado pela soma do gasto desejado em expansão da capacidade produtiva, $xi_{i,t}^d$, com o gasto desejado em reposição de capital $ri_{i,t}^d$, ambos destrinchados pelas equações apresentadas acima.

$$i_{i,t}^d = xi_{i,t}^d + ri_{i,t}^d \quad (10)$$

Finalmente, o investimento efetivo da firma é determinado ao se confrontar seus gastos desejados em investimento $i_{i,t}^d$ com a disponibilidade de recursos da firma dada sua restrição financeira. Assim, o montante de recursos que a firma tem a sua disposição, designado por $f_{i,t}$ em (11), compreende a quantia de recursos internos da firma, $f_{i,t}^i$, com $l_{i,t}^*$ que representa os empréstimos efetivos concedidos à firma¹⁵⁶.

Os recursos internos, especificados em (12), são compostos pela soma dos lucros retidos com o estoque de depósitos em conta bancária, descontando-se a proporção do estoque de capital relativo à preferência pela liquidez da firma e as amortizações referentes

¹⁵⁵ Vale frisar que o bem de capital instalado sofre depreciação física perdendo produtividade ao longo de seu tempo de vida útil. Vianna (2021, p.112) comenta que o tempo médio de vida útil estabelecido no modelo é de dez períodos de investimento. Ademais, é imposto (Ibid., p.231) como condição inicial para calibração do modelo que a cada período de investimento um bem de capital deve ser repostado devido à depreciação e que os períodos de investimento são regularmente distribuídos entre as F firmas de modo que cada período de produção é período de investimento para alguma das F firmas.

¹⁵⁶ Deve-se observar que as firmas priorizam a utilização de recursos internos ante a contração de dívida junto aos bancos para o gasto em investimento, conforme comenta Vianna (2021, p.112). Será separadamente tratado na subseção 3.2.3.11 sobre o sistema financeiro a concessão de crédito para as firmas pelos bancos.

aos empréstimo contratados. A parcela relacionada à preferência pela liquidez é restrita, na desigualdade (12.1), superiormente pela soma dos lucros retidos com o estoque de depósitos em banco. Em ambas expressões denota-se por $pr_{i,t}^{ret}$ os lucros retidos, $dep_{i,t-1}^s$ é o estoque de recursos do períodos anterior depositados em conta bancária, $lp_{i,t}$ é o parâmetro referente à preferência pela liquidez da firma¹⁵⁷, $k_{i,t-1}$ é o estoque de capital da firma, am_l é a quantia fixada relativa à amortização de cada empréstimo l e L é o número de empréstimos efetivamente concedidos à firma.

$$f_{i,t} = f_{i,t}^i + l_{i,t}^* \quad (11)$$

$$f_{i,t}^i = pr_{i,t}^{ret} + (dep_{i,t-1}^s - lp_{i,t} \cdot k_{i,t-1}) - \sum_{l=1}^{L_{i,t}} am_l \quad (12)$$

$$0 \leq lp_{i,t} \cdot k_{i,t-1} \leq pr_{i,t}^{ret} + dep_{i,t-1}^s \quad (12.1)$$

Considerando que pela restrição financeira da firma o montante de recursos disponíveis $f_{i,t}$ pode ser menor que o investimento desejado $i_{i,t}^d$, é instituída uma ordem de priorização dos gastos, em que o investimento em expansão da capacidade produtiva tem preferência em relação ao investimento em reposição de capital que somente é realizado se restarem recursos.

As equações (13) e (14) refletem essa priorização quanto ao gasto para investimento, onde $xi_{i,t}^*$ representa o gasto efetivo em investimento de expansão da capacidade e $ri_{i,t}^*$ o gasto efetivo em investimento de reposição. Dessa maneira, a variável $i_{i,t}^*$ na expressão (15) denota o total do gasto efetivo com investimento que abrange as duas formas mencionadas acima.

$$xi_{i,t}^* = \min (xi_{i,t}^d, f_{i,t}) \quad (13)$$

$$ri_{i,t}^* = \min (ri_{i,t}^d, (f_{i,t} - xi_{i,t}^*)) \quad (14)$$

¹⁵⁷ A preferência pela liquidez, representado por $lp_{i,t}$, da firma é reproduzido a seguir e tem formato análogo a determinação da preferência pela liquidez das classes de renda, exposta na nota 169. Na expressão abaixo ψ_i^{lp} é a parâmetro de ajuste da preferência pela liquidez da firma, $pr_{i,t-1}^{nt}$ são os lucros líquidos, $dr_{i,t-1}$ é a taxa de endividamento da firma e $dr_{i,t-1}^{max}$ é a taxa de endividamento máximo:

$$lp_{i,t} = \begin{cases} lp_{i,t-1} - \psi_i^{lp} & \text{se } \frac{pr_{i,t-1}^{nt} - pr_{i,t-1-\Delta}^{nt}}{pr_{i,t-1-\Delta}^{nt}} > 0 \text{ e } dr_{i,t-1} < dr_{i,t-1}^{max} \\ lp_{i,t-1} + \psi_i^{lp} & \text{se } \frac{pr_{i,t-1}^{nt} - pr_{i,t-1-\Delta}^{nt}}{pr_{i,t-1-\Delta}^{nt}} < 0 \text{ e } dr_{i,t-1} > dr_{i,t-1}^{max} \\ lp_{i,t-1}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$i_{i,t}^* = r i_{i,t}^* + x i_{i,t}^* \quad (15)$$

Esse montante efetivamente gasto para investimento equivale em termos reais à variável $i_{i,t}^r$, descrita em (16), onde $\bar{p}_{k,t}$ é o preço médio do setor dos bens de capital no período.

$$i_{i,t}^r = \frac{i_{i,t}^*}{\bar{p}_{k,t}} \quad (16)$$

3.2.3.3 O avanço técnico em processo e produto

Conforme comentado acima em relação especificamente aos gastos em reposição de capital, as firmas na busca de uma fronteira de produtividade do trabalho¹⁵⁸ superior a corrente se dedicam ao esforço de avanço técnico do processo de produção, além de também se empenharem para alcançar qualidade do bem produzido superior a atual para lograrem ganhos de competitividade.

Para tanto, as firmas alocam parte da receita de vendas para o gasto em Pesquisa e Desenvolvimento (P&D) que, na versão aqui exposta do modelo, é direcionado ao pagamento de trabalhadores voltados ao esforço inovativo ou imitativo¹⁵⁹. Assim, na expressão (17), $rnd_{i,t}$ é o gasto com pesquisa e desenvolvimento da firma i , $re_{i,t}$ é a receita da firma, tr_i é a alíquota de imposto e λ_i é a proporção da receita direcionada a P&D.

$$rnd_{i,t} = re_{i,t}(1 - tr_i)\lambda_i \quad (17)$$

Dessa forma, o montante $rnd_{i,t}$ tem uma parte empenhada na busca tecnológica por imitação e a outra parte direcionada para o avanço por inovação. Seguindo-se um processo em dois estágios, o primeiro concernente a um sorteio aleatório e o segundo dedicado à definição da fronteira alcançável, análogo ao proposto por Nelson e Winter (1982)¹⁶⁰, a busca tecnológica tanto em termos de processo quanto de produto segue, como já comentado, a distinção do esforço por imitação, em que a fronteira que se busca imitar é a máxima

¹⁵⁸ Comenta-se que na versão do MMM aqui descrita, e também já em Dweck, Vianna e Barbosa (2020), não há a presença de um componente referente ao ganho de produtividade do trabalho pelo processo de *learn by doing*, presente nas versões consolidadas do modelo em Possas e Dweck (2004, p.20 e 21) e em Dweck (2006, p.106), por exemplo.

¹⁵⁹ Vale observar que o montante pago a título de P&D integra o montante de salários agregados e, portanto, a renda disponível, para fins de consistência de estoques e fluxos (SFC) e que no modelo não há limitação de disponibilidade de trabalho, ou seja, não restrição de oferta no mercado de trabalho.

¹⁶⁰ Cf. Vianna (2021, p.106) e Dweck (2006, p.114)

produtividade ou qualidade vigente no setor, ou por inovação, em que a produtividade ou qualidade potencialmente alcançável decorre de uma variável aleatória normal cuja média é a soma da produtividade ou qualidade inicial do setor com um parâmetro que mede oportunidades tecnológicas, conforme ilustrado pelas expressões apresentadas a seguir.

Em específico, na busca tecnológica por imitação a primeira etapa, descrita pela expressão (18), abaixo, representa um lançamento estocástico que mede a probabilidade do sucesso imitativo que depende da proporção da receita alocada para imitação, onde $dummy^{im}$ é uma dummy que pode assumir os valores 0 e 1, im_i é a proporção do gasto em P&D voltado a imitação e $rnd_{i,t}$ é o gasto em P&D, explicitado acima.

Obtendo-se sucesso nessa primeira etapa, isto é, no caso da variável $dummy^{im} = 1$, a definição da fronteira alcançada, conforme adiantado acima, baseia-se no respectivo valor máximo do setor, como ilustrado em (19) para a produtividade do trabalho e em (20) para a qualidade do produto, em que $\phi_{i,t}^{im}$ representa a produtividade do trabalho possível devido à imitação, $\phi_{j,t-1}^{max}$ é a produtividade máxima no setor, $q_{i,t}^{im}$ é a qualidade possível devido ao esforço de imitação e $q_{j,t-1}^{max}$ é a máxima qualidade dentre as firmas do setor j.

$$P(dummy^{im} = 1) = 1 - e^{(-im_i \cdot rnd_{i,t})} \quad (18)$$

$$\phi_{i,t}^{im} = dummy^{im} \cdot \phi_{j,t-1}^{max} \quad (19)$$

$$q_{i,t}^{im} = dummy^{im} \cdot q_{j,t-1}^{max} \quad (20)$$

Similarmente, a primeira etapa da busca tecnológica por inovação exprime a ocorrência de sorteio para avaliação quanto ao sucesso inovativo, isto é, a probabilidade da variável $dummy^{inn} = 1$ em (21), onde o expoente do número de Euler inn_i , que multiplica o montante de gasto em P&D, representa a proporção do gasto em P&D voltado a inovação.

Conseguindo-se sucesso na inovação o novo nível alcançado, descrita em (22) para a produtividade do trabalho, denotado por $\phi_{i,t}^{inn}$, e $q_{i,t}^{inn}$ em (23) para qualidade do produto, é definida por uma distribuição normal, em que a média é dada pela produtividade ou qualidade inicial no setor, respectivamente, ϕ_j^0 e q_j^0 , somada a um parâmetro exógeno referente a oportunidades tecnológicas que é multiplicado a cada período pelo índice t.

Assim, nas equações (22) e (23), abaixo, opp_j^ϕ representa a variável correspondente às oportunidades tecnológicas na produtividade do trabalho, sd_j^ϕ é o desvio padrão da distribuição de produtividade do setor j , opp_j^q representa as oportunidades tecnológicas na qualidade de produto e sd_j^q é o desvio padrão da distribuição de qualidade no setor j .

$$P(dummy^{inn} = 1) = 1 - e^{(-inn_i \cdot rnd_{i,t})} \quad (21)$$

$$\phi_{i,t}^{inn} = dummy^{inn} \cdot N\left((\phi_j^0 + opp_j^\phi \cdot t), sd_j^\phi\right) \quad (22)$$

$$q_{i,t}^{inn} = dummy^{inn} \cdot N\left((q_j^0 + opp_j^q \cdot t), sd_j^q\right) \quad (23)$$

Deve-se notar que o novo nível alcançado para produtividade ou para a qualidade em (22) e (23) pode ser maior ou menor que a corrente, o que expressa a incerteza associada ao processo de inovação.¹⁶¹

Desta feita, a firma acaba por implementar a fronteira de produtividade e qualidade que seja de maior nível entre a obtida pela imitação ou inovação em comparação com a corrente, como mostrado em (24) e (25), abaixo, em que $\phi_{i,t}^p$ é a fronteira potencial da produtividade do trabalho para a firma i , $\phi_{i,t-1}^p$ é a fronteira de produtividade no período $t-1$, $q_{i,t}$ é a qualidade do bem produzido, $q_{i,t-1}$ é qualidade no período $t-1$.

$$\phi_{i,t}^p = \max(\phi_{i,t}^{im}, \phi_{i,t}^{inn}, \phi_{i,t-1}^p) \quad (24)$$

$$q_{i,t} = \max(q_{i,t}^{im}, q_{i,t}^{inn}, q_{i,t-1}) \quad (25)$$

3.2.3.4 Os custos da firma

Até aqui, foram expostas as formas funcionais que determinam o comportamento das firmas quanto a produção, o investimento e a busca tecnológica. Segue-se, agora, a exibição das expressões que caracterizam os componentes do custo de cada firma e o cálculo do custo variável unitário, isto é, o custo variável por unidade de bem final, que compreende custos com salários, que na presente versão do modelo é ajustado individualmente por cada firma¹⁶²

¹⁶¹ Vianna (2021, p.108): “The firm might allocate resources and might be able to find a new technology but, in practice, the new technology might not be as productive as expected”.

¹⁶² Vianna (2021, p.81, nota 12) salienta que na versão consolidada o ajuste dos salários era setorialmente determinado com base no crescimento da produtividade média do setor e na inflação, diferentemente da versão desenvolvida no texto como exposto pela expressão (26) de ajuste do salário nominal de cada firma i . De fato, em Dweck (2006, p.117) a equação de ajuste dos salários possui formato análogo a (26), com a diferença que a variação da produtividade média incorporada aos salários é a nível setorial e o ajuste pela inflação é dado pela diferença entre o índice geral de preços do período anterior com aquela de cinco períodos atrás.

a cada Λ períodos de produção, e os custos com insumos de produção, domésticos e importados.

A equação (26) abaixo descreve a maneira como os salários nominais para cada firma, $wr_{i,t}$, são ajustados em cada Λ períodos¹⁶³ com base no crescimento médio da produtividade do trabalho, em que $\phi_{i,t-1}$ representa a produtividade do trabalho no período t-1, e da inflação passada de bens de consumo, domésticos e importados, cpi_{t-1} , e de acordo com a evolução das elasticidades a cada Λ períodos, seguindo-se a expressão (27).

Assim, a variação em Λ períodos tanto da produtividade quanto da inflação ao consumidor é adicionada ao salário nominal do período passado mediada por $\xi_{j,t}^p$ e $\xi_{j,t}^\phi$ que, respectivamente, representa o repasse da inflação para os salários e o repasse da produtividade no setor. Em (27) é introduzido o mecanismo representativo do conflito distributivo pelo lado do trabalho, onde $\xi_{j,t}$ é utilizado para representar tanto o repasse de inflação quanto de produtividade, ψ_j^{bg} é o ajuste devido ao poder de barganha no setor j, $n_{j,t-1}$ é o emprego no setor j, $pcu_{j,t-1}$ é o grau de utilização da capacidade produtiva e pcu_j^d é o grau de utilização da capacidade desejada.

$$wr_{i,t} = wr_{i,t-1} \left(1 + \xi_{j,t}^p \left(\frac{cpi_{t-1} - cpi_{t-1-\Lambda}}{cpi_{t-1-\Lambda}} \right) + \xi_{j,t}^\phi \left(\frac{\phi_{i,t-1} - \phi_{i,t-1-\Lambda}}{\phi_{i,t-1-\Lambda}} \right) \right) \quad (26)$$

$$\xi_{j,t} = \begin{cases} \xi_{j,t-1} + \psi_j^{bg}, & \text{se } \frac{n_{j,t-1} - n_{j,t-1-\Lambda}}{n_{j,t-1-\Lambda}} > 0 \text{ e } pcu_{j,t-1} > pcu_j^d \\ \xi_{j,t-1} - \psi_j^{bg}, & \text{se } \frac{n_{j,t-1} - n_{j,t-1-\Lambda}}{n_{j,t-1-\Lambda}} < 0 \text{ e } pcu_{j,t-1} < pcu_j^d \\ \xi_{j,t-1}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (27)$$

Depreende-se, assim, a partir de (27) que a elasticidade corrente é igual a do período anterior adicionada ao parâmetro exógeno representativo do poder de barganha do trabalho ψ_j^{bg} quando a variação do emprego nos últimos Λ períodos for positiva e o grau de utilização da capacidade produtiva do período anterior estiver acima do grau de utilização desejado e, de maneira oposta, subtrai-se ψ_j^{bg} da elasticidade anterior no caso de queda no emprego e utilização da capacidade abaixo da desejada.

¹⁶³ Vianna (2021, p.81) define que Λ equivale a um ano, o que poderia ser traduzido nos termos do modelo em 4 períodos de produção, considerando-se que um período de produção t equivaleria a um trimestre.

$$uwc_{i,t} = \frac{wr_{i,t}}{\bar{\phi}_{i,t-1}} \quad (28)$$

Para chegar-se no custo unitário do salário, denotado por $uwc_{i,t}$, divide-se a taxa de salários nominais $wr_{i,t}$ pela produtividade média da firma no período anterior $\bar{\phi}_{i,t-1}$, descrito pela igualdade (28), acima.

Os custos variáveis decorrentes da necessidade de insumos de produção são calculados considerando que parte dos bens intermediários são adquiridos domesticamente e a outra parte é importada. Nomeadamente, calcula-se o custo unitário de insumos de produção, denotado por $uic_{i,t}$ na expressão (29), pela parte demandada a nível doméstico, a partir da propensão a importar insumos da firma, $l_{i,t}^{in}$, variável parcialmente endogeneizada conforme equação (30) ao variar seguindo a taxa de câmbio em termos reais elevada ao parâmetro exógeno referente a elasticidade de preços de insumos importados do setor $\epsilon_j^{p,in}$, do coeficiente técnico de insumos da firma α_i e de $\bar{p}_{in,t-1}$, o preço médio dos bens intermediários no período anterior. Soma-se à demanda doméstica da firma a parcela de insumos importada, o segundo termo do lado direito da equação (29), que depende do preços de bens intermediários no exterior, $p_{in,t-1}^x$, e da taxa de câmbio er_{t-1} .

$$uic_{i,t} = (1 - l_{i,t}^{in})(\alpha_i \cdot \bar{p}_{in,t-1}) + l_{i,t}^{in}(\alpha_i \cdot p_{in,t-1}^x \cdot er_{t-1}) \quad (29)$$

$$l_{i,t}^{in} = l_{i,t-1}^{in} \left(\frac{\bar{p}_{in,t-1}}{p_{in,t-1}^x \cdot er_{t-1}} \right)^{\epsilon_j^{p,in}} \quad (30)$$

O total do custo variável unitário da firma considera, em (31), além da adição entre o custo unitário do salário $uwc_{i,t}$ e o custo unitário de insumos $uic_{i,t}$, um componente relativo ao custo financeiro normal unitário da firma $ufc_{i,t}$ quando a taxa de endividamento no período precedente, $dr_{i,t-1}$, estiver maior que taxa máxima definida por $dr_{i,t}^{\max}$. O parâmetro $\xi_{i,t}^{fc}$ representa a proporção de repasse de custos financeiros aos custos totais e, em (32), o custo financeiro unitário é calculado pela razão entre as obrigações financeiras da firma, $fo_{i,t}$, e o grau de utilização da capacidade desejada, pcu_j^d , multiplicada pela capacidade produtiva da firma $x_{i,t}^p$.

$$uvc_{i,t} = \begin{cases} uwc_{i,t} + uic_{i,t} + \xi_{i,t}^{fc} \cdot ufc_{i,t} & \text{se } dr_{i,t-1} > dr_{i,t}^{max} \\ uwc_{i,t} + uic_{i,t}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (31)$$

$$ufc_{i,t} = \frac{fo_{i,t}}{pcu_i^d \cdot x_{i,t}^p} \quad (32)$$

3.2.3.5 O mark-up e o preço

As firmas definem seus preços desejados por uma regra de mark-up desejado sobre os custos variáveis no início de cada período de produção. Especificamente, o mark-up desejado, $mk_{i,t}^d$ na expressão (33), é ajustado a cada período t por uma proporção da variação da participação de mercado, caso a participação de mercado correspondente da firma estiver no período anterior maior que o desejado. Em (33) $\psi_{i,t}^{mk}$ é o parâmetro exogenamente definido de ajuste do mark-up em relação a variação da parcela de mercado detida pela firma, $ms_{i,t-1}$ é a parcela de mercado (*market-share*) da firma no período $t-1$ e $ms_{i,t-1}^d$ é a parcela de mercado desejada da firma i .

$$mk_{i,t}^d = \begin{cases} mk_{i,t-1}^d \left(1 + \psi_{i,t}^{mk} \left(\frac{ms_{i,t-1} - ms_{i,t-2}}{ms_{i,t-2}} \right) \right) & \text{se } ms_{i,t-1} > ms_{i,t-1}^d \\ mk_{i,t-1}^d, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (33)$$

Dessa forma, o preço desejado, $p_{i,t}^d$ em (34), abaixo, é igual ao mark-up desejado multiplicado pelo custo variável unitário $uvc_{i,t}$.

$$p_{i,t}^d = mk_{i,t}^d \cdot uvc_{i,t} \quad (34)$$

Já o preço efetivamente praticado pela firma, denotado por $p_{i,t}^*$ na expressão (35), segue o mesmo formato do adotado em Kalecki (1954, p.8 e passim)¹⁶⁴ que representa uma média ponderada entre o preço desejado e um preço médio de referência do setor. Assim, em (35), θ_i é o parâmetro de estratégia de preço, também chamado de grau de monopólio, $p_{i,t}^d$ é

¹⁶⁴ Dweck (2006, p.104) comenta: “A equação de preços, como discutida em Possas, Koblitz et alii (2001), é uma versão discreta da apresentada em Silverberg (1987) adaptada à *replicator equation*, idêntica à equação utilizada por Kalecki (1954, cap.1) em sua análise do grau de monopólio sob concorrência imperfeita”. Vianna (2021, p.84) também observa: “The price equation used in the model is the one used by Kalecki (1954) (...). It is an extension of the full cost principle under oligopolistic conditions, where it is impossible to ignore others’ prices. So, firm’s effective price will be an average between firm’s desired price and the sector’s average price”. Possas e Dweck (2004, p.19, grifos no original) adicionam: “Alternatively, it can be understood as one of the determinants of markup in oligopoly: as a sort of compromise between the desired markup by a firm (or its long run strategic markup) and current competitive conditions. While low cost firms enjoy the advantage of making additional profits in the short run, in excess of what would result from applying the strategic markup, high cost firms sacrifice their desired markup for keeping their market share (Silverberg (1987), p.130)”.

o preço desejado e $p_{i,t}^{ref}$ é o preço de referência, definido em (36). Ademais o mark-up efetivo pode ser calculado ao substituir (34) em (35).

Observa-se que na presente versão do modelo o preço de referência $p_{i,t}^{ref}$ não é apenas determinado pelo preço médio no setor, mas também considera a influência do setor externo em parte da demanda setorial¹⁶⁵ ao englobar no cálculo do preço de referência, em (36), a parcela das encomendas do setor destinada à exportação, o preço no exterior do bem e a taxa de câmbio, ou seja, em termos algébricos, $\bar{p}_{j,t-1}$ é o preço médio doméstico no setor j , θ_i^x é o parâmetro que mede o peso do preço externo, $exp_{j,t-1}^r$ são as exportações em termos reais do setor, $o_{j,t-1}$ são as encomendas efetivas, $p_{j,t-1}^x$ corresponde ao preço externo do bem do setor j e er_{t-1} é a taxa de câmbio em $t-1$.

$$p_{i,t}^* = \theta_i \cdot p_{i,t}^d + (1 - \theta_i) p_{i,t}^{ref} \quad (35)$$

$$p_{i,t}^{ref} = \bar{p}_{j,t-1} \left(1 - \theta_i^x \left(\frac{exp_{j,t-1}^r}{o_{j,t-1}} \right) \right) + p_{j,t-1}^x \cdot er_{t-1} \cdot \theta_i^x \left(\frac{exp_{j,t-1}^r}{o_{j,t-1}} \right) \quad (36)$$

3.2.3.6 O consumo das classes de renda

Tendo-se apresentado as principais decisões relativas às firmas, passa-se, agora, a exposição da demanda das classes de renda. Vale, de início, notar que o consumo no modelo é determinado a nível de cada uma das h classes de renda e na versão aqui apresentada do MMM¹⁶⁶ o consumo desejado depende da propensão a consumir em relação a renda disponível média, de cada classe de renda, adicionada ao consumo autônomo da classe.

Os gastos desejados de cada classe de renda h , $e_{h,t}^d$ em (37), distingue-se em consumo desejado em bens domésticos, denotado por $c_{h,t}^d$, e pelo consumo desejado de bens importados $imp_{h,t}^d$. O consumo doméstico segue a igualdade estipulada em (38), onde $\iota_{h,t}$ representa a propensão a importar bens de consumo da classe de renda, ζ_h é a propensão a

¹⁶⁵ Vianna (2021, p.84 e 85) argumenta que se as firmas não considerassem o preço externo para fixação do preço de referência poderiam perder demanda mesmo quando o preço praticado seja igual ao preço médio doméstico do setor. As versões do modelo anteriores, incluído Dweck, Vianna e Barbosa (2020, p.205), Possas e Dweck (2011, p.8), Dweck (2006, p.104) e Possas e Dweck (2004, p.19) utilizam-se do preço médio no setor para o cálculo do preço efetivo em (35).

¹⁶⁶ Em Dweck (2006, p.100), por exemplo, o consumo induzido depende da renda real média, com quatro classes de renda e a média da renda real calculada com defasagens diferentes para cada classe de renda.

consumir e $\bar{y}_{h,t}^{dp}$ é a renda disponível média, calculada conforme (39) com base na renda disponível média dos últimos Λ períodos.

$$e_{h,t}^d = c_{h,t}^d + imp_{h,t}^d \quad (37)$$

$$c_{h,t}^d = (1 - \iota_{h,t})(\zeta_h \cdot \bar{y}_{h,t}^{dp}) + c_{h,t}^a \quad (38)$$

$$\bar{y}_{h,t}^{dp} = \left(\frac{\sum_{b=1}^{\Lambda} \bar{y}_{h,t-b}^{dp}}{\Lambda} \right) \quad (39)$$

Por sua vez, a importação desejada das classes de renda depende da propensão a importar em relação a renda disponível voltada ao consumo, como mostrado em (40). A propensão a importar da classe de renda varia conforme descrito em (41) de acordo com a taxa de câmbio em termos reais e do parâmetro exógeno referente a elasticidade-preço de bens de consumo importados, ϵ_h^p , em que $\iota_{h,t}$ representa a propensão a importar bens de consumo, ζ_h é a propensão a consumir da classe de renda, $\bar{p}_{c,t-1}$ é a média dos preços de bens de consumo, $p_{c,t-1}^x$ é o preço do bem de consumo no exterior.

$$imp_{h,t}^d = \iota_{h,t}(\zeta_h \cdot \bar{y}_{h,t}^{dp}) \quad (40)$$

$$\iota_{h,t} = \iota_{h,t-1} \left(\frac{\bar{p}_{c,t-1}}{p_{c,t-1}^x \cdot er_{t-1}} \right)^{\epsilon_h^p} \quad (41)$$

O componente autônomo do consumo desejado, $c_{h,t}^a$, por fim, tem sua variação definida pela expressão (42), dada a variação em Λ períodos¹⁶⁷ da qualidade média dos bens de consumo, ajustado ao parâmetro φ_h^a que representa a sensibilidade do consumo autônomo em relação a variação da qualidade, onde $\bar{q}_{c,t-1}$ é a qualidade média no setor de bens de consumo no período t-1. Destaca-se que o nível da qualidade do produto para cada firma, explicitada em (25), varia de acordo com o sucesso na busca tecnológica, apresentado acima, e impacta o consumo autônomo caracterizando um efeito de compensação pela demanda do avanço técnico.¹⁶⁸

$$c_{h,t}^a = c_{h,t-1}^a \left(1 + \varphi_h^a \left(\frac{\bar{q}_{c,t-1} - \bar{q}_{c,t-1-\Lambda}}{\bar{q}_{c,t-1-\Lambda}} \right) \right) \quad (42)$$

¹⁶⁷ Vale reforçar, conforme observado na nota 163, que Vianna (2021) define que Λ corresponde ao período anual, equivalendo a quatro períodos de produção. Em Dweck (2006, p.116) relata-se que o consumo autônomo é ajustado a cada dez períodos de produção.

¹⁶⁸ Como argumentado em Dweck (2006, p.159) e, mais recentemente, em Possas, Dweck e Vianna (2020, p.13).

Até aqui foi exposto o formato do consumo desejado para cada classe de renda. Para chegar-se ao consumo efetivo da classe é necessário considerar, assim como no caso da firma, a restrição financeira das classes de renda que compreende os recursos disponíveis da classe e recursos externos disponibilizados via crédito.

Assim, o montante de fundos disponíveis para o gasto da classe é denotado por $f_{h,t}$ na equação (43), abaixo, e é composto pela soma da renda disponível do período anterior, $y_{h,t-1}^{dp}$, com o estoque de depósitos em conta, representado por $dep_{h,t-1}^s$, adicionando-se $l_{h,t}^*$ que são os empréstimos efetivos concedidos às classes de renda, e descontando-se da parcela da renda disponível provisionada para fins de preferência pela liquidez¹⁶⁹, $lp_{h,t}$, e das obrigações financeiras da classe, representado por $fo_{h,t}$, referente aos empréstimos passados.¹⁷⁰

$$f_{h,t} = y_{h,t-1}^{dp} + dep_{h,t-1}^s - lp_{h,t} \cdot \bar{y}_{h,t}^{dp} - fo_{h,t} + l_{h,t}^* \quad (43)$$

Dessa forma, chega-se ao consumo doméstico efetivo da classe h , $c_{h,t}^*$ disposto em (44), pela avaliação quanto ao menor valor entre o consumo desejado $c_{h,t}^d$ e o montante de recursos disponíveis para o gasto da classe, definido acima. A demanda por consumo efetivo em termos reais, $c_{h,t}^r$, é definida pela razão descrita em (45), onde $\bar{p}_{c,t}$ é a média dos preços de bens de consumo no período t .

$$c_{h,t}^* = \min(c_{h,t}^d, f_{h,t}) \quad (44)$$

$$c_{h,t}^r = \frac{c_{h,t}^*}{\bar{p}_{c,t}} \quad (45)$$

¹⁶⁹ A determinação da preferência pela liquidez, $lp_{h,t}$, segue a expressão a seguir, onde ψ_h^{lp} representa o parâmetro de ajuste da preferência pela liquidez, $\bar{y}_{h,t-1}^{dp}$ é a renda disponível média da classe h no período $t-1$, $dr_{h,t-1}$ é a taxa de endividamento da classe e $dr_{h,t-1}^{max}$ é a taxa de endividamento máxima da classe.

$$lp_{h,t} = \begin{cases} lp_{h,t-1} - \psi_h^{lp} & \text{se } \frac{\bar{y}_{h,t-1}^{dp} - \bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}}{\bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}} > 0 \text{ e } dr_{h,t-1} < dr_{h,t-1}^{max} \\ lp_{h,t-1} + \psi_h^{lp} & \text{se } \frac{\bar{y}_{h,t-1}^{dp} - \bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}}{\bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}} < 0 \text{ e } dr_{h,t-1} > dr_{h,t-1}^{max} \\ lp_{h,t-1}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

¹⁷⁰ O exame das formas que determinam a concessão de crédito às classes de renda e o cálculo das obrigações financeiras serão concisamente expostas na subseção 3.2.3.11, abaixo, sobre o sistema financeiro na presente versão do modelo.

Já o gasto efetivo em importação das classes de renda, $imp_{h,t}^*$, possui menor prioridade em comparação ao consumo doméstico, como pode ser observado em (46), em que se gasta com importação até o limite de recursos disponíveis após o consumo doméstico.

$$imp_{h,t}^* = \min\left(imp_{h,t}^d, (f_{h,t} - c_{h,t}^*)\right) \quad (46)$$

3.2.3.7 Demanda efetiva aos setores e a parcela de mercado apropriada

A demanda total a cada setor depende da demanda doméstica, da demanda de governo e das exportações, embora possua determinação diferenciada de cada um desses componentes a depender do setor produtivo em questão, conforme explicitado a seguir.¹⁷¹

Para os bens de consumo, o total das encomendas ao setor em termos reais, $o_{c,t}$ em (47), é formada pelo somatório da demanda real, dada pela equação (45), em relação a todas as classes de renda H , pelas exportações reais de bens consumo, representado por $exp_{c,t}^r$ e pelo consumo efetivo real de governo, $c_{g,t}^r$.

As encomendas ao setor de bens intermediários, $o_{in,t}$ na expressão (48), compreendem, além da demanda real do setor externo por insumos, $exp_{in,t}^r$ e a demanda real de governo, $inp_{g,t}^r$, a demanda doméstica que é o somatório entre todas as F firmas das demandas individuais por insumos de produção em termos reais, $inp_{i,t}^d$ definida acima em (4), ajustado pelo simétrico da propensão a importar insumos, $i_{i,t}^{in}$, de modo a definir a parcela dos insumos demandados domesticamente.

O setor de bens de capital tem a demanda doméstica, $o_{k,t}$ na equação (49), estabelecida pelo somatório do investimento real efetivo de cada uma das F firmas, designado por $i_{i,t}^r$ e definido em (16) acima, adicionado aos bens de capital exportados, $exp_{k,t}^r$ e o investimento real efetivo de governo $i_{g,t}^r$.

$$o_{c,t} = \sum_{h=1}^H c_{h,t}^r + exp_{c,t}^r + c_{g,t}^r \quad (47)$$

$$o_{in,t} = \sum_{i=1}^F (1 - i_{i,t}^{in}) inp_{i,t}^d + exp_{in,t}^r + inp_{g,t}^r \quad (48)$$

¹⁷¹ As equações que determinam o comportamento de variáveis associadas ao setor externo ou ao governo serão apresentadas em suas respectivas subseções, como, por exemplo, as exportações reais de cada setor, pela expressão (82).

$$o_{k,t} = \sum_{i=1}^F i_{i,t}^r + exp_{k,t}^r + i_{g,t}^r \quad (49)$$

Tendo-se consideradas as demandas setoriais, as demandas individuais são designadas de acordo com as respectivas competitividades de cada firma que determinam a parcela de mercado apropriada por elas. Isto é, as encomendas para cada firma i do setor j , $o_{i,t}$, são determinadas pela parcela de mercado da firma, $ms_{i,t}$, multiplicada pelo total da encomenda setorial, denotado em (50) por $o_{j,t}$ que representa uma das demandas setoriais tratadas acima.

Por sua vez, a parcela de mercado de cada firma varia seguindo (51), equação chamada de *replicator dynamic equation* que traduz um processo de seleção entre as firmas¹⁷², de acordo com o índice de competitividade da firma, $co_{i,t}$, em relação ao índice médio no setor, $\bar{co}_{j,t}$, ajustado ao parâmetro exógeno setorial μ_j^{ms} , também chamado de parâmetro de intensidade da seleção.

A competitividade da firma, $co_{i,t}$, é calculada na forma de um índice, descrito em (52), e considera a qualidade, $q_{i,t}$, o preço da firma, $p_{i,t}$ e $dd_{i,t}$ que representa o atraso nas entregas, quando as encomendas para firma i são superiores à venda efetiva, definido em (55). Ainda na expressão (52), ϵ_j^q representa a elasticidade da qualidade, ϵ_j^p é a elasticidade preço e ϵ_j^{dd} é a elasticidade do atraso de entrega, todas referentes ao setor j .

$$o_{i,t} = ms_{i,t} \cdot o_{j,t} \quad (50)$$

$$ms_{i,t} = ms_{i,t-1} \left(1 + \mu_j^{ms} \left(\frac{co_{i,t} - \bar{co}_{j,t}}{\bar{co}_{j,t}} \right) \right) \quad (51)$$

$$co_{i,t} = \left(\frac{(q_{i,t})^{\epsilon_j^q}}{(p_{i,t})^{\epsilon_j^p} \cdot (dd_{i,t})^{\epsilon_j^{dd}}} \right) \quad (52)$$

3.2.3.8 Vendas e lucros

Dada as encomendas para cada firma, designadas em função da parcela de mercado apropriada em relação ao total da demanda setorial, as vendas efetivas são definidas pela

¹⁷² Em Dweck (2006, p.101 e 102) trata-se da origem dessa versão da equação *replicator*, de sua formulação em Silverberg (1987) e as adaptações tomadas para incorporação ao modelo MMM, bem como em relação as características do índice de competitividade, apresentado aqui em (52).

expressão (53) que traduz o menor valor entre as encomendas designadas para a firma, $o_{i,t}$, e a produção efetiva $x_{i,t}^*$ somada ao estoque no período anterior de bens produzidos, $inv_{i,t-1}^s$.¹⁷³

O estoque de bens produzidos pode variar positivamente para o caso de o nível das vendas efetivas $s_{i,t}$ ser menor que a produção efetiva $x_{i,t}^*$ da firma, como evidenciado em (54). Já no caso de as encomendas à firma terem nível superior às vendas efetivas ocorrerá um atraso nas entregas, $dd_{i,t}$ na igualdade (55), o que, reforça-se, impacta no cálculo da competitividade da firma e na definição de sua parcela de mercado.¹⁷⁴

$$s_{i,t} = \min(o_{i,t}, (x_{i,t}^* + inv_{i,t-1}^s)) \quad (53)$$

$$inv_{i,t}^s = inv_{i,t-1}^s + (x_{i,t}^* - s_{i,t}) \quad (54)$$

$$dd_{i,t} = \frac{o_{i,t}}{s_{i,t}} \quad (55)$$

A receita auferida pela firma, $re_{i,t}$, resulta de suas vendas efetivas $s_{i,t}$ multiplicada pelo preço efetivo praticado pela firma $p_{i,t}^*$, como exposto em (56). Ao se especificar a receita pode-se calcular os lucros líquidos, denotados em (57) abaixo por $pr_{i,t}^{nt}$, pela soma da parcela da receita restante após descontar-se os impostos e os recursos para P&D com os recursos em conta de depósito, ajustado pela taxa de juros de depósitos, e pela subtração dos custos com salários e insumos e das parcelas referentes às dívidas contraídas, onde tr_i é a tributação indireta, λ_i é a proporção da receita para o gasto em P&D, $uwc_{i,t}$ é o custo unitário com salários, $uic_{i,t}$ é o custo unitário com insumos, ir_t^{dep} é a taxa de juros que remunera as contas de depósito, $dep_{i,t-1}^s$ é o estoque da conta de depósito da firma, ir_l é a taxa de juros específica do empréstimo l , $d_{l,t-1}$ é a quantia corrente em $t-1$ de cada empréstimos l e L é o número de empréstimos concedidos à firma i .

$$re_{i,t} = p_{i,t}^* \cdot s_{i,t} \quad (56)$$

$$pr_{i,t}^{nt} = re_{i,t}(1 - tr_i)(1 - \lambda_i) - (uwc_{i,t} + uic_{i,t})x_{i,t}^* + ir_t^{dep} \cdot dep_{i,t-1}^s - \sum_{l=1}^{L_{i,t}} ir_l \cdot d_{l,t-1} \quad (57)$$

¹⁷³ Como observam Possas e Dweck (2004, p.17) sobre os efeitos dinâmicos da interação proveniente da determinação das vendas da firma: "This interaction between sales and production over time creates a mechanism of dynamic induction over the subsequent production decisions, via changes on the expected behavior of future sales".

¹⁷⁴ Vianna (2021, p.105) descreve que a ocorrência de atraso nas entregas, a variável $dd_{i,t}$ do inglês *delivery delay*, afeta as encomendas esperadas futuras, a expressão apresentadas em (2), e, portanto a produção: "[delivery delay] generates temporal feedbacks, as firms will adjust future expected demand based on the past levels, and production will also take into consideration accumulated level of inventories".

Enfim, os lucros distribuídos pela firma, representados por $pr_{i,t}^{dis}$, seguem a regra imposta abaixo, em (58), em que a parcela do lucro distribuído δ_i em relação aos lucros líquidos determina os lucros distribuídos às classes de renda se o montante de lucro líquido tiver sinal positivo. Caso o lucro líquido seja menor ou igual a zero não há distribuição de lucro às classes de renda no período t .

$$pr_{i,t}^{dis} = \begin{cases} \delta_i \cdot pr_{i,t}^{nt} & \text{se } pr_{i,t}^{nt} > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (58)$$

3.2.3.9 O governo

O setor ou bloco representado pelo governo sofre destacado desenvolvimento no modelo MMM em Vianna (2021)¹⁷⁵ ao propor formulações que endogenizam parte da variação dos componentes do gasto do governo, que paga salários aos funcionários públicos, adquire do setor de bens de consumo, de bens intermediários e de bens de capital, e paga benefícios de seguro desemprego, além de pagar juros, rolar ou resgatar dívida pública. Como regramento fiscal é estabelecida uma meta flexível de superávit primário para a manutenção de uma limitação exógena para a razão dívida pública sobre PIB. O governo angaria recursos pela arrecadação de impostos diretos e indiretos e sana resultados operacionais negativos por emissão de dívida pública.

Em geral, os gastos públicos desejados evoluem de acordo com uma taxa de crescimento desejada para as despesas exogenamente definida, denotada por gr_g^d , e também conforme a variação de preços. Em específico, o gasto desejado com salários de governo, $w_{g,t}^d$ na expressão (59), variam de acordo com a taxa de crescimento dos gastos e com a variação de um índice de preços ao consumidor, representado por cpi_t . Analogamente, os gastos desejados de governo com consumo, $c_{g,t}^d$ em (60), com investimento, $i_{g,t}^d$ na expressão (61), e

¹⁷⁵ Parte do desenvolvimento do setor público da tese de Vianna (2021) é fruto da elaboração proposta em Dweck, Vianna e Barbosa (2020, p.192 e 193) que testa diferentes especificações para política fiscal, inclusive uma regra de teto dos gastos. Em Possas e Dweck (2004, p.30 e 31) os componentes do gasto público tem proporções fixadas e há uma regra para o gasto definida por uma meta fixa de superávit primário. Em Dweck (2006, p.119) é utilizado o mesmo expediente de regra de superávit fixado, mas é estabelecida hierarquia dos gastos com prioridade para o pagamento de salários de governo ante consumo e investimento. Em Possas e Dweck (2011, p.23-25) há também a limitação dos gastos por uma meta de superávit primário, porém se testa os efeitos de diferentes metas de superávit conforme o patamar da razão dívida sobre PIB e o componente do gasto em salários é priorizado e cresce a uma taxa exógena, sendo os outros componentes do consumo e investimento de governo determinados residualmente.

com insumos, $inp_{g,t}^d$ em (62), evoluem conforme a taxa exógena de crescimento real gr_g^d e da variação do preço médio no respectivo setor.

$$w_{g,t}^d = w_{g,t-1}^d \left(1 + gr_g^d + \left(\frac{cpi_{t-1} - cpi_{t-2}}{cpi_{t-2}} \right) \right) \quad (59)$$

$$c_{g,t}^d = c_{g,t-1}^d \left(1 + gr_g^d + \left(\frac{\bar{p}_{c,t-1} - \bar{p}_{c,t-2}}{\bar{p}_{c,t-2}} \right) \right) \quad (60)$$

$$i_{g,t}^d = i_{g,t-1}^d \left(1 + gr_g^d + \left(\frac{\bar{p}_{k,t-1} - \bar{p}_{k,t-2}}{\bar{p}_{k,t-2}} \right) \right) \quad (61)$$

$$inp_{g,t}^d = inp_{g,t-1}^d \left(1 + gr_g^d + \left(\frac{\bar{p}_{in,t-1} - \bar{p}_{in,t-2}}{\bar{p}_{in,t-2}} \right) \right) \quad (62)$$

Os gastos desejados com benefícios de seguro desemprego, designado pela variável $ub_{g,t}^d$ descrita em (63), são estabelecidos pela parcela do salário médio do setor, $\bar{w}r_{j,t-1}$, estipulada como benefício, denotado pelo parâmetro exógeno ubr , somado em todos os setores e multiplicado pelo maior valor entre zero e a diferença entre o número de empregados no setor do período $t-2$, $n_{j,t-2}$, e do período anterior¹⁷⁶.

$$ub_{g,t}^d = \sum_{j=1}^N ubr \cdot \bar{w}r_{j,t-1} \cdot (\max(0, n_{j,t-2} - n_{j,t-1})) \quad (63)$$

O montante de gasto público máximo, g_t^{\max} na expressão (64) abaixo, é limitado pela política fiscal instituída por uma meta flexível de superávit primário relativa ao PIB, st_t , em que a diferença entre o total de impostos arrecadados, TAX_{t-1} , e o montante provisionado para compor o superávit primário, calculado por $(st_t \cdot GDP_{t-1})$, onde o termo a direita é o PIB do período anterior, é somada à parte desses recursos ajustado pela variação do PIB e por um parâmetro referente às expectativas do governo γ_g .

O mecanismo que determina a meta de superávit st_t no período, exposto em (64.1), sujeito a um limite mínimo e máximo para a meta, st^{\min} e st^{\max} , respectivamente, em (64.2), adiciona o parâmetro exógeno de ajustamento da meta ψ^{st} no caso de a média da razão dívida pública sobre PIB do período passado, denotada por $\bar{d}r_{g,t-1}$, ser maior que o parâmetro

¹⁷⁶ Observa-se que $n_{j,t-2} > n_{j,t-1}$ significa aumento de desemprego e, caso contrário, $n_{j,t-2} < n_{j,t-1}$, simboliza que o desemprego cai entre esses períodos. Assim, a concessão do benefício de seguro desemprego segue comportamento anticíclico no modelo.

exógeno que define o máximo da razão dívida sobre PIB dr_g^{\max} e, simetricamente, subtrai o parâmetro ψ^{st} da meta de superávit se a média da razão dívida sobre PIB estiver menor que o mínimo estabelecido exogenamente para a razão dívida sobre PIB dr_g^{\min} .

$$g_t^{\max} = \left(1 + \gamma_g \left(\frac{GDP_{t-1} - GDP_{t-2}}{GDP_{t-2}} \right) \right) (TAX_{t-1} - st_t \cdot GDP_{t-1}) \quad (64)$$

$$st_t = \begin{cases} st_{t-1} + \psi^{st} & \text{se } \overline{dr}_{g,t-1} > dr_g^{\max} \\ st_{t-1} - \psi^{st} & \text{se } \overline{dr}_{g,t-1} < dr_g^{\min} \\ st_{t-1}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (64.1)$$

$$st^{\min} \leq st_t \leq st^{\max} \quad (64.2)$$

Desta feita, os gastos de governo são efetivamente determinados ao comparar-se os gastos desejados com o montante máximo de gasto de governo para o período, g_t^{\max} , e segue a uma escala de priorização para alocação dos gastos efetivos que se inicia com o gasto com os salários, o seguro desemprego, o consumo, os insumos e, por fim, o investimento de governo, conforme estabelecido nas expressões abaixo.

Assim, o gasto efetivo com salários, $w_{g,t}^*$ em (65), é o menor valor entre o montante de gasto máximo, g_t^{\max} , e o gasto desejado com salários, $w_{g,t}^d$ definido em (59). Restando-se recursos, esses são alocados na seguinte ordem: é determinado em (66) o gasto efetivo com seguro desemprego, $ub_{g,t}^*$, em seguida, na expressão (67), o gasto efetivo em bens de consumo adquiridos pelo governo, $c_{g,t}^*$, o gasto efetivo com insumos, $inp_{g,t}^*$ na equação (68), e o gasto efetivo com investimento de governo, $i_{g,t}^*$ em (69), de menor prioridade comparativamente.

$$w_{g,t}^* = \min(w_{g,t}^d, g_t^{\max}) \quad (65)$$

$$ub_{g,t}^* = \min(ub_{g,t}^d, (g_t^{\max} - w_{g,t}^*)) \quad (66)$$

$$c_{g,t}^* = \min(c_{g,t}^d, (g_t^{\max} - w_{g,t}^* - ub_{g,t}^*)) \quad (67)$$

$$inp_{g,t}^* = \min(inp_{g,t}^d, (g_t^{\max} - w_{g,t}^* - ub_{g,t}^* - c_{g,t}^*)) \quad (68)$$

$$i_{g,t}^* = \min(i_{g,t}^d, (g_t^{\max} - w_{g,t}^* - ub_{g,t}^* - c_{g,t}^* - inp_{g,t}^*)) \quad (69)$$

A expressão (70), abaixo, encerra o montante total de gasto efetivo de governo, designado por GOV_t , ao somar os gastos efetivos definidos acima.

$$GOV_t = w_{g,t}^* + ub_{g,t}^* + c_{g,t}^* + inp_{g,t}^* + i_{g,t}^* \quad (70)$$

A demanda efetiva em termos reais de governo aos setores produtivos é, portanto, obtida pela divisão do gasto efetivo com o preço médio do respectivo setor, como pode ser visto em (71) para o consumo efetivo real de governo, em (72) a respeito da demanda efetiva real por bens intermediários e em (73) para os investimentos efetivos reais de governo, $c_{g,t}^r$, $inp_{g,t}^r$ e $i_{g,t}^r$, respectivamente.

$$c_{g,t}^r = \frac{c_{g,t}^*}{\bar{p}_{c,t}} \quad (71)$$

$$inp_{g,t}^r = \frac{inp_{g,t}^*}{\bar{p}_{in,t}} \quad (72)$$

$$i_{g,t}^r = \frac{i_{g,t}^*}{\bar{p}_{k,t}} \quad (73)$$

As receitas do setor público são advindas da tributação, tanto indireta que incide sobre a receita da firma, quanto a tributação direta às classes de renda. Na equação (74) TAX_t é o total dos impostos recolhidos. O produto entre tr_i que são os impostos indiretos e $re_{i,t}$, a receita da firma i , somados em relação à todas as F firmas resulta no total de impostos indiretos. Os impostos pagos pelas H classes de renda tem alíquota tr_h e incidem sobre os salários e os lucros distribuídos às classes de renda, onde ω_h representa a apropriação de salários pela classe de renda h , WG_t é o agregado dos salários, π_h é a apropriação dos lucros, PR_t^{dis} é o agregado dos lucros distribuídos.¹⁷⁷

$$TAX_t = \sum_{i=1}^F tr_i \cdot re_{i,t} + \sum_{h=1}^H tr_h (\omega_h \cdot WG_t + \pi_h \cdot PR_t^{dis}) \quad (74)$$

A expressão (75), abaixo, representa uma forma rearranjada da identidade do setor público entre receitas e despesas. A variável b_t^S denota o estoque de títulos de dívida pública em t , GOV_t é o total de gastos efetivos do governo e $ir_{cb,t}^*$ é a taxa básica de juros. Constatase, assim, que se pode emitir dívida pública quando o resultado nominal, o total de impostos subtraído pelo total do gasto efetivo do governo e pelo pagamento de juros da dívida pública, for negativo e pode-se resgatar dívida quando o resultado nominal for positivo.

$$b_t^S = b_{t-1}^S + (GOV_t - TAX_t) + ir_{cb,t}^* \cdot b_{t-1}^S \quad (75)$$

¹⁷⁷ Vianna (2021, p.94) comenta que não se inclui na tributação direta os benefícios de seguro desemprego que são considerados isentos no modelo.

O cálculo da razão da dívida sobre o PIB é dado em (76) denotado por $dr_{g,t}$, onde b_t^s é o estoque de títulos de dívida pública e GDP_t denota o PIB.

$$dr_{g,t} = \frac{b_t^s}{GDP_t} \quad (76)$$

Por fim, a expressão (77) descreve o comportamento da taxa básica de juros estabelecida pelo banco central em sua condução da política monetária que, na cronologia de eventos do modelo, é determinada logo no início de cada período. Segue-se uma regra de Taylor de mandato único como política monetária¹⁷⁸, em que $ir_{cb,t}^*$ é a taxa básica de juros, κ é o parâmetro de suavização da taxa de juros, ir_{cb}^n é a taxa de juros nominal do banco central, φ_{cb}^{cpi} é o parâmetro de sensibilidade à inflação pelo banco central, $(\Delta cpi)_{cb,t}^e$ é a inflação esperada, $(\Delta cpi)_{cb}^t$ é a meta para inflação.

$$ir_{cb,t}^* = (1 - \kappa) \left(ir_{cb}^n + \varphi_{cb}^{cpi} \left((\Delta cpi)_{cb,t}^e - (\Delta cpi)_{cb}^t \right) \right) + \kappa \cdot ir_{cb,t-1}^* \quad (77)$$

3.2.3.10 O setor externo

No bloco formado pelo setor externo é definido o comportamento da taxa de câmbio, dos preços e renda externa e das exportações. Nota-se que as importações das classes de renda e dos setores produtivos, já expostas acima¹⁷⁹, dependem das respectivas propensões a importar que variam de acordo com a taxa de câmbio e o preço externo do respectivo bem importado.

De início, a taxa de câmbio tem sua evolução, definida em (78), baseada no resultado do balanço de pagamentos do período anterior, ajustado por um parâmetro exógeno ψ^{er} e limitado ao intervalo definido pela taxa de câmbio máxima e mínima em (78.1), onde er_t é a taxa de câmbio no período t , bp_{t-1} é o resultado do balanço de pagamentos e er^{\min} e er^{\max} são as taxas de câmbio mínima e máxima, respectivamente.

$$er_t = er_{t-1} - \psi^{er} \cdot bp_{t-1} \quad (78)$$

$$er^{\min} \leq er_t \leq er^{\max} \quad (78.1)$$

¹⁷⁸ Isso ocorre na especificação referente a simulação padrão, designada por *baseline* em inglês, em Vianna (2021) cuja tese testa diferentes especificações para política monetária no MMM.

¹⁷⁹ A variação da propensão a importar insumos da firma é definida em (30) e a importação de bens de consumo pelas das classes de renda é influenciada pela propensão a importar descrita em (41).

O resultado do balanço de pagamento bp_t , por seu turno, descrito em (79), procede da soma da balança comercial, $EXP_t - IMP_t$, com uma representação da conta capital que busca refletir de maneira simplificada a determinação dos fluxos de capitais¹⁸⁰ a partir do diferencial das taxas de juros básica doméstica e externa, $ir_{cb,t}^* - ir_x$, em proporção ao PIB doméstico. Assim, em (79) EXP_t e IMP_t representam as exportações e importações agregadas em termos nominais, respectivamente, $ir_{cb,t}^*$ é a taxa de juros básica efetiva praticada pelo banco central, ir_x é taxa de juros no setor externo, u_x representa o fluxo de capitais em proporção ao PIB e GDP_t é o PIB do período t .

$$bp_t = (EXP_t - IMP_t) + (ir_{cb,t}^* - ir_x)u_x \cdot GDP_t \quad (79)$$

O preço externo do bem também produzido pelo setor doméstico j , $p_{j,t}^x$, segue uma evolução estocástica em (80) dada por uma distribuição normal cuja média é a soma do parâmetro exógeno representando a taxa de crescimento dos preços externos, Δp_j^x , com a variação média entre os preços do setor j , denotado por $\Delta \bar{p}_{j,t-1}$, multiplicado pelo parâmetro ϑ_j que representa a competitividade ou relevância externamente do setor doméstico j . O desvio padrão da distribuição normal é designado por sd_j^p e é um parâmetro exógeno para o desvio padrão do preço externo.

Similarmente, a renda real do setor externo, y_t^x , se desenvolve seguindo uma distribuição normal de média Δy_t^x , parâmetro exógeno para a taxa de crescimento da renda do setor externo, e desvio padrão da renda externa sd_j^y , como mostrado pela expressão (81).

$$p_{j,t}^x = p_{j,t-1}^x \left(1 + N \left((\Delta p_j^x + \vartheta_j \cdot \Delta \bar{p}_{j,t-1}), sd_j^p \right) \right) \quad (80)$$

$$y_t^x = y_{t-1}^x \left(1 + N(\Delta y_t^x, sd_j^y) \right) \quad (81)$$

Por último, as exportações em termos reais para cada setor j , $exp_{j,t}^r$ na equação (82), abaixo, decorrem da interação entre o coeficiente de exportações do setor, ε_j , com a taxa de câmbio real elevada pela elasticidade-preço das exportações, denotado por $\epsilon_j^{p,x}$, e da renda real externa elevada pela elasticidade-renda das exportações, $\epsilon_j^{y,x}$, onde $\bar{p}_{j,t}$ é o preço médio do setor j e er_t é a taxa de câmbio nominal.

¹⁸⁰ Vianna (2021, p.88) admite o caráter simplificado da modelagem adotada para representação da conta capital e que seria desejável a especificação do setor externo de maneira mais detalhada, no entanto reitera que a especificação utilizada é suficiente para captar os efeitos no balanço de pagamentos da política monetária.

$$\exp p_{j,t}^r = \varepsilon_j \left(\frac{\bar{p}_{j,t} \cdot er_t}{p_{j,t}^x} \right)^{\varepsilon_j^{p,x}} \cdot (y_t^x)^{\varepsilon_j^{y,x}} \quad (82)$$

3.2.3.11 O setor financeiro

A versão do MMM aqui referenciada e exposta enuncia como um de seus objetivos a investigação da política monetária e seus canais de transmissão e, para tanto, por meio de um largo conjunto de formas funcionais descreve comportamentos atinentes à atuação de bancos. Para os fins da presente apresentação do modelo aqui será condensada a exposição de parte dessas equações¹⁸¹ no que diz respeito a definição da taxa de juros das contas de depósitos e dos empréstimos concedidos às firmas e às classes de renda, o *spread* bancário, e a determinação da demanda por crédito das firmas e classes de renda.

O sistema financeiro no modelo é constituído por B bancos que recebem a demanda por empréstimos das classes de renda e das firmas, distinguem taxas de juros por tempo de maturação e por perfil do cliente, realizam avaliação de crédito individualizada por firma e classe e possuem limitação de montante máximo de empréstimos por instituição bancária devido a regra regulatória e percepção individual quanto a fragilidade financeira.¹⁸²

Iniciando-se pelo comportamento relativo aos bancos, é estabelecido que a taxa de juros paga como remuneração da conta de depósitos, ir_t^{dep} , é a mesma em relação a todos os bancos e definida, em (83), por um *spread* negativo, denotado por spr^{dep} , em relação à taxa básica de juros fixada pelo banco central, apresentada em (77).

$$ir_t^{dep} = ir_{cb,t}^* - spr^{dep} \quad (83)$$

¹⁸¹ Adverte-se, no entanto, que a maior parte das equações relativas ao sistema financeiro é aqui reproduzida, em exceção apenas das formas funcionais referentes a receita, lucros e lucros retidos dos bancos e das expressões relacionadas a maneira como a demanda por crédito é distribuída entre os bancos e como a parcela de mercado apropriada e a competitividade deles é determinada, que devem ser consultadas em Vianna (2021, p.118 – 122).

¹⁸² Vianna (2021, p.117 e 120) explica que as classes de renda não sofrem limitação de crédito por montante máximo de empréstimos do banco e tem sua demanda por crédito distribuídas pelos bancos de acordos com suas parcelas de mercado que evoluem dada a dinâmica de uma equação do tipo *replicator*, embora possam experimentar limitação por endividamento máximo da classe. As firmas, além da avaliação individual, são passíveis de amargar restrição ao crédito por limite máximo de empréstimos do banco que é correntista e mantém relações com o mesmo banco até o eventual fechamento da firma. Não ocorre, também, restrição de crédito por setor produtivo, pois a demanda por crédito é distribuída aos bancos possivelmente credores proporcionalmente às demandas setoriais.

Já as taxas de juros dos empréstimos são discriminadas de acordo com o cliente que podem ser classes de renda ou firmas e, para essas últimas, por modalidade que pode ser de crédito de curto ou de longo prazo. abaixo, as equações (84) e (85) refletem a taxa de juros base de cada banco utilizada para o cálculo da taxa de juros específica à firma para crédito de curto prazo e longo prazo, respectivamente. Essa taxa base bancária segue formulação análoga à equação de preço da firma, baseada em Kalecki (1954), e depende da taxa básica de juros definida pelo banco central adicionada a um *spread* e da taxa média no setor financeiro da respectiva modalidade de crédito. Nas expressões abaixo, $ir_{b,t}^{st}$ e $ir_{b,t}^{lt}$ são as taxas de juros básicas do banco b para empréstimos de curto prazo e longo prazo, respectivamente, $spr_{b,t}^{st,d}$ é o *spread* desejado do banco b para curto prazo e $spr_{b,t}^{lt,d}$ é o *spread* desejado para longo prazo, θ_b^{st} é o parâmetro referente a estratégia de juros de curto prazo do banco, também chamado de grau de monopólio, θ_b^{lt} é o mesmo parâmetro para longo prazo, e $\bar{ir}_{fs,t-1}^{st}$ e $\bar{ir}_{fs,t-1}^{lt}$ são, respectivamente, as taxas de juros médias do setor financeiro de crédito de curto prazo e longo prazo.

$$ir_{b,t}^{st} = (ir_{cb,t}^* + spr_{b,t}^{st,d}) \cdot \theta_b^{st} + (1 - \theta_b^{st}) \cdot \bar{ir}_{fs,t-1}^{st} \quad (84)$$

$$ir_{b,t}^{lt} = (ir_{cb,t}^* + spr_{b,t}^{lt,d}) \cdot \theta_b^{lt} + (1 - \theta_b^{lt}) \cdot \bar{ir}_{fs,t-1}^{lt} \quad (85)$$

Os *spreads* desejados, mencionados acima, modificam-se por uma regra de dinâmica do tipo *replicator*, seguindo a variação de seu *market share*, de acordo com as equações (86) e (87) abaixo, onde ψ_b^{st} e ψ_b^{lt} são os parâmetros de ajuste em relação a variação da parcela de mercado de curto prazo e longo prazo, respectivamente e $ms_{b,t-1}$ é a parcela de mercado do banco b no período t-1.

$$spr_{b,t}^{st,d} = spr_{b,t-1}^{st,d} \left(1 + \psi_b^{st} \left(\frac{ms_{b,t-1} - ms_{b,t-2}}{ms_{b,t-2}} \right) \right) \quad (86)$$

$$spr_{b,t}^{lt,d} = spr_{b,t-1}^{lt,d} \left(1 + \psi_b^{lt} \left(\frac{ms_{b,t-1} - ms_{b,t-2}}{ms_{b,t-2}} \right) \right) \quad (87)$$

Os bancos estão expostos à restrição de volume máximo de crédito ofertado, $l_{b,t}^{\max}$ na expressão abaixo (88), por imposição regulatória e por percepção individual quanto à fragilidade financeira. A primeira restrição é representada por ca_t^{\min} , parâmetro referente à adequação mínima de capital, e a segunda em relação aos parâmetros de sensibilidade do banco b à fragilidade financeira em geral, ϕ_b^{dr} , e a sensibilidade à própria taxa de

inadimplemento de seus empréstimos concedidos, φ_b^{dr} . Ainda na expressão (88), ademais, $nw_{b,t-1}$ é o patrimônio líquido do banco b no período t-1, \overline{dr}_{t-1} é a média da dívida em relação a todas as firmas e $dfr_{b,t-1}$ é a taxa acumulada do banco de dívidas inadimplentes.

$$l_{b,t}^{max} = \frac{nw_{b,t-1}}{ca_t^{min} + \varphi_b^{dr} \cdot \overline{dr}_{t-1} + \varphi_b^{dr} \cdot dfr_{b,t-1}} \quad (88)$$

Os bancos emprestam recursos para as firmas em duas modalidades de maturação da dívida, de curto e longo prazo, como já comentado acima. Os empréstimos de curto prazo são aqueles realizados fora do período de investimento da firma para saldar eventuais perdas líquidas e tem prazo de Λ períodos para pagamento da dívida, indicado por Vianna (2020, p.112) como período corresponde a um ano. Os empréstimos de longo prazo são específicos ao período de investimento da firma e são demandados para o gasto com investimento não coberto pela quantia de recursos internos, conforme mostrado em (11), e tem prazo para pagamento de dez períodos de investimento Γ , relatado como equivalente ao tempo de vida útil médio de um bem de capital.¹⁸³

Ademais, para cada tipo de empréstimo e de maneira individualizada para cada firma é designada no momento da contratação a taxa de juros, definidas pelas expressões (89) e (90), abaixo, e adota-se uma estrutura fixa de amortização constante paga a cada período t para todos seus empréstimos contraídos.¹⁸⁴ Assim, nas expressões mencionadas, $ir_{i,t}^{st}$ e $ir_{i,t}^{lt}$, são as taxas de juros de empréstimos específica para a firma i, cliente do banco b, de curto prazo e longo prazo, respectivamente, rp_b^{st} e rp_b^{lt} são os parâmetros de ajuste ao prêmio de risco de crédito de curto e longo prazo e $\overline{dr}_{i,t}$ é a taxa média de endividamento da firma i.

$$ir_{i,t}^{st} = ir_{b,t}^{st}(1 + rp_b^{st} \cdot \overline{dr}_{i,t}) \quad (89)$$

$$ir_{i,t}^{lt} = ir_{b,t}^{lt}(1 + rp_b^{lt} \cdot \overline{dr}_{i,t}) \quad (90)$$

¹⁸³ Vianna (idem) comenta que os prazos de maturação dos dois tipos de empréstimo são parâmetros exogenamente definidos e podem ser modificados para fins de teste de configurações diferentes.

¹⁸⁴ Essa estrutura de constante amortização da dívida é proposta por Martins (2018) e se dá, nas palavras de Vianna (idem) da seguinte maneira: “in each period, a firm must pay a fixed amortization of each loan already taken, plus interest on the current stock of debt, with interest fixed for each loan in the period the loan was taken”. Além disso, o autor admite a possibilidade não explorada em sua versão do modelo de taxa de juros flexíveis calculadas a cada período: “We set a background possibility of flexible interest rates, in a way that instead of paying a rate which was fixed when the loan was taken, the rate is calculated and set every time period”.

Além da taxa de juros específica em cada empréstimo é imposta a restrição de montante de dívida máxima contraída pela firma, $l_{i,t}^{max}$, exposta em (91), definida pela variável dr_i^{max} que representa a taxa de endividamento máxima avaliada em relação ao estoque de capital instalado $k_{i,t}$ somado ao estoque de depósitos $dep_{i,t}^s$, descontando-se o estoque de dívida da firma no período t $l_{i,t}^s$.

$$l_{i,t}^{max} = dr_i^{max}(k_{i,t} + dep_{i,t}^s) - l_{i,t}^s \quad (91)$$

A taxa de endividamento máximo da firma, por sua vez, é determinada em (92), de acordo com a evolução dos lucros líquidos da firma $pr_{i,t-1}^{nt}$ entre cada Λ períodos e em relação a sua taxa de endividamento $dr_{i,t-1}$. Assim, por exemplo, caso a firma tenha uma variação positiva de seus lucros líquidos e sua taxa de endividamento for menor que a taxa máxima do período anterior é acrescido o parâmetro de ajuste ψ_i^{dr} à taxa máxima de endividamento.

$$dr_{i,t}^{max} = \begin{cases} dr_{i,t-1}^{max} + \psi_i^{dr} & \text{se } \frac{pr_{i,t-1}^{nt} - pr_{i,t-1-\Lambda}^{nt}}{pr_{i,t-1-\Lambda}^{nt}} > 0 \text{ e } dr_{i,t-1} < dr_{i,t-1}^{max} \\ dr_{i,t-1}^{max} - \psi_i^{dr} & \text{se } \frac{pr_{i,t-1}^{nt} - pr_{i,t-1-\Lambda}^{nt}}{pr_{i,t-1-\Lambda}^{nt}} < 0 \text{ e } dr_{i,t-1} > dr_{i,t-1}^{max} \\ dr_{i,t-1}^{max}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (92)$$

A taxa de endividamento da firma é definido em (93) e o montante desejado de novos empréstimos pela firma, $l_{i,t}^d$ em (94), é estabelecido pelo valor mínimo entre a diferença do investimento desejado e os recursos internos da firma, $i_{i,t}^d - f_{i,t}^i$, e o montante máximo de dívida $l_{i,t}^{max}$.

$$dr_{i,t} = \frac{l_{i,t}^s}{(k_{i,t} + dep_{i,t}^s)} \quad (93)$$

$$l_{i,t}^d = \min (i_{i,t}^d - f_{i,t}^i, l_{i,t}^{max}) \quad (94)$$

Por fim, os empréstimos voltados às classes de renda se restringem à dívida de curto prazo, de tempo de maturação para o pagamento do principal somado aos juros de Λ períodos, contraída quando os recursos internos da classe não são suficientes para cobrir os gastos desejados e, assim como nas firmas, as classes de renda priorizam o gasto através de seus recursos líquidos disponíveis. A taxa de juros do crédito às classes de renda, $ir_{h,t}$ na expressão (95), é fixada a partir de $\bar{ir}_{fs,t}^{st}$, a taxa de juros média no setor financeiro de empréstimos de curto prazo, rp_{fs}^h que representa o parâmetro de ajuste ao prêmio de risco da classe de renda e $\bar{dr}_{h,t}$, a média da taxa de endividamento da classe de renda h , como mostrado abaixo.

$$ir_{h,t} = \bar{r}_{fs,t}^{st} (1 + rp_{fs}^h \cdot \bar{dr}_{h,t}) \quad (95)$$

Analogamente ao que ocorre com os empréstimos às firmas, as classes de renda têm como obrigações financeiras¹⁸⁵ a cada período, denotadas por $fo_{h,t}$ em (96), o somatório dos juros sobre as dívidas adicionadas as amortizações fixas em relação a todas as dívidas contraídas, em que ir_l é a taxa de juros da dívida l , $d_{l,t}$ é o montante corrente em t de dívida e d_l^0 é a quantia inicial da dívida l .

$$fo_{h,t} = \sum_{l=1}^{L_{h,t}} \left(ir_l \cdot d_{l,t} + \frac{d_l^0}{\Lambda} \right) \quad (96)$$

A demanda das classes de renda por crédito, representado por $l_{h,t}^d$, é dada pela diferença entre o volume de gastos desejados da classe, $e_{h,t}^d$ definido acima em (37), com os recursos internos da classe expressidos pelo resultado das operações entre parêntesis no lado direito da expressão (97), abaixo, onde $y_{h,t-1}^{dp}$ é a renda disponível da classe no período anterior, $dep_{h,t-1}^s$ é o estoque em depósitos em conta e $lp_{h,t} \cdot \bar{y}_{h,t}^{dp}$ é a multiplicação que representa a parcela da renda disponível média referente a preferência pela liquidez da classe.

$$l_{h,t}^d = e_{h,t}^d - (y_{h,t-1}^{dp} + dep_{h,t-1}^s - lp_{h,t} \cdot \bar{y}_{h,t}^{dp} - fo_{h,t}) \quad (97)$$

A demanda pelo crédito das classes, apresentada acima, sofre a restrição de montante máximo de empréstimos concedidos à classe, denotado por $l_{h,t}^{\max}$ em (98), definido pelo produto entre o parâmetro referente a taxa de endividamento máxima da classe, $dr_{h,t}^{\max}$, com a soma da renda disponível com o estoque de depósitos, descontando-se o estoque corrente de empréstimos da classe $l_{h,t}^s$.

A taxa de endividamento máxima da classe é, ao seu turno, suscetível a mudança dinâmica estabelecida pela expressão (99), abaixo, semelhante ao definido para as firmas, em que, por exemplo, adiciona-se ao endividamento máximo do período anterior o parâmetro de ajuste do endividamento máximo ψ_h^{dr} caso haja variação positiva da renda disponível média $\bar{y}_{h,t-1}^{dp}$ em Λ períodos e se a taxa de endividamento da classe $dr_{h,t-1}$ estiver menor que a máxima, conforme exposto abaixo.

¹⁸⁵ Vale lembrar que as obrigações financeiras constam do cálculo do montante de fundos disponíveis para o gasto da classe, explicitado em (43).

A taxa de endividamento corrente da classe é calculada, em (100), pela razão entre o estoque de dívida da classe $l_{h,t}^s$ e a soma da renda disponível $\bar{y}_{h,t}^{dp}$ com o estoque da conta de depósitos $dep_{h,t}^s$.

$$l_{h,t}^{max} = dr_{h,t}^{max}(\bar{y}_{h,t}^{dp} + dep_{h,t}^s) - l_{h,t}^s \quad (98)$$

$$dr_{h,t}^{max} = \begin{cases} dr_{h,t-1}^{max} + \psi_h^{dr} & \text{se } \frac{\bar{y}_{h,t-1}^{dp} - \bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}}{\bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}} > 0 \text{ e } dr_{h,t-1} < dr_{h,t-1}^{max} \\ dr_{h,t-1}^{max} - \psi_h^{dr} & \text{se } \frac{\bar{y}_{h,t-1}^{dp} - \bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}}{\bar{y}_{h,t-1-\Delta}^{dp}} < 0 \text{ e } dr_{h,t-1} > dr_{h,t-1}^{max} \\ dr_{h,t-1}^{max}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (99)$$

$$dr_{h,t} = \frac{l_{h,t}^s}{\bar{y}_{h,t}^{dp} + dep_{h,t}^s} \quad (100)$$

Assim, o montante de novos empréstimos concedidos à classe, designado por $l_{h,t}^*$, é definido pelo mínimo entre a demanda por crédito da classe $l_{h,t}^d$ e o montante máximo de dívida $l_{h,t}^{max}$, como mostrado na expressão (101), abaixo.

$$l_{h,t}^* = \min(l_{h,t}^d, l_{h,t}^{max}) \quad (101)$$

3.2.3.12 Geração e apropriação de renda

O PIB é computado no modelo pela ótica da renda e é determinado pela soma dos lucros e salários agregados, PR_t e WG_t , respectivamente, com o total dos impostos indiretos, como exposto em abaixo(102), em que GDP_t é o PIB nominal no período t, tr_i é a tributação da firma i, $re_{i,t}$ é a receita auferida pela firma i e F é o número total de firmas.

$$GDP_t = PR_t + WG_t + \sum_{i=1}^F (tr_i \cdot re_{i,t}) \quad (102)$$

O agregado dos lucros, disposto em (103), é dado pela adição do somatório dos lucros líquidos de todas as F firmas com o somatório dos lucros de todos os B bancos, em que $pr_{i,t}^{nt}$ é o lucro líquido da firma i e $pr_{b,t}$ é o lucro do banco b.¹⁸⁶

O total dos lucros distribuídos, PR_t^{dis} na expressão (104), é analogamente dado pelo somatório em relação a todas as F firmas de $pr_{i,t}^{dis}$, que são os lucros distribuídos, com o

¹⁸⁶ Como já comentado, não são mostradas aqui as expressões referentes a determinação do lucro e do lucro retido dos bancos que devem ser consultados em Vianna (2021, p.118 e 119).

somatório em relação a todos os B banco de $pr_{b,t}^{dis}$ que denota os lucros distribuídos referentes ao banco b.

O agregado dos salários WG_t é dado por (105) e soma o salário efetivo de governo, $w_{g,t}^*$, com o somatório entre todas as F firmas dos salários pagos e do gasto em P&D $rnd_{i,t}$, em que $wr_{i,t}$ é a taxa salarial da firma i e $n_{i,t}$ é o número de empregados.

$$PR_t = \sum_{i=1}^F pr_{i,t}^{nt} + \sum_{b=1}^B pr_{b,t} \quad (103)$$

$$PR_t^{dis} = \sum_{i=1}^F pr_{i,t}^{dis} + \sum_{b=1}^B pr_{b,t}^{dis} \quad (104)$$

$$WG_t = \sum_{i=1}^F (wr_{i,t} \cdot n_{i,t} + rnd_{i,t}) + w_{g,t}^* \quad (105)$$

Desta forma, é possível chegar a apropriação da renda na forma da renda líquida disponível para a classe de renda h, designado por $y_{h,t}^{dp}$ na equação (106), cujo cálculo já desconta os impostos diretos incididos sobre os salários e lucros apropriados, exceto para o seguro desemprego que é considerado isento no modelo. Assim, tr_h é o imposto direto da classe de renda, ω_h é o parâmetro de apropriação do salário da classe, π_h é o parâmetro de apropriação do lucro e ub_t é o total do benefício de seguro desemprego no período.

$$y_{h,t}^{dp} = (1 - tr_h)(\omega_h \cdot WG_t + \pi_h \cdot PR_t^{dis}) + \omega_h \cdot ub_t \quad (106)$$

3.2.3.13 Entrada e saída de firmas

O MMM desde sua versão consolidada prevê a entrada e saída de firmas ao logo das trajetórias dinâmicas simuladas do modelo. Uma firma pode sair devido à baixa participação de mercado ou por alto endividamento e uma entrada pode ocorrer se houver crescimento real da demanda para o setor. No entanto, é na versão mais recente do modelo, aqui reproduzida, que se incorpora a possibilidade de entrada de novas firmas, uma a cada período a qualquer momento, além da adoção de modificações para a resolução de inconsistências entre fluxos e estoques em relação a entrada e a saída das firmas.¹⁸⁷

¹⁸⁷ Por exemplo, em Dweck (2006, p.121 e 122) ou em Possas e Dweck (2011, p.9) existia um número máximo de firmas, o número inicialmente determinado, e só aconteceria uma entrada se houvesse uma saída de uma firma

Assim, de modo a contornar inconsistências¹⁸⁸ de versões anteriores do modelo, as firmas antes da saída de mercado ou, em outras palavras, da ocorrência de falência devem quando possível realizar alguns pagamentos e transferências de forma a saldar suas dívidas até o limite de recursos disponíveis em conta de depósitos e, caso ainda restem recursos, distribuí-los às classes de renda seguindo-se a mesma forma em que são distribuídos os lucros de firmas e bancos. Se os recursos em conta não forem suficientes para o pagamento das dívidas, não ocorre distribuição às classes de renda e o montante remanescente de empréstimos é dado como inadimplente afetando o lucro do setor financeiro.

Ademais, o estoque de capitais da firma falida é incorporado a uma variável referente a disponibilidade de capital no setor e, por simplificação, não deprecia enquanto assim estiver categorizado, podendo ser adquirido por firmas entrantes. Os bancos não se utilizam de bens de capital como colateral, nem se interessam em revender o estoque de capitais das firmas falidas para saldar o crédito inadimplido.

A entrada de novas firmas pode ocorrer a qualquer momento se houver crescimento real da demanda pelos bens do setor, limitado a entrada de uma firma a cada período. A firma entrante inicia suas atividades seguindo grande parte das propriedades e características da firma que possui parcela do mercado na média do setor, em exceção a sua capacidade produtiva que é limitada pela disponibilidade de capacidade produtiva no setor e ao estoque de dívida que é circunscrito a um novo empréstimo de longo prazo necessário para adquirir os bens de capital de modo a atingir a referida disponibilidade de capacidade produtiva.¹⁸⁹

devido especificamente ao endividamento alto juntamente com a ocorrência de crescimento da demanda no setor.

¹⁸⁸ Em específico, Vianna (2021, p.125) comenta que nas versões precedentes quando uma firma falia e não era comprada por outra, tinha todo seu estoque de capital e de dívida perdidos no modelo, isto é, desapareciam.

¹⁸⁹ Vianna (2021, p.126) observa que esse crédito de longo prazo concedido à firma entrante possui taxa de juros fixa calculada sem aplicação de prêmio de risco específico à firma e amortizações fixas equivalentes ao tempo de vida útil do capital adquirido. Além disso, nas palavras do autor: “We also allow new firms to forcedly survive for two investment periods, meaning that new firms will not be eliminated due to low market-share or high indebtedness for two investment periods, giving them a chance to invest and buy the necessary capital goods to reach the average firm productive capacity in case of limited available productive capacity in the sector”.

3.2.4 Calibração do modelo

Haja vista a quantidade de equações apresentadas na seção anterior que compõem o modelo é de se esperar uma proporcionalmente elevada quantidade de variáveis exogenamente definidas e que, portanto, dependem de indicação de valor por quem realiza o exercício de simulação. Essas variáveis podem ser aquelas que determinam condições iniciais, ou seja, valores iniciais aplicados ao primeiro período de tempo da simulação, ou os demais parâmetros exógenos, como aqueles estruturais e os que definem de uma política, por exemplo. Dessa maneira, o método ou estratégia escolhido para designação de valores assumidos por essas variáveis é comumente chamada de calibração do modelo.

Adiciona-se que também é uma forma de calibração o estabelecimento no próprio código do modelo, ou como um parâmetro a ser definido, de valores estruturais que são influentes ao longo de toda a simulação, como, por exemplo, quantidades específicas de períodos para investimento ou para liquidação de dívida de curto ou longo prazo.

Especificamente, em Possas e Dweck (2004) não há explicação separadamente destacada no texto acerca do procedimento ou estratégia de calibração adotado. A designação quanto aos valores de variáveis exógenas, condições iniciais e especificações de parâmetros são dispersamente comentados ao longo do texto na exposição de suas formas funcionais e nas configurações das simulações preliminarmente executadas.

Igualmente, na publicação Possas e Dweck (2011) não é expressamente relatado quanto aos procedimentos de calibração realizados, além da menção a respeito das configurações de parâmetros e especificações pertinentes aos experimentos conduzidos no modelo que sugerem a designação de valores e condições iniciais semelhantes aos realizados em Dweck (2006), comentados a seguir. É, assim, no desenvolvimento do modelo em Dweck (2006) que há uma discussão dedicada aos procedimentos de calibração.

Em Dweck (2006) a calibração do modelo é estabelecida, em geral, pelo método de calibração indireta que é intimamente relacionado ao procedimento de validação, pois consiste em um processo iterativo do qual o modelo só está calibrado quando validado qualitativamente¹⁹⁰. Essencialmente, para os parâmetros que definem condições iniciais é

¹⁹⁰ Apesar desse procedimento de calibração indireta ter imediata relação com a validação é exposto aqui separadamente, na subseção 3.2.5 a seguir, a forma tomada para a validação do modelo pela autora em seu texto.

realizada a calibração com valores endogenamente calculados de modo a não impor uma tendência inicial à simulação do modelo. Para aqueles parâmetros em que há claro significado econômico, os quais há a disposição dados empíricos para referência, é utilizado opiniões fundamentadas para delimitar o intervalo de cada variável.¹⁹¹ Para os demais parâmetros que necessitam de calibração são realizados testes com diferentes valores, seguindo-se, em todos os casos mencionados, a avaliação quanto à validação subjacente ao método de calibração indireta (Ibid., p.136 e 137).

Em particular, a calibração das condições padrão (também chamada de simulação padrão ou *baseline*) do modelo segue para as condições de inicialização da simulação que a restrição financeira tem o montante de recursos líquidos determinados de forma que o fluxo de juros pagos e recebidos sejam iguais e impõe a igualdade das firmas em cada setor no que tange a preços e parâmetros relativos ao avanço técnico de processo e de produto e igualdade em todas as firmas para o parâmetro de expectativas¹⁹². Ademais, é estabelecido que o período de investimento corresponde a 6 períodos de produção¹⁹³ e é definido um determinado crescimento constante para renda do setor externo. Os gastos do governo são restritos superiormente por uma regra fiscal de meta de superávit fixa e inferiormente pelos salários de governo que crescem seguindo uma determinada taxa de crescimento vegetativo e há o estabelecimento de uma proporção fixa dos gastos, sendo 80% com salários e 20% distribuídos igualmente entre consumo e investimento de governo.¹⁹⁴

¹⁹¹ Estes são parâmetros referentes a coeficientes técnicos, proporções de gastos em relação ao PIB e alíquotas de impostos, por exemplo. Nas palavras da autora (Ibid., p.136, grifo no original) são “parâmetros e variáveis para os quais há um ‘*educated guess*’ baseado em dados empíricos ou em condições de consistência econômica que limitam os valores possíveis”.

¹⁹² É definido para a configuração referente a simulação padrão o valor de 0,3 para esse parâmetro de extrapolação das expectativas e, além disso, são realizados testes com os valores 0,5 e 0,7 para esse parâmetro em que se constata que “este parâmetro influencia a amplitude do ciclo, mas não afeta a tendência” (Ibid., p.166).

¹⁹³ Vale mencionar que é testado e comparado três diferentes valores para o período de investimento, 4, 6 e 8 períodos de produção, concluindo que “a alteração do período de investimento não afeta a tendência (...), mas afeta o ciclo significativamente” (Ibid., p.168).

¹⁹⁴ (Ibid., p.139, 140, 152 e 161). Como já aqui mencionado, especificações estruturais de determinados blocos ou setores do modelo e definições de caráter temporal, por exemplo, podem ser vistas como uma espécie de calibração feita diretamente no código do modelo. Assim, destaca-se que Dweck (Ibid., p.138) define seu modelo contendo quatro setores produtivos, dois de bens intermediários e um de cada para bens de capital e bens de consumo, tendo-se 20 firmas no setor de bens de consumos e 10 firmas em cada um dos outros setores. É também definida quatro classes de renda seguindo a discriminação adotada na Pesquisa de Orçamentos Familiares (POF) do IBGE, que separa por diferentes níveis em termos de quantidade de salários mínimos em classes A, B, C e D, de modo a “utilizar os dados da POF/IBGE para determinar os coeficientes das matrizes relativas à geração de renda e consumo” (Idem). Os salários são ajustados a cada quatro períodos de produção ao se repassar integralmente os ganhos de produtividade e a inflação do período.

Em Dweck, Vianna e Barbosa (2020) há indicação específica quanto as condições iniciais da simulação, como em relação, por exemplo, a composição dos gastos de governo e é textualmente assinalado que em sua simulação padrão é utilizada a calibração adotada nas versões anteriores de modo a definir o crescimento desejado dos gastos de governo como a média do crescimento do PIB da simulação padrão.¹⁹⁵ Também consta em apêndice ao texto a listagem dos valores designados para calibração de parâmetros setoriais, parâmetros macro e referentes às classes de renda e as condições iniciais.

Acompanhando Caiani et al. (2016) e Martins (2018), é adotada em Vianna (2021) a estratégia de calibração, previamente utilizada em uma versão simplificada do modelo em Possas, Dweck e Vianna (2020), baseada em princípios de equivalência entre variáveis oriundos de identidades SFC aliado a hipóteses quanto a configuração inicial do modelo. Isso além de garantir consistência entre fluxos e estoques desde o primeiro período (*time-step*) da simulação também resulta em um número reduzido de parâmetros e valores iniciais que necessitam serem externamente definidos (Vianna, 2021, p.134).

Especificamente, são estabelecidas hipóteses para a calibração do modelo relacionadas a condições de homogeneidade e simetria iniciais, de estado estacionário sem crescimento passado e de gastos autônomos do governo e do setor externo balanceados, explicadas a seguir. Essas hipóteses são tomadas no intuito de se definir condições iniciais que além de não aportarem algum viés específico à simulação possibilitam pelos cálculos endógenos a redução dos parâmetros sujeitos a calibração para se rodar a simulação.

A primeira hipótese, portanto, refere-se à imposição de homogeneidade e simetria iniciais entre todas as firmas de cada setor em relação aos preços, custos, mark-up, produtividade, qualidade e parcela de mercado apropriado. Com efeito, essa primeira hipótese tem o condão de reduzir o número de parâmetro ao número de setores ao invés de um parâmetro específico para cada firma em cada setor, em que médias, mínimos e máximos são todos iguais ao valor inicial, possibilitando que se efetue o cálculo endógeno, pela a calibração inicial, de maneira agregada setorialmente.

A segunda hipótese adotada estabelece para o primeiro período de tempo a ausência de crescimento passado, isto é, a simulação começa em um estado estacionário sem

¹⁹⁵ (Ibid., p. 192 e 193)

crescimento. Isso é feito de modo a afastar no início da simulação a atuação de variáveis que são ajustadas devido à influência de observações e variação passadas, como, por exemplo, as variáveis que representam expectativas, e traz especificamente como implicação que a simulação se inicie na condição das firmas não terem mudanças nos estoques, não haver atrasos nas entregas (*delivery-delay*) e não ocorrer investimento para expansão de capacidade produtiva, o que resulta em maior redução paramétrica para os cálculos endógenos de calibração. Vianna (2021, p. 133) observa que esse estado estacionário, onde há igualdade entre a demanda esperado, a produção e as vendas, não perdura além do primeiro período simulado, considerando a atuação dos mecanismos dinâmicos endógenos do modelo, e que, ademais, como boa prática são descartados os primeiros períodos da simulação.

A última hipótese de calibração se refere aos blocos de governo e do setor externo em que para ambos é submetida uma configuração inicial de equilíbrio, isto é, o governo inicia a simulação com seus gastos iguais a sua receita tributária e no setor externo as exportações somadas ao fluxo líquido de capital é de montante igual às importações.

Com o estabelecimento, assim, dessas três hipóteses é possível calcular endogenamente uma série de variáveis que, caso o expediente de calibração de valores iniciais mencionado não fosse adotado, necessitariam de designação exógena pelo usuário da simulação. Em específico, como consequência da imposição dessas hipóteses e pela adicional definição de períodos de investimento distribuídos de forma intercalada entre as firmas¹⁹⁶ só ocorre na inicialização da simulação o investimento em reposição de capital¹⁹⁷ pelo número de $F_{j,0}/\Gamma_j$ firmas, onde $F_{j,0}$ denota o parâmetro exógeno referente ao número inicial de firmas no setor produtivo j e Γ_j é o período de investimento do setor j em número de períodos de produção.

Definindo-se, adicionalmente, que um bem de capital deprecia fisicamente¹⁹⁸ por firma a cada período de investimento, a demanda inicial ao setor de bens de capital será

¹⁹⁶ Isso não é a rigor uma definição que diz respeito à calibração do modelo, mas uma característica incorporada propositadamente ao seu código. Nas palavras de Vianna (2021, p.b1): “To avoid synchronization and unrealistic peaks, not all firms decide their investment expenses at the same time. In fact, we divide the initial firms equally”.

¹⁹⁷ Descrita na seção anterior pela equação (8) em consonância com a regra de *payback* (9), ambos na subseção 3.2.3.2.

¹⁹⁸ O autor esclarece (Idem) que estipular que um bem de capital deprecia em cada período de investimento por firma segue o menor número possível e que esse número é também um parâmetro do modelo que poderia assumir outros valores. No entanto, não se encontra na tabela que apresenta os parâmetros do modelo (Ibid.

apenas o investimento em reposição agregado do número de firmas cujo período de investimento coincide com o primeiro período (*time-step*) da simulação se não houver demanda de governo e exportações de bens de capital¹⁹⁹.

Segue-se que ao se definir exogenamente as razões investimento privado sobre PIB, gastos de governo sobre PIB e exportações em relação ao PIB se chega endogenamente a razão consumo privado sobre PIB²⁰⁰. Tendo-se o investimento privado inicial, conforme definido acima pelo investimento em reposição, e a razão investimento sobre PIB se chega ao nível inicial de PIB nominal que, por sua vez, permite a determinação do nível de gastos de governo e de exportações em termos nominais. Com esses montantes pode-se definir a demanda inicial de governo aos setores produtivos, que na simulação padrão (ou condições padrões, também denominado de *baseline*, em inglês) do modelo é calibrado como sendo zero, e, para o setor externo, pode-se determinar as exportações iniciais de cada um dos setores.

Ainda sobre o governo, dada a razão inicial exogenamente definida entre dívida pública sobre o PIB e a taxa de juros básica inicial também exógena determina-se o montante inicial de juros da dívida pública e, como consequência da terceira hipótese, fica determinado que o total inicial de receita de impostos²⁰¹ deve ser igual ao gasto primário somado ao pagamento de juros e que a meta inicial de superávit primário é igual a quantia de juros da dívida sobre o PIB. Não há pagamento inicial de benefício de seguro desemprego já que o desemprego setorial de início é constante. Analogamente, para o setor externo, ao se designar exogenamente a razão inicial entre reservas internacionais sobre o PIB, a taxa de juros externa e a renda inicial externa e impondo-se, ainda pela terceira hipótese, equilíbrio no balanço de

p.134-137) a presença de tal parâmetro, o que pode significar que esse número referente a depreciação de bens de capital é definido diretamente no código do modelo.

¹⁹⁹ Vianna (Ibid., p.b9) destaca: “The goal of private investments in this no-growth steady state is to replace depreciated capital goods to keeps the stock of capital constant, as demand is assumed to be constant”.

²⁰⁰ Essas razões, comenta Vianna (Ibid., p.b2), podem ser definidas por dados empíricos ou por opiniões fundamentadas (*educated guess*) e podem servir para conformação do modelo de modo a representar distintas configurações econômicas: “Users can also use those parameters to calibrate our model to represent economies where the government size is bigger or smaler, or even calibrate for an economy more or less open to the external sector”.

²⁰¹ O montante da receita tributária é ajustado de forma a igualar a totalidade dos gastos por meio dos impostos diretos às classes de renda, explica Vianna (Ibid., p.b6): “to make sure that total taxes meet the amount obtained with those tax rates, we will use income classes as endogenous closure to the calibration, normalizing their tax rates”.

pagamentos se encontra o montante inicial de importações que é igual as exportações somadas ao fluxo líquido de capitais.

Dada a demanda ao setor de bens de capital, ao setor de bens de consumo e a demanda do setor externo e do governo, se houver, é, assim, determinado a demanda por bens intermediários haja vista o coeficiente técnico de insumos de definição exógena.

Dessa maneira, pode-se calcular as demais variáveis setoriais e das firmas, como, por exemplo, a produção, as vendas e capacidade produtiva. Ademais, por definição exógena de preços, taxa de lucros, proporção da receita em P&D, coeficiente técnico de insumos, taxa de juros e produtividade é determinado endogenamente os salários nominais, a quantia de salários pagos em cada setor e o montante de lucros, distribuídos às classes de renda.

Também, conseqüentemente, é feito o cálculo endógeno das variáveis do setor financeiro, que recebe inicialmente somente os juros e amortizações dos empréstimos de longo prazo devido aos investimentos em reposição de capital e os juros da dívida pública e paga os juros sobre as contas de depósitos.

Através desse expediente o espaço paramétrico sujeito à determinação exógena, ou seja, à calibração pelo usuário do experimento de simulação perfaz 24 parâmetros usados exclusivamente para o processo de inicialização e 77 outros parâmetros referentes a definições estruturais e políticas e de dinâmica, expectativa e elasticidade. Especificamente, é mencionado em Vianna (Ibid., p. 137) que sua versão do modelo busca calibrar as condições iniciais e demais parâmetros de forma mais próxima possível à versão consolidada e, portanto, entende-se que a definição dos valores para, pelo menos, parte dessas 101 variáveis tenha sido balizado pelas escolhas de calibrações das versões anteriores.

Um procedimento análogo de calibração, como já mencionado, é adotado em Possas, Dweck e Vianna (2020) para uma versão simplificado do MMM. As hipóteses para calibração das condições iniciais são praticamente as mesmas comentadas acima com a diferença de uma hipótese adicional sobre um nível inicial mínimo de consumo autônomo de modo a possibilitar o cálculo das demandas iniciais de cada setor, isso porque não há nessa versão investimento em reposição inicial (Ibid., p.8) como é procedido em Vianna (2021).²⁰²

²⁰² Em outras palavras, dada as hipóteses de homogeneidade e simetria iniciais, de estado estacionário sem crescimento passado e de gastos autônomos do governo e do setor externo balanceados é necessário impor-se,

A versão do modelo é chamada pelos autores de simplificada e estilizada a medida que é constituída por uma especificação estrutural mínima com três setores produtivos, duas classes de renda, a que recebe lucros e a que recebe salários, e dois blocos exógenos simplificados referentes ao governo e ao setor externo e um setor financeiro também simplificado. Essa configuração mínima sucede na remoção de uma quantidade significativa de parâmetros e variáveis em comparação às demais versões.²⁰³

Com a referida estratégia de calibração dessa versão simplificada do modelo o espaço paramétrico que necessita de definição pelo usuário da simulação totaliza 16 variáveis específicas à inicialização do modelo²⁰⁴ e, ao todo, 19 variáveis que requerem calibração. A definição dos valores, assim como em Vianna (2021), segue proximamente ao designado nas versões anteriores na busca por se replicar qualitativamente o quanto possível as características observadas nessas versões (Ibid., p.2).²⁰⁵

adicionalmente, um nível mínimo de consumo autônomo de modo a possibilitar o cálculo das demandas iniciais de cada setor e, assim, definir-se o valor dos parâmetros essenciais, ou seja, a calibração do modelo.

²⁰³ (Ibid., p.2, 4 e 15). Essa configuração é também chamada de estrutura central, do inglês *core structure*, pelos autores. Há, além disso, a simplificação adicional que não faz especificamente parte da estratégia de calibração de se estabelecer que os parâmetros específicos a cada setor são iguais o que diminui ainda mais o número de variáveis, facilitando a realização do procedimento de análise de sensibilidade (Ibid., p.7), comenta aqui mais abaixo.

²⁰⁴ Essas são: número inicial de firmas; coeficiente técnico de insumos; razão capital-produto; produtividade do trabalho inicial; salário inicial; mark-up inicial; taxa de lucros distribuídos; grau desejado de capacidade utilizada; proporção desejada de estoques; proporção da receita destinada a P&D; impostos indiretos; parcela dos salários em cada classe de renda; parcela dos lucros em cada classe; propensão a consumir de cada classe; propensão a importar de cada classe; e impostos diretos de cada classe. Vale lembrar, conforme dito na nota 203, que por simplificação os parâmetros de cada setor são dados como iguais entre os setores produtivos.

²⁰⁵ Número de parâmetros contabilizados pela leitura comparada da tabela 2, página 9, e tabela 5 da página 16 (Ibid.).

3.2.5 Validação do modelo

“A determinação das relações causais dentro de um modelo de simulação pode ser capaz de gerar insights relevantes à análise do mundo real. Sendo assim, a ênfase dos modelos evolucionários em replicar certos fatos estilizados, ou seja, que o modelo gere padrões similares ao observado no mundo real, deve ser uma pré-condição à utilização do modelo e não um fim em si mesmo.” (Dweck, 2006, p.129)

Entende-se que o procedimento de validação empírica do modelo consiste na identificação de padrões dinâmicos para determinadas variáveis do modelo, tanto a nível agregado como a nível do agente, que replicam qualitativamente comportamentos e tendências gerais inerentes a realidade de economias observados e verificados pela literatura econômica.

De início, vale mencionar que tanto em Possas e Dweck (2004) quanto em Possas e Dweck (2011) não há a expressa menção sobre validação do modelo, além de isoladas observações sobre suas propriedades dinâmicas de tendência de crescimento com ciclos relativamente estáveis, mas sem a referência a fatos estilizados, em específico. Vale mencionar que tais propriedade dinâmicas de reprodução de tendência com flutuações já se encontra presente na versão com os primeiros exercícios de simulação das trajetórias macrodinâmicas em Possas, Dweck e Reif (2004) em um modelo macroeconômico multissetorial, além de serem analiticamente identificados também na versão original do modelo em Possas (1984).

Trata-se, no entanto, de validação empírica qualitativa do MMM a partir de Dweck (2006). Assim, Dweck (2006) após levantar da literatura uma listagem de fatos estilizados²⁰⁶ a nível macro, de crescimento e ciclo, e de fatos microeconômicos identifica a partir deles as regularidades dinâmicas replicadas pelo modelo simulado através da análise da correlação cruzada e comportamentos dinâmicos descritos por gráficos. Assim, constata-se a reprodução de tendência positiva e de ciclos no comportamento do PIB²⁰⁷ e que as variáveis agregadas relativas ao consumo e ao investimento são pró-cíclicas, sendo o consumo de caráter defasado

²⁰⁶ São descritos 22 itens (Ibid., p.131-134) correspondentes a fatos estilizados que não serão reproduzidos aqui. A listagem, entretanto, é semelhante a exposta abaixo, retirada de Vianna (2021).

²⁰⁷ Ibid., p.138. Nas palavras de Dweck (Idem): “Como no modelo original de Possas (1984) e segundo a tradição de Kalecki (1954), o principal resultado macrodinâmico é o comportamento cíclico do PIB sobre uma tendência positiva (...). As flutuações são relativamente estáveis, ainda que o padrão seja mais complexo do que o obtido em modelos analíticos agregados”.

(*lagging*) e menos volátil que o produto e o investimento de maior volatilidade e liderado (*leading*) (Ibid., p.146 e 147).²⁰⁸

Na versão presente em Dweck, Vianna e Barbosa (2020) é reconhecida a capacidade do modelo em reproduzir fatos estilizados a nível micro e macro, como, por exemplo, crescimento endógeno autossustentado com ciclos, relativa volatilidade do PIB e dos componentes agregados de consumo e investimento, correlação cruzada entre variáveis a nível macro como emprego, agregado de estoques, salários, lucros, nível de preços e estoque de capital, investimento agregado em P&D de caráter pró-cíclico, heterogeneidade de produtividade e assimetria entre as firmas, com dependência da trajetória (*path-dependence*) e retornos dinâmicos crescentes no processo de mudança técnica.²⁰⁹

Por sua vez, Vianna (2021, p.137) indica que sua versão do modelo é capaz de replicar os mesmos resultados qualitativos da versão consolidada, presente em Dweck (2006) ou em Possas e Dweck (2011), muito embora seja admitido que mesmo ao se impor condições iniciais e parametrização muito próximas das adotadas em todas as mencionadas versões anteriores não é possível a exata replicação dos mesmos resultados em termos quantitativos devido a existência de diferenças estruturais entre essas versões.

Assim, é apontado que além de reproduzir os mesmos fatos estilizados da versão consolidada a versão desenvolvida em Vianna (2021) também tem o condão reproduzir fatos estilizados referentes ao setor financeiro. Abaixo, exibe-se a lista contendo os 23 fatos estilizados de crescimento, ciclo e relativos ao setor financeiro que as séries temporais de dados gerados pela simulação dessa versão do MMM têm a capacidade de reproduzir (Ibid., p. 138).

Os resultados das simulações são graficamente apresentados pelas médias de Monte Carlo em conjunto com seus respectivos intervalos de confiança de 100 execuções independentes da simulação, contendo 600 períodos (*time-steps*), onde são descartados os

²⁰⁸ Além disso, verifica-se que o grau de utilização da capacidade é pró-cíclico e liderado, o emprego é pró-cíclico e coincidente, dada que o mercado de trabalho é especificado sem que haja restrição de oferta de emprego ou qualquer rigidez, os gastos de governo são pró-cíclicos e defasados, dada a política fiscal determinada por uma meta fixa de superávit primário, as importações são pró-cíclicas e as exportações acíclicas, resultando em exportações líquidas ligeiramente anticíclicas, e os salários e lucros distribuídos são pró-cíclicos e coincidentes, tendo-se a parcela de salários contracíclica e a parcela de lucros pró-cíclicas (Ibid., p.148).

²⁰⁹ Ibid., p.195: “The model (...) is then able to reproduce at the same time a wide set of empirical regularities, like macro and micro stylized facts, while holding the set of parameters fixed”.

primeiros 200. Além desses gráficos são apresentadas uma tabela de correlações entre 34 variáveis agregadas selecionadas e o PIB, corrente e seus respectivos 4 períodos para frente e para trás, e uma tabela resumindo estatísticas de variáveis selecionadas, expondo a média, o desvio padrão e os valores mínimos e máximos.²¹⁰ É a partir da análise desse conjunto de informações que se pode constatar nas séries de dados gerados pela simulação a presença das regularidades inerentes à dinâmica de economias capitalistas, listadas abaixo. Alguns desses itens constantes da lista serão concisamente destacados a seguir.

- i) Tendência contínua de crescimento do produto (PIB);
- ii) Tendência contínua de crescimento da produtividade do trabalho;
- iii) Tendência contínua de crescimento da razão capital/ trabalho;
- iv) Taxa de lucro constante no longo-prazo;
- v) Ausência de tendência de longo-prazo da razão capital/ produto;
- vi) Parcela dos salários e parcela dos lucros são constantes no longo-prazo;
- vii) Consumo é pró-cíclico e defasado (*lagged*);
- viii) Investimento é pró-cíclico e liderado (*leading*);
- ix) Importações são pró-cíclicas e defasadas;
- x) Exportações são acíclicas e defasadas;
- xi) Exportações líquidas são contracíclicas e defasadas;
- xii) Utilização da capacidade é pró-cíclica e coincidente;
- xiii) Emprego, em horas de trabalho, é pró-cíclico;
- xiv) Salários são pró-cíclicos e defasados;
- xv) Lucros são pró-cíclicos e liderados;
- xvi) A parcela de salários é contracíclica;
- xvii) A parcela dos lucros é pró-cíclica;
- xviii) Inflação é pró-cíclica e defasada;
- xix) Estoque de dívida é pró-cíclico;
- xx) Lucros dos bancos são pró-cíclicos;
- xxi) Perdas por não pagamento de empréstimos são contracíclicas;
- xxii) Índice de alavancagem de bancos são fracamente pró-cíclicos; e
- xxiii) Índice de alavancagem de firmas são fracamente pró-cíclicos.

Nomeadamente, comportando os fatos estilizados descritos nos itens i), vii) e viii), acima, pode-se constatar a presença de crescimento endógeno e de ciclos, tendo-se o consumo como componente agregado do produto mais relevante e estável, defasado em um período em relação ao PIB, enquanto o investimento é o mais volátil e principal responsável pelos ciclos, liderado em um período em comparação ao produto. Ambos, consumo e investimento, são de caráter pró-cíclico.

²¹⁰ Conforme exposto nas tabelas 4.3 e 4.4 (*Ibid.*, p.141 e 142). Além disso, um conjunto extenso de gráficos é disposto no apêndice C da mesma publicação.

As importações são defasadas em um período e pró-cíclicas, seguindo o item ix) da lista, as exportações apresentam comportamento praticamente acíclico, item x), e as exportações líquidas são contracíclicas e defasadas em dois períodos, conforme consta no item xi). O grau médio de utilização da capacidade é fortemente pró-cíclico e quase coincidente, sendo liderado em um período, item xii). O emprego é pró-cíclico e coincidente, como descreve o item xiii), os salários e lucros totais são ambos pró-cíclicos e, respectivamente, defasados em um período e coincidentes, proximamente do indicado nos itens xiv) e xv), enquanto a parcela dos salários na renda total é contracíclica e a parcela dos lucros é pró-cíclica, ambas lideradas em um período, reagindo conforme os fatos estilizados nos itens xvi) e xvii).

A inflação medida pelo deflator do PIB e pelo índice de preços ao consumidor CPI são fracamente pró-cíclicas, como previsto no item xviii). O estoque total de empréstimos concedido por bancos é pró-cíclico e defasado em dois períodos, como estabelecido no item xix), os lucros dos bancos são fracamente pró-cíclicos e liderados em um período, conforme item xx), e os empréstimos inadimplidos tem comportamento contracíclico e coincidente, como consta no item xxi).

Ademais, não comportando nenhum fato estilizado listado acima, adiciona-se que os gastos de governo são coincidentes e apresentam a maior correlação com o PIB, tendo comportamento pró-cíclico devido à especificação na versão do modelo da regra fiscal flexível de superávit primário com metas para a taxa de endividamento público²¹¹.

Passando-se para a validação do modelo na versão presente em Possas, Dweck e Vianna (2020, p.8 e 9), é reiterado que essa versão simplificada também replica os mesmos fatos estilizados que a versão consolidada, relacionados ao ciclo e ao crescimento e também fatos estilizados a nível micro²¹².

Especificamente, lista-se para essa versão do modelo praticamente os mesmos fatos estilizados reproduzidos na listagem acima, com exceção daqueles relacionados ao setor

²¹¹ O regramento de política fiscal pode ser examinado na subseção 3.2.3.9, referente a especificação do governo no modelo, em específico pelas expressões (64), (64.1) e (64.2).

²¹² Os resultados que demonstram a replicação de fatos estilizados em nível micro não são destacadamente analisados no artigo por alegada limitação de espaço e tempo (Ibid., nota 9, p. 9).

financeiro e ao setor externo, dado que foi adotado nessa versão especificações simplificadas para bancos e para o setor externo.

Por fim, a validação é feita de maneira ao comentado acima, por meio gráficos ilustrando a trajetória dinâmica das variáveis simuladas, tabela de correlação cruzada em relação ao PIB com *leads* e *lags* e tabela com principais estatísticas de variáveis selecionadas²¹³.

3.2.6 Análise de sensibilidade

Dentre as diferentes versões do modelo MMM discutidas aqui no presente texto, é nas duas mais recentes que o procedimento de análise de sensibilidade global é empregado em complemento aos experimentos realizados em cada versão. Possas, Dweck e Vianna (2020) debuta ao agregar aos experimentos conduzidos em Dweck (2006)²¹⁴, sobre avanço técnico e crescimento, a avaliação pela decomposição de variância da variável de interesse propiciada pelo processo de análise de sensibilidade em uma versão bastante simplificada do modelo. Em Vianna (2020) o procedimento é empregado para o exame dos fatores relevantes para a inflação em uma versão de destacada elaboração, apresentada nas seções anteriores, contendo, além do setor produtivo, o setor financeiro, o governo e o setor externo.

Conforme já explorado na seção 2.3, acima, a análise de sensibilidade é realizada no sentido de verificar quais circunstâncias e especificações de parâmetros levam aos mesmos determinados resultados objetos dos testes realizados ou, em outras palavras, procura-se

²¹³ Constam na referida tabela 4 (Ibid., p.12) os valores médios, seus erros-padrões, desvio padrão e os resultados do teste *Augmented Dickey-Fuller* (ADF). Especificamente sobre o teste de não-estacionariedade ADF, é possível verificar pelos resultados dispostos na tabela que se aceita a hipótese nula de não-estacionariedade, independentemente do intervalo de confiança, para as variáveis consumo, taxa de lucro, taxa de utilização da capacidade, taxa de desemprego e estoque de capital como parcela do PIB, considerando os valores críticos tabelados do ADF para um modelo com constante e tendência contando com entre 250 e 300 observações. No entanto, não há análise no texto do artigo, além dos valores resultantes do teste ADF da tabela, sobre especificamente a presença de não-estacionariedade das variáveis selecionadas e sobre a motivação da exposição do teste no contexto de validação do modelo.

²¹⁴ Destaca-se que Dweck (2006, p.129 e 130) chega a abordar o tema de análise de sensibilidade, no entanto a considera como uma forma de identificar e discriminar a variabilidade estocástica da influência pela mudança de condições iniciais e especificação ou calibração de parâmetros: “não é possível deixar de lado uma análise de sensibilidade dos resultados obtidos. A análise de sensibilidade é uma forma de resolver o problema da combinação entre ‘acaso’ e ‘necessidade’ (...). Entretanto, ao invés de uma análise de Montecarlo extensa, para avaliar a influência das condições iniciais e dos parâmetros, propõe-se uma análise mais simples a partir de replicação da mesma configuração do modelo um número limitado de vezes, de forma a detectar a variabilidade estocástica” (grifos no original).

descrever o comportamento do modelo ao longo do espaço paramétrico ao se verificar a sensibilidade de um ou mais parâmetros de saída selecionados em relação aos demais parâmetros especificamente submetidos aos experimentos de simulação.

Especificamente, nas duas versões aqui tratadas o expediente adotado é similar ao utilizado em Dosi, Pereira e Virgillito (2017) e em Dosi et al. (2017b), no qual, em síntese, consiste em três etapas que compreendem i) amostragem (ou planejamento do experimento), ii) estimação do meta-modelo e iii) a decomposição da variância. Para a condução da decomposição da variância é utilizado o proposto por Salle e Yıldızoğlu (2014), com o planejamento do experimento por meio de hipercubo latino quase ortogonal (HLQO) e para a estimação do meta-modelo o método Kriging.

Desta feita, a versão desenvolvida em Possas, Dweck e Vianna (2020) é submetida a testes análogos aos realizados em Dweck (2006) que buscam verificar o efeito da mudança tecnológica, por meio da inovação de processo e de produto, no crescimento do produto agregado²¹⁵. Isso é feito ao se comparar os resultados de uma configuração específica que representa a simulação padrão (chamada de *baseline*), em que o componente autônomo do gasto é limitado ao consumo e ao investimento²¹⁶, com distintas configurações das quais se isolam os impactos da inovação de processo ao se desativar a inovação de produto, de um maior coeficiente de oportunidades tecnológicas e de uma menor restrição financeira.

O modelo sofre simplificações tanto no que concerne à especificação de sua estrutura, resultando em uma relevante redução de parâmetros em relação a versão consolidada em Dweck (2006) e Possas e Dweck (2011), quanto por meio do procedimento de calibração dos

²¹⁵ Em Dweck (2006, p.151-160), vale mencionar, os efeitos investigados não são apenas concernentes à tendência, mas também se comenta sobre efeitos dinâmicos nas demais variáveis agregadas e variáveis de cunho setorial.

²¹⁶ Nessa versão simplificada do modelo se adota, conforme já mencionado na subseção acima, uma especificação em que ambos os blocos externos se tornam induzidos. Para o governo os gastos são determinados por uma regra de meta de superávit primário. As exportações líquidas tornam-se induzidas dado a definição que o crescimento dos preços externos acompanha os preços domésticos e a renda externa cresce de acordo com o crescimento passado da renda doméstica: “Government expenses are simply determined by a surplus target rule, which turns government into an induced demand component. (...) [S]ectoral external prices grow as sectoral domestic prices grow and external income grows around past domestic income growth, subject to some randomness. That way, net exports become induced as well” (Possas, Dweck e Vianna, 2020, p.12 e 13).

valores de inicialização da simulação, tratado na subseção acima, que promove maior redução paramétrica.²¹⁷

Verifica-se, assim, que o modelo simplificado remanesce com dezenove parâmetros²¹⁸ enquanto o meta-modelo por Kriging é estimado com 17 parâmetros²¹⁹. Próximo desses números de parâmetros existem os hipercubos latinos quase ortogonais (HLQO) tabulados para $k = 16$ parâmetros com $n = 65$ pontos do experimento e com $k = 22$ parâmetros com $n = 129$ pontos. Embora possa-se ponderar que os dois parâmetros não incorporados ao Kriging, o período de investimento do setor e a proporção de ativos financeiros desejado no setor, possuem fraca relação com o experimento realizado, não há indicação quanto a motivação em se selecionar 17 variáveis tendo-se a disponibilidade do HLQO compatível com até 22 variáveis para a estimação do Kriging²²⁰. Todavia, entende-se que há custo computacional adicional ao se escolher configurações que comportam mais variáveis e que se deve sopesar em relação aos benefícios em termos de compreensão do experimento diante dos recursos computacionais disponíveis para condução do experimento.

Para a estimação do meta-modelo por Kriging, como explicado na subseção 2.3.3, é necessário definir-se o formato para a tendência global e para a função de correlação. Os autores definem, portanto, para o meta-modelo cuja variável resposta é o crescimento do PIB (*GDP Growth*) a tendência por um polinômio de primeira ordem e para a variável resposta que mede volatilidade do PIB (*GDP Volatility*) uma constante e, para ambos os casos, a função de correlação adotada é uma gaussiana. O trabalho efetua uma validação externa e cruzada do meta-modelo, conforme sugerido por Salle e Yıldızoğlu (2014), e expõe as medidas de coeficiente de preditividade Q^2 , para validação cruzada, e da raiz do erro quadrático médio,

²¹⁷ Nas palavras dos autores: “one methodological reason for the simplified version of the model presented here was to facilitate the sensitivity analysis by reducing the number of parameters and variables. (...) Additionally, the calibration procedure we have implemented made all initial values dependent on our structural parameters, eliminating initial lagged values from model inputs and reducing even further the parametric space”. (Possas, Dweck e Vianna, 2020, p.15)

²¹⁸ Os dezenove parâmetros são descritos na tabela 5 (ibid., p.16) com seus respectivos valores estabelecidos para o experimento dos mínimos e máximos do intervalo de variação e os valores do experimento para a simulação padrão (*baseline*), necessários para a análise de sensibilidade.

²¹⁹ A tabela 6 (ibid., p.17) apresenta os coeficientes estimados para o meta-modelo por Kriging. Na tabela, além dos coeficientes da tendência global seguem-se 17 linhas com os valores estimados para cada parâmetro, entendidos aqui como os coeficientes relativo à função de correlação do processo de desvio da tendência.

²²⁰ Como comentado, no presente modelo tanto o exercício de simulação quanto a amostragem pelo hipercubo latino são gerados pelo próprio software de simulação LSD, onde é necessário selecionar o método da amostra para análise de sensibilidade em que há a escolha entre diferentes dimensões de hipercubos latinos quase ortogonais já tabulados.

para a validação externa, das especificações dos meta-modelos escolhidas para realização da decomposição da variância.

Com o meta-modelo estimado realiza-se a decomposição de Sobol' cujos resultados no trabalho (Ibid., p.17 e 18) são textualmente resumidos e graficamente ilustrados pelo traçado em três dimensões da superfície de resposta do meta-modelo em relação a cada variável resposta de interesse em um eixo e as duas variáveis mais relevantes para a variância da variável resposta nos outros dois. Concretamente, pelo experimento se constata pela decomposição da variância que para ambas variáveis resposta do Kriging o parâmetro taxa de ajuste do consumo autônomo é a de maior relevância, correspondendo a 70% da variância da variável resposta, e o parâmetro razão entre capital-produto o segundo mais importante.

No contexto do experimento conduzido o intento da avaliação pela decomposição da variância é a constatação²²¹ que para crescimento do PIB a influência apenas da inovação de processo é não significativa, necessitando-se, para fins de crescimento, de um mecanismo de compensação pela demanda do sucesso de inovação, no caso, de produto, sintetizado no modelo pela variação do consumo autônomo.²²²

Passando-se para Vianna (2021), o procedimento de análise de sensibilidade é realizado especificamente para exploração dos parâmetros mais relevantes que definem os preços e a inflação no modelo (Ibid., p.150).²²³ Destaca-se que assim como na versão simplificada, tratada acima, é adotado em Vianna (Ibid., p.150) a hipótese simplificadora de parâmetros setoriais iguais para a realização da análise de sensibilidade, ou seja, são utilizados os mesmos valores para cada parâmetro nos três setores, reduzindo, assim, o número de

²²¹ Além das demais possíveis constatações conexas quanto às relações dinâmicas para qualquer combinação dos parâmetros. Por exemplo, verifica-se que o crescimento do PIB tende a aumentar com o decréscimo da razão capital-produto e é positivamente correlacionado com o coeficiente técnico dos insumos, i.e., maior coeficiente técnico resulta em maior demanda do setor de bens intermediários. Todos os outros parâmetros não apresentaram efeito significativo para o crescimento e a volatilidade do PIB (Ibid., p.19).

²²² Vale ressaltar a explicação da necessidade do efeito na variável de demanda autônoma de consumo do avanço técnico, como consequência lógica do Princípio da Demanda Efetiva (PDE), no seguinte trecho de Possas e Dweck (2011, p.6, grifo no original): “Kalecki (1991[1941]) ressalta os efeitos mais importantes do progresso técnico sobre o desenvolvimento econômico e ressalta que, sem a presença de um mecanismo concomitante pelo lado da demanda, o único efeito importante do aumento da produtividade do trabalho para o crescimento é a redução de uma possível restrição de oferta de trabalho. Nesse caso, o efeito do progresso técnico não seria aumentar a produção (demanda), mas sim reduzir o emprego”.

²²³ Vianna (Ibid., p.150) explica o foco nas variáveis relacionadas ao preço e a inflação para a verificação quanto à sensibilidade no excerto a seguir: “As we have already identified that external inflation is the main responsible for the average level of domestic inflation, we are interested in analyzing the domestic conditions which can amplify or reduce domestic inflation for a given growth rate of external prices”.

parâmetros. Essa simplificação é adotada devido ao alegado alto custo computacional necessário para condução das etapas referentes à análise de sensibilidade com um número grande de variáveis²²⁴.

Dessa forma, o expediente de análise de sensibilidade é conduzido envolvendo 10 variáveis selecionadas ligadas direta ou indiretamente ao mecanismo de preços atuante no modelo²²⁵ e para o planejamento do experimento se utiliza um HLQO com $k = 11$ parâmetros e $n = 33$ pontos do experimento, expansível (*stacking*) em até 65 pontos experimentais. O meta-modelo por Kriging, com a tendência no formato de uma polinomial de primeira ordem e função de correlação gaussiana, é validado por uma amostra de 10 pontos experimentais aleatórios adicionais que possibilitam avaliar quanto a validação externa, pelo erro quadrado médio, e a validação cruzada ao se calcular o coeficiente de preditividade Q^2 .

Tendo-se o índice de inflação ao consumidor CPI como variável resposta do Kriging estimado, a partir da subsequente decomposição da variância pelo cálculo dos índices de Sobol' é verificado que as variáveis mais relevantes para inflação são, nessa ordem, a propensão inicial a importar insumos, explicando por efeitos diretos 57% da variância do índice CPI, o peso do preço externo, parâmetro influente no cálculo do preço de referência para definição do preço da firma na equação (36), responsável por 20% da variância da inflação, e, em terceiro lugar, o parâmetro referente ao peso da estratégia de preço, também chamado de grau de monopólio, explicando 15% da variância do CPI.²²⁶

Para o caso da variável resposta do meta-modelo ser a volatilidade do índice de inflação CPI a decomposição da variância revela que o parâmetro mais expressivo, ainda em

²²⁴ Vianna (Idem) justifica a simplificação no seguinte trecho: “even in the minimum model structure of three sectors, one of each type, the number of possible combinations increases exponentially, and it would require much more time and computational power which we do not possess now”.

²²⁵ Não há menção sobre a execução de algum método de triagem das variáveis relevantes como, por exemplo, o método dos efeitos elementares, comentado aqui na seção 2.3. Os 10 parâmetros selecionado para a análise de sensibilidade são: a elasticidade preço de insumos importados, denotado por $\epsilon_j^{p,in}$ na equação (30) ; peso do preço externo, θ_j^x em (36); peso da estratégia de preço, θ_i na equação (35); o repasse inicial devido a inflação, $\xi_{j,t}^p$ na equação (26); o repasse inicial devido a produtividade, $\xi_{j,t}^p$ em (26); o repasse dos custos financeiros, $\xi_{i,t}^{fc}$ em (31); a propensão inicial a importar insumos, $i_{i,0}^{in}$ em (30); o fator de ajuste da taxa de câmbio, ψ^{er} na expressão (78); a sensibilidade à inflação pelo banco central, φ_{cb}^{cpi} em (77); e a elasticidade preço das exportações, $\epsilon_j^{p,x}$ na equação (82).

²²⁶ Vianna complementa (Ibid., p.152) que as duas principais variáveis, destacadas acima, são ligadas aos canais de política monetária associados ao custo devido a taxa de câmbio: “In an economy where the external prices are relevant to the price formation of domestic firms, and/or the structural share of imported inputs is high, monetary policy could have a positive impact on the inflation level, mainly via the Exchange rate-cost channel”.

termos de efeitos diretos, é o fator de ajuste da taxa de câmbio, presente na expressão (78) ao ajustar a taxa de câmbio ao resultado do balanço de pagamentos, responsável por 53% da variância da volatilidade da inflação ao consumidor, e, em segundo lugar, a propensão a importar insumos que explica 22% da variância da volatilidade da inflação, seguido pelo parâmetro de peso da estratégia de preço, correspondendo a 15% da variância.

Assim, esses resultados provenientes da análise de sensibilidade confirmam os experimentos conduzidos pelo autor que indicam a irresponsividade da política monetária tradicional no controle da inflação, dado que tanto seu nível quando a sua volatilidade tem como principal influência parâmetros estruturais ligados ao setor externo e ao câmbio.²²⁷

3.3 O MODELO SCHUMPETER MEETS KEYNES (K+S)

3.3.1 Introdução

A presente seção trata da família de modelos conhecida como *Schumpeter meets Keynes*, denominada sinteticamente pelo acrônimo K+S, e tem o objetivo de apresentar resumidamente uma descrição do modelo e suas principais formas funcionais, além de destacar a prática adotada em suas diferentes versões selecionadas no que tange a calibração, validação e análise de sensibilidade do modelo.

Nesse sentido, as próximas duas subseções, 3.3.2 e 3.3.3, abarcam uma concisa descrição do modelo e suas equações, respectivamente. Em seguida, a subseção 3.3.4 aborda a forma de calibração e validação do K+S, enquanto a subseção 3.3.5 trata do procedimento de análise de sensibilidade adotada no modelo.

3.3.2 Descrição do modelo

“[The model] embodies both a Schumpeterian engine and a keynesian one. The former rests in the generation of innovations by an ensemble of equipment producers which expensively search and endogenously differentiate in the technology they are able to master. The Keynesian engine has two parts: a direct one – through fiscal

²²⁷ Nas palavras do autor (Ibid., p.153-155): “We have identified that the external inflation can strongly affect the domestic inflation level, but the mechanisms through which the external price affects domestic price, that means the share of imported inputs, the relevant weight given by the firms to external price, and, implicitly in the last one, the share of exports in sectoral total demand, explain how the domestic inflation will react for given external inflation. Moreover, the exchange rate volatility, and thus the exchange rate policy, in combination with the monetary policy, can affect how volatile the inflation will be”.

policies – and an indirect one – via investment decisions and workers’ consumption” (Dosi et al., 2010, p.1755l).

O K+S se origina em Dosi et al. (2010) a partir de uma extensão do modelo presente em Dosi et al. (2006) e Dosi et al. (2008) e é definido como sendo um exercício de análise de desequilíbrio geral²²⁸ que liga teorias keynesianas de geração de demanda com teorias Schumpeterianas de crescimento econômico impulsionado pela tecnologia.²²⁹

Partindo da estrutura consolidada na publicação de 2010 a versão do K+S em Dosi et al. (2013, p.1599) expande o modelo ao incluir um setor financeiro com bancos que recebem depósitos e concedem crédito com o objetivo de estudar a relação entre a distribuição funcional da renda e políticas monetárias e fiscais. Com efeito, a versão do modelo é caracterizada como sendo a união de “Keynesian mechanisms of demand generation, a ‘Schumpeterian’ innovation-fueled process of growth and Minskian credit dynamics”.

As especificações referentes ao setor financeiro são modificadas em Dosi et al. (2015) com a inclusão de uma multiplicidade de bancos heterogêneos e o modelo é, por sua vez, ampliado na versão desenvolvida em Dosi et al. (2017a e 2017b) com a inclusão de um mercado de trabalho que conta com um processo descentralizado de alocação de trabalhadores nas firmas.

Para além das versões acima mencionadas o K+S conta com diversos outros desenvolvimentos do modelo, como, por exemplo, em Dosi et al. (2022) que conta com o advento de novos paradigmas tecnológicos e da emergência de novas indústrias no setor de bens de consumo ou em Lamperti et al. (2018) que integra à estrutura do K+S um setor de energia com firmas limpas e sujas e a emissão de gases de efeito estufa por todas as firmas de modo a avaliar a coevolução entre dinâmica econômica e mudança climática.

²²⁸ “Aggregate macro properties are emergente from the thread of interactions among economic agentes, without any ex ante consistency requirements amongst their expectations and their actions. In that sense, the model may be considered an exercise in *general disequilibrium analysis*” (Dosi et al., 2010, p.1765, grifos no original). O mesmo é reiterado na versão de 2017: “We build a general disequilibrium agent-based model, populated by heterogeneous firms and workers, who behave according to boundedly rational behavioural rules” (Dosi et al., 2017b, p.692).

²²⁹ Dosi et al., 2010, p.1748-49. Nas palavras dos autores: “The model (...) shares evolutionary roots (...) [and] tries to explore the feedbacks between the factors influencing aggregate demand and those driving technological change. By doing that we begin to offer a unified framework jointly accounting for long-term dynamics and higher frequencies fluctuations” (Idem).

Concretamente, o K+S é formado por dois setores produtivos constituídos por firmas heterogêneas, um que produz bens de consumo e o outro fabrica bens de capital. São, assim, agentes do modelo as N_1 firmas de setor de bens de capital, as N_2 firmas do setor de bens de consumo, L^S trabalhadores que consomem toda a renda recebida, um banco ou n bancos idênticos²³⁰ que compõem o setor financeiro e o bloco formado pelo governo e banco central.

As firmas do setor de bens de consumo produzem um bem homogêneo²³¹ utilizando capital, na forma de máquinas e equipamentos de safras de produtividade do trabalho distintas, e trabalho empregado seguindo retornos constantes de escala, pagando salários aos trabalhadores que são contratados em proporção ao nível desejado de produção e da produtividade média do trabalho incorporada ao capital instalado. A cada período cada firma isoladamente determina seu nível de produção desejada de acordo com uma regra de expectativas adaptativas da demanda baseada nas vendas efetivas passadas. Cada firma fixa o preço de seus produtos ao aplicar um mark-up variável ao seu custo unitário médio e, por sua vez, o mark-up evolui de acordo com a variação da parcela de mercado apropriado pela firma. A produção desejada e grau desejado de utilização da capacidade definem o estoque desejado de capital que quando superior ao estoque de capital instalado corrente enseja a decisão de investimento da firma em expansão da capacidade produtiva. Além do investimento em expansão também pode ocorrer investimento em reposição de capital depreciado de acordo com uma regra de período de *payback*. O investimento se dá pela encomenda de novas máquinas às firmas de bens de capital, com pagamento antecipado por meio dos recursos líquidos da firma, preferencialmente, e crédito bancário, que são entregues e instalados para entrar em operação no período seguinte. A firma conhece apenas parte dos fornecedores de bens de capital presentes na economia e escolhe de qual adquirir ao comparar o preço e a produtividade das máquinas anunciadas.

No setor produtor de bens de capital as firmas fabricam sob encomenda máquinas e equipamentos de diferentes safras tecnológicas empregando apenas trabalho para a produção e o preço das máquinas produzidas é definido por uma regra de mark-up fixo para

²³⁰ Seguindo-se a especificação do setor financeiro presente em Dosi et al. (2013, p.1603-04). Em Dosi et al. (2015, p.170-71) é especificado o setor financeiro contendo B bancos heterogêneos.

²³¹ Conforme a configuração do modelo apresentadas em Dosi et al. (2017b, p.694) e versões anteriores. Vale mencionar que a versão do K+S desenvolvida em Dosi et al. (2022, p.5-6) é previsto a diferenciação da qualidade dos bens de consumo, ainda considerado como homogêneo, e a distinção de duas indústrias que coexistem no setor, uma que produz bens básicos, não duráveis, e outra que produz bens de luxo duráveis.

todo o setor sobre o custo unitário de produção. Ademais, as firmas alocam parte de suas receitas de vendas para contratação de trabalhadores voltados à pesquisa e desenvolvimento (P&D) cujos recursos são repartidos entre o esforço de inovação, para o alcance de fronteira de produtividade do trabalho incorporada à máquina superior à corrente, e de imitação da tecnologia de firmas competidoras do setor. Assim, o sucesso em P&D possibilita o surgimento de nova safra tecnológica de máquinas mais produtivas e/ou mais baratas. Para realizar as vendas, os preços e as respectivas produtividades das máquinas produzidas são anunciadas aos antigos compradores e a uma proporção de novos potenciais clientes²³².

No mercado de trabalho²³³, os trabalhadores se inscrevem em um subconjunto aleatório de filas de emprego cuja probabilidade em relação as filas de cada firma demandante guarda proporção com a parcela de mercado apropriado por elas, podendo os trabalhadores se inscreverem ao mesmo tempo em mais de uma fila. As firmas, por sua vez, selecionam para contratação dos trabalhadores postulantes às vagas quando o salário requisitado por eles for menor que o salário oferecido pela firma, no limite inferior definido pela demanda por trabalho da firma e superiormente pela oferta de trabalhadores postulantes à vaga.

No setor financeiro os bancos proveem empréstimos às firmas de bens de consumo de modo a financiar a produção e o investimento e recolhem recursos líquidos em contas de depósito. É prevista a possibilidade de racionamento de crédito, tendo-se o volume limitado tanto por firma quanto em relação ao volume total emprestado na economia. A taxa de juros dos empréstimos é marcada acima da taxa básica da economia e a remuneração das contas de depósitos é definida por marcação abaixo da taxa básica.

O bloco que representa o governo tem a atribuição de pagar benefícios de seguro desemprego definido como uma parcela do salário médio corrente, que constitui o único gasto de governo nas versões do modelo aqui consideradas, e arrecada pela tributação dos lucros das firmas por uma alíquota fixa. Há, ademais, o estabelecimento de um salário mínimo que evolui de acordo com uma parcela da variação produtividade do trabalho agregada.

²³² Os autores explicam como as firmas de bens de capital divulgam seus produtos, sob condições de informação imperfeita, seguindo a analogia do envio de folhetos para clientes antigos e para parte de novos clientes: “each firm sends a ‘brochure’ with the price and the productivity of its offered machines to both its historical (...) clients and to a random sample of potential new customers” (Dosi et al., 2010, p.1752, grifo no original).

²³³ Seguindo a especificação desenvolvida em Dosi et al. (2017a, p.168-70), referente a simulação padrão (*baseline*), relatada a seguir na subseção que trata das equações do modelo.

A cronologia de eventos do modelo que descreve a sequência de acontecimentos que ocorrem em cada período discreto de tempo (*timeline of events*) é concisamente reportada a seguir. Em primeiro lugar, ocorre a entrega dos bens de capital adquiridos no período anterior e, em seguida, as firmas de bens de capital realizam as etapas referentes ao esforço em P&D e anunciam seus produtos para serem adquiridos pelas firmas de bens de consumo. A seguir, as firmas de bens consumo definem seus níveis de produção, investimento e as contratações e demissões de trabalhadores, alocam, para tanto, os recursos necessários e, caso seja preciso, requerem empréstimos junto ao banco. Tendo-se esses níveis definidos, as firmas realizam as encomendas de máquinas, caso haja investimento, os trabalhadores se inscrevem nas filas para vagas de emprego e os salários correntes são ajustados. Seguidamente, as vagas de emprego são total ou parcialmente preenchidas, as firmas pagam os salários e o governo coleta os impostos e paga os benefícios de seguro desemprego. As vendas no setor de bens de consumo são realizadas de acordo com a parcela de mercado que evolui seguindo a competitividade de cada firma. Em seguida, as firmas de ambos os setores auferem seus lucros e pagam, caso haja, suas dívidas. As firmas com parcela de mercado próximo a zero ou ativos líquidos negativos entram em falência e são substituídas por firmas entrantes. Por fim, as variáveis agregadas são calculadas e se reinicia o ciclo cronológico no período seguinte.²³⁴

3.3.3 As equações do modelo

Complementarmente as descrições do K+S realizadas acima, são reproduzidas na presente subseção as principais formas funcionais subjacentes ao modelo que regem os comportamentos dos agentes e suas interações, por exemplo. Com esse intuito, as equações são apresentadas seguindo a versão do modelo e a notação estabelecida em Dosi et al. (2017a e 2017b), exceto quando diferentemente pontuado.

Vale observar que as expressões, extraídas das publicações referentes às versões do modelo, são aqui reproduzidas com o intento ilustrativo dos comportamentos submetidos à simulação, dado que o modelo em suas versões mais recentes tem suas simulações

²³⁴ A cronologia de eventos aqui resumida segue o estipulado em Dosi et al. (2020, p.169). Vale comentar que se encontram pontuais diferenças na cronologia de eventos entre as publicações das distintas versões do modelo.

executadas através do *software* LSD onde todas suas equações codificadas na linguagem do programa.²³⁵

Assim, segue-se as equações do K+S expostas separadamente em subseções referentes ao setor de bens de consumo, o setor de bens de capital, o bloco referente ao governo, o setor financeiro, o mercado de trabalho, a entrada e saída de firmas e o cômputo das variáveis agregadas.

3.3.3.1 O setor de bens de consumo

Para produzir as firmas do setor de bens de consumo, indicadas de forma notacional pelo subscrito j , utilizam-se de capital de sua capacidade instalada, formada por máquinas de diferentes safras de produtividade, e de trabalho contratado proporcionalmente ao nível desejado para a produção.

Assim, o nível de produção desejada em cada firma que produz bens de consumo, denotado por $Q_{j,t}^d$ na expressão (a1) abaixo, depende da demanda esperada pela firma, denotado por $D_{j,t}^e$, e por uma parcela dela voltada a manutenção dos estoques em nível desejado, determinado pelo produto dessa última com o parâmetro ι , $N_{j,t}^d = \iota \cdot D_{j,t}^e$, descontando do estoque de bens finais do período anterior representado por $N_{j,t-1}$.²³⁶

Para demanda esperada, representada de forma ilustrativa pela expressão (a2), abaixo, como uma função g das demandas efetivas (as encomendas à firma) observadas considerando até h períodos anteriores, é argumentado que pouco importa o preciso formato

²³⁵ Adiciona-se que em Dosi et al. (2013, p.1605) é informado que as equações subjacentes ao modelo são implementadas em linguagem C++ em formato matricial sem, no entanto, explicitar mais detalhadamente a forma e interface adotada para execução das simulações.

²³⁶ A expressão da produção desejada segue o mesmo formato da equação do ciclo de estoques em Gandolfo (1980, p.121), conforme também comenta Dweck (2006, p.97) a respeito da equação de produção programada, exposta aqui em (1) na seção anterior, do modelo MMM.

adotado para demanda esperada²³⁷, muito embora quando expressamente especificado se utilize simplificadamente a demanda observada no período anterior²³⁸.

$$Q_{j,t}^d = (1 + \iota)D_{j,t}^e - N_{j,t-1} \quad (a1)$$

$$D_{j,t}^e = g(D_{j,t-1}, D_{j,t-2}, D_{j,t-h}), 0 < h < t \quad (a2)$$

A definição do nível de produção desejada, exposta acima, enseja a determinação da demanda desejada por trabalho²³⁹, representado por $L_{j,t}^d$ na expressão (a3), para, deste modo, viabilizar o processo de produção do bem e é calculado ao dividir a produção desejada pela produtividade média do trabalho do estoque de capital corrente da firma j , $A_{j,t}$. Adiciona-se que a dinâmica inerente ao mercado de trabalho incorporada ao modelo, como, por exemplo, a contratação e os salários, é exposta separadamente em subseção mais adiante.

$$L_{j,t}^d = \frac{Q_{j,t}^d}{A_{j,t}} \quad (a3)$$

Capacidade de produção da firma depende de seu estoque corrente de capital instalado composto por máquinas heterogêneas de diferentes produtividades associadas, representado pelo conjunto $\Xi_{j,t}$ das máquinas da firma j no período t . Portanto, o estoque corrente de capital da firma $K_{j,t}$ é definido, em termos de capacidade produtiva, pela expressão (a4), abaixo, em que $g_{j,t}(\cdot)$ representa uma função que reporta a capacidade produtiva de cada máquina instalada e A_i^τ denota cada máquina produzida pela firma de bens de capital i da safra τ .²⁴⁰

²³⁷ Dosi et al. (2010, p.1752) ao indicar que utiliza para as simulações, por simplificação, a demanda passada como regra de expectativa, isto é, $D_{j,t}^e = D_{j,t-1}$, comenta que diferentes formatos mais sofisticados para as expectativas foram testados em Dosi et al. (2006), resultando na ausência de impacto significativo nas taxas de crescimento e estabilidade devido a diferentes especificações: “We found that increasing the computational capabilities of firms does not significantly change either the average growth rates of the stability of the economy”. A mesma argumentação é também indicada em Dosi et al. (2017b, p.695): “The exact type of adaptive expectation rule does not significantly affect the performance of the firma and of the system as a whole. If anything, more sophisticated ones might worsen the measures of performance”.

²³⁸ O que ocorre especificamente em Dosi et al. (2010, p.1752) e Dosi et al. (2013, p.1621), por exemplo, enquanto que em Dosi et al. (2017b, p.695) e Dosi et al. (2020, p.166) não é exposto no texto o formato adotado nas simulações para a expectativa adaptativa, referindo-se apenas em ambos os casos, já comentado na nota 237, a não relevância do formato da regra para o desempenho das firmas e da economia.

²³⁹ Conforme especificado em Dosi et al., 2017b, p.695, na versão do modelo voltada à discussão dos efeitos de reformas específicas no mercado de trabalho.

²⁴⁰ As expressões para a capacidade produtiva e estoque desejado de capital, mostrado a seguir, são reproduzidas conforme dispostas em Dosi et al. (2013, p.1622).

$$K_{j,t} = \sum_{A_i^T \in \Xi_{j,t}} g_{j,t}(A_i^T) \quad (a4)$$

Por sua vez, dado o nível de produção desejada e o grau desejado de utilização da capacidade, denotado por cu^d , define-se o estoque de capital desejado da firma, $K_{j,t}^d$, pela razão (a5), abaixo.

$$K_{j,t}^d = \frac{Q_{j,t}^d}{cu^d} \quad (a5)$$

O estoque corrente de capital pode ser diferente do desejado. Nesse sentido, a decisão de investimento em expansão da capacidade produtiva da firma é no modelo definida, a cada período, pela diferença entre o estoque de capital desejado e o corrente. Isto é, conforme explícito pela igualdade (a6), as firmas investem o montante $EI_{j,t}^d$ para expansão da capacidade pelo aumento do estoque de capital a cada período na medida da diferença entre o nível desejado de estoque de capital, $K_{j,t}^d$, computado em termos de nível de produção desejada, e o estoque corrente de capital instalado $K_{j,t}$.²⁴¹

Há também previsão no K+S de investimento em reposição de capital depreciado e/ou obsoleto que, para tanto, segue uma regra de tempo de retorno do valor gasto (*payback period*), designado por $RS_{j,t}$ e explicitado na expressão (a7), abaixo, em que a cada período a firma j decide repor o bem de capital $A_i^T \in \Xi_{j,t}$ ao compará-lo com uma máquina nova em termos de seu preço e o custo unitário associado ao seu uso na produção. Ou seja, para cada máquina do estoque de capital da firma, se a razão entre o gasto com a aquisição de nova máquina, dado por seu preço p_t^* , no numerador, com a diferença entre os custo unitário de produção usando a máquina A_i^T já instalada, denotado por $c_{j,t}^{A_i^T}$, e o custo unitário associado a máquina nova $c_{j,t}^*$, no denominador, for menor ou igual ao parâmetro b a firma decide adquirir a máquina nova repondo a instalada.²⁴²

²⁴¹ Destaca-se que é indicado em Dosi et al. (2010, p.1752; 2013, p.1622; e 2015, p.184) que é estabelecido no modelo um limiar máximo fixo para o crescimento de capital da firma. No entanto, esse valor não está presente nas tabelas que descrevem os parâmetros calibrados das simulações padrões de cada publicação, o que leva a crer que tal teto estipulado para crescimento do capital é definido diretamente no código do modelo. Uma outra pertinente observação, tecida em Dosi et al. (2017a, p.169), distingue que o investimento em expansão da capacidade é realizado após o investimento em reposição de maquinário depreciado.

²⁴² Também é previsto (Dosi et al., 2010, p.1752) para além da regra de *payback period* a reposição do capital que depreciou totalmente após η períodos, em que η é um parâmetro a ser definido na calibração.

$$EI_{j,t}^d = K_{j,t}^d - K_{j,t} \quad (a6)$$

$$RS_{j,t} = \left\{ A_i^\tau \in \mathcal{E}_{j,t} : \frac{p_t^*}{c_{j,t}^{A_i^\tau} - c_{j,t}^*} \leq b \right\} \quad (a7)$$

Assim, o montante total desejado para investimento da firma a cada período, $I_{j,t}$, é formado pela soma do investimento em expansão com o investimento em reposição, conforme mostrado acima.

O custo unitário de produção mencionado na regra de *payback* em (a7), $c_{j,t}^{A_i^\tau}$, é determinado, para cada máquina do estoque de capital, pela razão entre o salário pago $w_{j,t}$ e a produtividade do trabalho incorporado na máquina da safra τ , denotado por A_i^τ , conforme a igualdade (a8).

$$c_{j,t}^{A_i^\tau} = \frac{w_{j,t}}{A_i^\tau} \quad (a8)$$

Chega-se, dessa forma, no custo unitário de produção médio da firma, representado por $c_{j,t}$, ao se calcular a média dos custos unitários de cada máquina do estoque de capital da firma, como mostrado em (a8), acima.

A firma de bens de consumo define o preço de seus bens produzidos ao aplicar um mark-up variável ao custo unitário médio de produção, como mostrado em (a9), onde $p_{j,t}$ é o preço dos bens produzidos pela firma j e $\mu_{j,t}$ é o respectivo mark-up.

O mark-up, por sua vez, tem sua evolução estabelecida, de acordo com a expressão (a10), pela variação da parcela de mercado apropriada pela firma, o *market-share*, multiplicado pelo parâmetro exogenamente definido v , $0 < v < 1$, em que $f_{j,t-1}$ é a parcela de mercado apropriado pelo firma no período $t-1$.

$$p_{j,t} = (1 + \mu_{j,t})c_{j,t} \quad (a9)$$

$$\mu_{j,t} = \mu_{j,t-1} \left(1 + v \cdot \frac{f_{j,t-1} - f_{j,t-2}}{f_{j,t-2}} \right) \quad (a10)$$

A evolução da parcela de mercado da firma segue uma dinâmica do tipo *replicator*²⁴³, sintetizada pela expressão (a11), abaixo, que define a parcela de mercado pelo indicador de competitividade da firma, $E_{j,t}$, em relação à média no setor \bar{E}_t , apresentado na expressão (a13), ajustado ao parâmetro exógeno $\chi > 0$.

A competitividade corrente da firma, estabelecida em (a12), é definida baseada em seu preço praticado no período anterior, multiplicado pelo parâmetro ω_1 , e por $l'_{j,t-1}$ que representa a demanda não atendida, quando a produção da firma é menor que a demanda por seus bens, ajustado pelo peso ω_2 , em que ω_1 e ω_2 são parâmetros positivos.

$$f_{j,t} = f_{j,t-1} \left(1 + \chi \cdot \frac{E_{j,t} - \bar{E}_t}{\bar{E}_t} \right) \quad (a11)$$

$$E_{j,t} = -\omega_1 \cdot p'_{j,t-1} - \omega_2 \cdot l'_{j,t-1} \quad (a12)$$

$$\bar{E}_t = \frac{1}{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} E_{j,t} \cdot f_{j,t-1} \quad (a13)$$

Tendo-se efetuado a produção e a realização das vendas, seguindo a proporcionalidade estabelecida pela determinação da parcela de mercado apropriada por cada firma do setor de bens de consumo, mostrado na equação (a11), as firmas podem contabilizar suas receitas e lucros auferidos.

Assim, a receita recebida pela firma é representada por $S_{j,t}$ e explicitada em (a14), onde $D_{j,t}$ é a venda efetivamente ocorrida em termos reais²⁴⁴. O lucro da firma, $\Pi_{j,t}$ na expressão (a15), é computado ao se subtrair da receita da firma o produto entre o custo unitário de produção e a quantidade produzida, $c_{j,t}Q_{j,t}$, e o custo associado às dívidas contraídas, o termo $r \cdot Deb_{j,t}$, onde r é a taxa de juros e $Deb_{j,t}$ representa o estoque de dívida da firma.²⁴⁵

²⁴³ Dosi et al. (2010, p.1753) chamam a equação adotada para a evolução do *market-share* como uma dinâmica “quasi replicator”, diferenciando-a de seu uso originalmente em Silverberg et al. (1988) por abranger também valores negativos que poderiam representar situações de falência das firmas.

²⁴⁴ Definida por $D_{j,t} = f_{j,t} \cdot C_t$, onde C_t é o agregado do consumo de bens de consumo.

²⁴⁵ Essa formulação encontra-se presente em Dosi et al. (2010, p.1754; e 2013, p.1622). Já em Dosi et al. (2015, p.170) o lucro da firma soma à receita percebida os juros obtidos pela remuneração dos ativos líquidos da firma, ou seja, a remuneração da conta de depósitos pelo banco, tornando a expressão (a15) na forma $\Pi_{j,t} = S_{j,t} + r^D NW_{j,t-1} - c_{j,t}Q_{j,t} - r_{j,t}^{deb} \cdot Deb_{j,t}$, onde r^D e $r_{j,t}^{deb}$ são, respectivamente, as taxas de juros da conta de depósitos e dos empréstimos, e tributa os lucros retidos para contabilizá-los no estoque de ativos líquidos, em que (a16) fica no formato $NW_{j,t} = NW_{j,t-1} + (1 - tr)\Pi_{j,t} - cl_{j,t}$, onde tr é a alíquota de imposto. Vale

$$S_{j,t} = p_{j,t} \cdot D_{j,t} \quad (a14)$$

$$\Pi_{j,t} = S_{j,t} - c_{j,t}Q_{j,t} - r \cdot Deb_{j,t} \quad (a15)$$

O estoque de ativos líquidos da firma, $NW_{j,t}$, segue a evolução prescrita em (a16), abaixo, que considera que o montante integral de lucros auferidos pela firma é retido, descontando do montante de recursos internos direcionados ao gasto com investimento, denotado por $cI_{j,t}$.

$$NW_{j,t} = NW_{j,t-1} + \Pi_{j,t} - cI_{j,t} \quad (a16)$$

3.3.3.2 O setor de bens de capital

As firmas do setor produtor de bens de capital, indicadas pelo subscrito i , produzem máquinas de diferentes safras tecnológicas, empregando apenas de trabalho, sob encomenda, utilizadas no processo produtivo das firmas do setor de bens de consumo, recebendo adiantadamente o pagamento pelo capital a ser entregue no período seguinte. Ademais, as firmas de bens de capital alocam recurso para avanço técnico, seja em inovação ao alcançar uma fronteira tecnológica de produtividade incorporada à máquina e produtividade do trabalho do processo de produção da firma i , seja em imitação da tecnologia de firmas competidoras.

As máquinas são feitas por meio de processo de produção com produtividade do trabalho B_i^T e, para tanto, empregam trabalho contratado para produção do capital encomendado pagando salário $w_{i,t}$. Assim, o cômputo do custo unitário de produção das firmas do setor de bens de capital é dado pela razão (a17), abaixo, e a formação do preço da máquina produzida segue uma regra de mark-up fixo sobre o custo unitário, apresentado pela expressão (a18), em que $\mu_1 > 0$ é o mark-up fixado do setor.

$$c_{i,t} = \frac{w_{i,t}}{B_i^T} \quad (a17)$$

$$p_{i,t} = (1 + \mu_1)c_{i,t} \quad (a18)$$

observar, no entanto, que a versão do modelo em Dosi et al. (2013, p.1604) estipula uma taxa de juros para a remuneração dos depósitos das firmas, apresentada aqui mais a diante na seção sobre o setor financeiro, muito embora não a considere na equação da evolução do estoque dos ativos líquidos que na publicação segue a mesma expressão (a16) aqui mostrada.

Tendo-se realizado as vendas e computadas as receitas o lucro das firmas de bens de capital, $\Pi_{i,t}$ na equação (a19), é calculado ao se descontar da receita $S_{i,t}$ o gasto com a produção realizada, $c_{i,t} \cdot Q_{i,t}$, e o gasto direcionado à pesquisa e desenvolvimento explicado mais a frente, representado por $RD_{i,t}$.

$$\Pi_{i,t} = S_{i,t} - c_{i,t} \cdot Q_{i,t} - RD_{i,t} \quad (a19)$$

O estoque de ativos líquidos da firma i , $NW_{i,t}$, evolui conforme a expressão (a20), abaixo, onde a totalidade do lucro $\Pi_{i,t}$ é retido como recursos internos à firma.²⁴⁶

$$NW_{i,t} = NW_{i,t-1} + \Pi_{i,t} \quad (a20)$$

Ademais, a firma de bens de capital é o *locus* onde ocorre endogenamente o avanço técnico no modelo K+S.²⁴⁷ Para tanto, a firma aloca parte de sua receita das vendas do período anterior, $S_{i,t-1}$, para pesquisa e desenvolvimento, denotado por $RD_{i,t}$, na proporção dada pelo parâmetro setorial²⁴⁸ exógeno ν , $0 < \nu \leq 1$, expressos na equação (a21), contratando trabalho na quantidade $L_{i,t}^{R\&D}$, como disposto em (a22), pagando salários $w_{i,t}$.

$$RD_{i,t} = \nu \cdot S_{i,t-1} \quad (a21)$$

$$L_{i,t}^{R\&D} = \frac{RD_{i,t}}{w_{i,t}} \quad (a22)$$

Os recursos voltados a pesquisa e desenvolvimento são repartidos entre tentativas de avanço técnico por inovação e por imitação em termos de trabalhadores²⁴⁹ dedicados a cada específico esforço, distinguido pelo parâmetro $\xi \in [0,1]$, presente em (a23) e (a27).

O esforço voltado a inovação segue duas distintas etapas em que a primeira consiste em um lance estocástico de uma distribuição de Bernoulli que determina o sucesso ou o fracasso do esforço inovativo e a segunda é composta, no caso da ocorrência de sucesso, da

²⁴⁶ Aqui vale comentar que nas versões do modelo K+S que retratam expressamente a atuação do governo há a cobrança de impostos sobre o lucro das firmas, como já pontuado na nota 245.

²⁴⁷ Dosi et al. (2017b, p.694).

²⁴⁸ Dosi et al. (2010, p.1751) argumentam sobre a razoabilidade de estabelecer o mesmo parâmetro de parcela da receita voltada para P&D para todas as firmas do setor no seguinte trecho: "This is not too far from reality: R&D intensities are largely sector specific and associated with the sector-wide nature of innovative opportunities and modes of innovative search".

²⁴⁹ Formulação presente em Dosi et al. (2017b, p.716) que é uma versão do K+S expandida nas relações pertinentes ao mercado de trabalho. Na versão original em Dosi et al. (2010, p.1751) é o montante do gasto destinado à P&D que é repartido entre inovação e imitação.

determinação da fronteira de produtividade do trabalho da máquina e do processo de produção da máquina por meio de extrações de uma distribuição Beta.

Especificamente, a expressão (a23) descreve a parcela dos trabalhadores direcionados a P&D em inovação, $IN_{i,t}$, e na expressão (a24) $\theta_{i,t}^{in}$ é o parâmetro da distribuição de Bernoulli, onde o parâmetro setorial $\zeta_1 \in [0,1]$ media a capacidade da busca por inovação.

$$IN_{i,t} = \xi \cdot L_{i,t}^{R\&D} \quad (a23)$$

$$\theta_{i,t}^{in} = 1 - e^{-\zeta_1 \cdot IN_{i,t}} \quad (a24)$$

Obtido o sucesso do empenho em inovação a produtividade do trabalho incorporada à máquina, $A_{i,t}^{inn}$, e a produtividade do trabalho da produção da máquina pela firma i , $B_{i,t}^{inn}$, são definidos em (a25) e (a26), respectivamente, em que $x_{i,t}^A$ e $x_{i,t}^B$ são designados em duas extrações independentes de uma distribuição Beta.

$$A_{i,t}^{inn} = A_{i,t}(1 + x_{i,t}^A) \quad (a25)$$

$$B_{i,t}^{inn} = B_{i,t}(1 + x_{i,t}^B) \quad (a26)$$

Assim como na inovação o esforço de imitação envolve duas etapas em que a primeira consiste em um sorteio seguindo uma distribuição de Bernoulli cujo parâmetro $\theta_{i,t}^{im}$ é definido em (a28), onde $\zeta_2 \in [0,1]$ é o parâmetro exógeno setorial referente a capacidade da imitação e $IM_{i,t}$ é a parcela dos trabalhadores de P&D dedicados a imitação, exposto na equação (a27). O sucesso na primeira etapa significa que a firma consegue imitar a tecnologia de um de seus competidores de modo a obter $(A_{i,t}^{im}, B_{i,t}^{im})$.²⁵⁰

$$IM_{i,t} = (1 - \xi) \cdot L_{i,t}^{R\&D} \quad (a27)$$

$$\theta_{i,t}^{im} = 1 - e^{-\zeta_2 \cdot IM_{i,t}} \quad (a28)$$

Por fim, as firmas de bens de capital selecionam quais máquinas a produzir de acordo com a seguinte regra estabelecida em (a29) que compara as diferentes tecnologias alcançadas

²⁵⁰ Como comentam Dosi et al. (2010, p.1752) sobre o critério estipulado para definição de qual firma competidora que será imitada: "We assume that firms are more likely to imitate competitors with similar technologies and we use a Euclidean metric to compute the technological distance between every pair of firms to weight imitation probabilities". Além disso, os autores elucidam que as firmas que já estão na fronteira tecnológica direcionam a integridade dos recursos em P&D para inovação ao não terem firmas para imitar (Ibid., p.1751).

pelo esforço de avanço técnico da firma e seleciona o menor valor da soma do seu preço de venda, $p_{i,t}^h$, com o custo unitário associado a produtividade do trabalho incorporada à máquina multiplicado pelo parâmetro de *payback period*²⁵¹, $b \cdot c_{A_i^h,i,t}^h$, onde $h = \tau, in, im$ representa tanto a corrente safra tecnológica das máquinas já produzidas pela firma, denotada por τ , quanto a fronteira potencialmente alcançada pelo sucesso inovativo ou imitativo, in e im , respectivamente.²⁵²

$$\min \left[p_{i,t}^h + b \cdot c_{A_i^h,i,t}^h \right] \quad (a29)$$

Assim, a tecnologia da firma de bens de capital, advinda do esforço na busca tecnológica apresentada acima, é descrita pelo par (A_i^τ, B_i^τ) , onde τ representa a safra tecnológica, A_i^τ é a produtividade do trabalho incorporada à máquina produzida e vendida pela firma i e B_i^τ é a produtividade do trabalho do processo de produção do bem de capital.

3.3.3.3 O Governo

O governo no K+S apenas tem a atribuição de pagar benefícios de seguro desemprego aos trabalhadores desempregados, definido como uma parcela da média do salário corrente e arrecada pela tributação dos lucros das firmas por uma alíquota fixa.²⁵³

O gasto total do governo, G_t , é definido em (a30), abaixo, onde w_t^u representa o benefício de seguro desemprego e L^S e L_t^D são, respectivamente, a oferta total de

²⁵¹ Descrito pela expressão (a7).

²⁵² A avaliação quanto ao bem de capital a ser produzido advindo do sucesso do esforço de avanço técnico é justificado em razão da possibilidade em se obter pela busca tecnológica máquinas mais caras e menos produtivas que as correntemente produzidas pela firma, conforme explicam os autores no trecho a seguir: “Note that the newly discovered capital goods might be a ‘failed innovation’, because production costs might be higher and/or user efficiency might be lower than the currently manufactured machines. (...) [Of] course, it could be also that the new machine is both cheaper and more efficient, or more expensive and less efficient” (Dosi et al. 2013, p.1602, grifo no original).

²⁵³ Originalmente em Dosi et al. (2010, p.1754-55) não são reportadas as especificações relativas a atuação do governo no modelo, muito embora seja comentado sobre o gasto na forma de benefícios aos desempregados e os recursos provenientes da tributação do lucro e/ou salários cujos parâmetros encontram-se presentes na tabela que reporta a calibração da simulação padrão (*benchmark*) do modelo. Adiciona-se que tanto na versão de 2010 quanto em Dosi et al. (2013) não há a presença de um componente de tributação nas expressões referentes ao lucro e aos ativos líquidos das firmas, o que ocorre em Dosi et al. (2015, p.170) onde há o desconto de uma alíquota referente a tributação do lucro na expressão da evolução do montante de ativos líquidos da firma e é exibido o formato para o gasto do governo (ibid., p.172) idêntico ao apresentado na presente subseção que reproduz as especificações para o governo constantes em Dosi et al. (2017b, p.698). Adiciona-se que a formulação em Dosi et al. (2015, p.172) contempla a emissão de dívida pública para cobrir eventuais déficits públicos que são comprados pelos bancos privados e pelo banco central e inclui o gasto para o resgate de bancos em falência cujo montante de ativos líquidos não é suficiente para cobrir suas perdas por empréstimos inadimplentes.

trabalhadores na economia e a demanda total por contratação de postos de trabalho por parte das firmas.

$$G_t = w_t^u (L^s - L_t^D) \quad (a30)$$

O benefício de seguro desemprego tem sua evolução caracterizada pela expressão (a31) como sendo uma parcela, na proporção do parâmetro $\psi \in [0,1]$, da média dos salários pagos no período anterior, em que $w_{l,t-1}$ é o salário pago ao trabalhador l no período $t-1$ e a média é calculada relativamente aos L_{t-1}^D trabalhadores empregados.

$$w_t^u = \psi \frac{1}{L_{t-1}^D} \sum_{l=1}^{L_{t-1}^D} w_{l,t-1} \quad (a31)$$

Ademais, a depender da configuração adotada para a institucionalidade do mercado de trabalho o governo pode estabelecer um patamar mínimo para os salários pagos pelas firmas, w_t^{min} na expressão (a32), que tem sua variação de acordo com o salário mínimo passado, w_{t-1}^{min} , e por uma parcela $\psi_1 \in [0,1]$ da variação relativa da produtividade do trabalho agregada.

$$w_t^{min} = w_{t-1}^{min} \left(1 + \psi_1 \frac{\Delta A_t}{A_{t-1}} \right) \quad (a32)$$

3.3.3.4 O Setor financeiro

A descrição do setor financeiro aqui segue o proposto na versão do modelo apresentada em Dosi et al. (2013, p.1603-04), que é composto por um banco, ou n bancos idênticos, que recolhe recursos líquidos em contas de depósito, concede crédito às firmas de bens de consumo e possui limitação de volume de empréstimos concedidos tanto por firma quanto e em relação ao total emprestado na economia.²⁵⁴

A taxa de juros que remunera os ativos líquidos nas contas de depósitos, r_D , e a taxa de juros dos empréstimos, r_L , são fixadas a partir da taxa básica de juros da economia r , conforme descrito em (a33) e (a34), abaixo, onde os parâmetros ψ_D e ψ_L , $0 \leq \psi_D; \psi_L \leq 1$,

²⁵⁴ A versão em Dosi et al. (2015, p.170-71) apresenta diferentes formulações para o setor financeiro que são aqui parcialmente pontoadas ao longo da presente subseção. Adianta-se que nessa versão é estipulado um número fixo de bancos proporcional ao número de firmas do setor de bens de consumo, sendo os bancos heterogêneos em número de clientes. Além disso, é estocasticamente definido de início, por meio de extrações aleatórias de uma distribuição de pareto, quais firmas são clientes de quais bancos, relação esta que permanece estável ao longo dos períodos simulados, ou seja, as firmas em operação não trocam de banco.

são os coeficientes relativos ao juros da remuneração dos ativos líquidos e os juros dos empréstimos do banco, respectivamente.²⁵⁵

$$r_D = (1 - \psi_D)r \quad (a33)$$

$$r_L = (1 + \psi_L)r \quad (a34)$$

São as firmas do setor de bens de consumo que demandam empréstimos ao banco tanto para financiar suas despesas operacionais quanto para a realização de investimento. Nesse sentido, essas firmas utilizam prioritariamente seus recursos internos para os gastos com a produção e investimento e, caso estes não sejam suficientes, pedem emprestado junto ao banco. A expressão (a35) explicita essa priorização dos recursos internos e a consequente demanda por crédito, onde $c_{j,t}Q_{j,t}$ é o custo da produção, $EI_{j,t}^d$ representa o investimento desejado em expansão da capacidade produtiva, $RI_{j,t}^d$ é o investimento em reposição de capital, $NW_{j,t-1}$ é o estoque de ativos líquidos da firma no período anterior e $CD_{j,t}$ é o montante de crédito demandado ao banco.

$$c_{j,t}Q_{j,t} + EI_{j,t}^d + RI_{j,t}^d \leq NW_{j,t-1} + CD_{j,t} \quad (a35)$$

A firma individualmente pode estar sujeita a racionamento de crédito pelo banco. Isto é, o montante de crédito à firma demandado, $CD_{j,t}$, é restrito superiormente de acordo com a desigualdade (a36), abaixo, seguindo uma proporção λ de sua receita passada de vendas $S_{j,t-1}$.²⁵⁶

$$CD_{j,t} \leq \lambda \cdot S_{j,t-1} \quad (a36)$$

Para o conjunto de todas as firmas da economia também se impõe limitação à disponibilidade máxima de crédito seguindo uma regra de multiplicador calculada em proporção ao somatório dos ativos líquidos de todas as firmas de ambos os setores. Assim, o montante máximo de empréstimos disponíveis para concessão no período, denotado por MTC_t , é dado pela proporção, definida pelo parâmetro $\kappa > 0$, do somatório dos ativos

²⁵⁵ Na versão do K+S aqui exposta a taxa básica de juros do banco central é fixa. Já em Dosi et al. (2015, p.171) é definida uma taxa básica de juros seguindo uma regra de Taylor com mandato dual que considera inflação e o desemprego e a taxa de juros dos empréstimos é discriminada em quatro classes a depender do cliente demandante do empréstimo.

²⁵⁶ Dosi et al. (2013, p.1604, grifos no original) comentam que as equações (a35) e (a36) em conjunto descrevem “a ‘balance sheet’ effect in the model (...) as they imply that an increase in either firm stock of liquid assets or in past sales may yield an increase of firm production and investment”.

líquidos de cada firma de bens de capital, $NW_{i,t-1}$, adicionado ao somatório dos ativos líquidos de cada firma de bens de consumo, $NW_{j,t-1}$, conforme descrito na expressão (a37).²⁵⁷

$$MTC_t = \kappa \left(\sum_{i=1}^{N_1} NW_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{N_2} NW_{j,t-1} \right) \quad (a37)$$

Além disso, em qualquer momento o estoque de empréstimos concedidos às firmas pelo banco deve satisfazer a seguinte restrição descrita em (a38) que limita superiormente o montante do estoque emprestado ao máximo de crédito MTC_t , onde $Deb_{j,t}$ representa o estoque de crédito da firma j e $Loan_t$ é o estoque de empréstimos em relação a todas as firmas.

$$\sum_{j=1}^{N_2} Deb_{j,t} = Loan_t \leq MTC_t \quad (a38)$$

Adiciona-se que o banco concede crédito às firmas seguindo uma hierarquia definida, a cada período, pela razão entre seus ativos líquidos e sua receita de vendas, $NW_{j,t}/S_{j,t}$, ordenando as firmas de acordo com essa razão e concedendo primeiro os empréstimos às firmas mais bem posicionadas, o que pode significar a negativa a concessão de empréstimo às firmas demandantes de crédito piores posicionadas.

3.3.3.5 O mercado de trabalho

A formulação presente na versão do modelo em Dosi et al. (2017b, p.696-98) descreve um mercado de trabalho com uma oferta fixa de trabalhadores, denotado por L^S , e a demanda por trabalho é proveniente do setor produtivo que paga salários cujo nível é individualmente definido por cada firma que busca contratar e demitir trabalhadores a cada período de acordo com seu nível de produção desejada, no caso do setor de bens de consumo, ou encomendas recebidas e dos recursos alocados em P&D nas firmas de bens de capital. O processo de contratação é no modelo ilustrativamente descrito como formado por filas de contratação em

²⁵⁷ Como já comentado, em Dosi et al. (2015, p.170) são adotadas determinadas outras especificações para o setor financeiro que conta com bancos heterogêneos. Em específico, o montante máximo de empréstimos de cada banco, em que nessa versão é prevista um número k de diferentes bancos, segue a expressão reproduzida a seguir, mantendo-se a notação constante na publicação, onde $TC_{k,t}$ é o montante máximo de empréstimos, $NW_{k,t-1}^b$ são os ativos líquidos do banco, $Bda_{k,t-1}$ é a razão entre crédito inadimplido acumulado e os ativos do banco, $\tau^b \in [0,1]$ é um parâmetro definido pela autoridade regulatória e $\beta > 0$ é um parâmetro que reflete a sensibilidade do banco à fragilidade financeira: $TC_{k,t} = \frac{NW_{k,t-1}^b}{\tau^b(1+\beta \cdot Bda_{k,t-1})}$

cada firma demandante por trabalho onde os trabalhadores desempregados aplicam para os postos ofertados, podendo se inscrever simultaneamente em mais de uma fila.²⁵⁸

Nomeadamente, a intenção de contratar trabalhadores pelas firmas do setor de bens de consumo a cada período, conforme ilustrativamente representado pela expressão lógica (a39), abaixo, ocorre quando sua produção desejada $Q_{j,t}^d$ for superior ao nível de produção do período anterior, $Q_{j,t-1}$, caso em que se procura contratar a quantidade $\Delta L_{j,t}^d$ de trabalhadores, definida como a diferença entre a quantidade desejada²⁵⁹ $L_{j,t}^d$ e a quantidade empregada no período anterior $L_{j,t-1}$.

$$\text{Se } \Delta Q_{j,t}^d = Q_{j,t}^d - Q_{j,t-1} > 0 \Rightarrow \text{contratar } \Delta L_{j,t}^d = L_{j,t}^d - L_{j,t-1} \text{ trabalhadores} \quad (a39)$$

Dos trabalhadores postulantes às vagas ofertadas pela firma apenas uma parte está a sua disposição de acordo com uma proporção de sua parcela de mercado (*market share*). Isto é, em consonância com a expressão (a40), define-se que a esperança matemática da oferta de trabalhadores para os postos de trabalho da firma j , denotado por $E(L_{j,t}^s)$, é dado pelo número de trabalhadores inscritos nas vagas abertas, representado por L_a , multiplicado pela parcela de mercado da firma no período anterior, $f_{j,t-1}$, e pelo parâmetro ω que mede, em média, o número de filas de emprego cada trabalhador desempregado se inscreve²⁶⁰.

$$E(L_{j,t}^s) = \omega \cdot L_a \cdot f_{j,t-1} \quad (a40)$$

A seleção dos trabalhadores entre os postulantes dispostos na fila é feita em função do salário requisitado pelo trabalhador na medida em que o conjunto dos trabalhadores desejados pela firma, representado por $\{l_{j,t}^d\}$, dentre aqueles dispostos na fila, $\{l_{j,t}^s\}$, é composto pelos trabalhadores que aceitam receber o salário oferecido pela firma $w_{j,t}^0$, limitado pela quantidade de trabalhadores que a firma deseja contratar, $\Delta L_{j,t}^d$, como destacado em (a41), abaixo, onde $l_{j,t}$ representa cada trabalhador da fila, $w_{l,t}^r$ é o salário

²⁵⁸ Na publicação são estipulados para a realização dos experimentos de simulação duas distintas configurações institucionais de regimes do mercado de trabalho, uma tratada como fordista, definida como simulação padrão (*baseline*), e outra intitulada como regime competitivo. Na presente exposição somente é abordado o regime referente à simulação padrão, exposta em *ibid.*, p.696-97 e rerepresentado em Dosi et al. (2020, p.166-67) que descrevem apenas o comportamento das firmas do setor de bens de consumo no que tange suas dinâmicas de atuação no mercado de trabalho.

²⁵⁹ A quantidade desejada de trabalhadores é definida na expressão (a3), acima.

²⁶⁰ "When workers can apply to more than one firm at the time, firms may not be able to hire all workers in their queue, even when they mean to" (Dosi et al., 2017b, p.696).

requerido pelo trabalhador, se houver, e $\#\{l_{j,t}^d\}$ é o número de elementos do conjunto dos trabalhadores desejados, i.e. o número de trabalhadores desejados.

O número de trabalhadores efetivamente contratados, denotado por $\#\{l_{j,t}^h\}$ na expressão (a42), é igual a variação de trabalhadores na firma $\Delta L_{j,t} = L_{j,t} - L_{j,t-1}$ e menor ou igual que a própria demanda por trabalho $\Delta L_{j,t}^d$ e a oferta de trabalhadores no período $L_{j,t}^s$.

$$\{l_{j,t}^d\} = \{l_{j,t} \in \{l_{j,t}^s\} : w_{l,t}^r < w_{j,t}^0\}, \quad \#\{l_{j,t}^d\} \leq \Delta L_{j,t}^d \quad (a41)$$

$$\#\{l_{j,t}^h\} = \Delta L_{j,t} \leq \Delta L_{j,t}^d \leq L_{j,t}^s = \#\{l_{j,t}^s\} \quad (a42)$$

Os salários oferecidos pela firma $w_{j,t}^0$ evoluem conforme descrito em (a43), onde $WP_{j,t}$ é chamado de prêmio salarial que repassa ao salário ganhos de produtividade do trabalho a nível agregado ΔA_t e a nível da firma $\Delta A_{j,t}$, como disposto em (a44), em que ψ_1 é o parâmetro que representa o repasse da variação da produtividade agregado ao salários e ψ_2 o repasse da variação da produtividade da firma, tendo-se $\psi_1 + \psi_2 \leq 1$.²⁶¹

$$w_{j,t}^0 = w_{j,t-1}^0 [1 + \text{MAX}(0, WP_{j,t})] \quad (a43)$$

$$WP_{j,t} = \psi_1 \frac{\Delta A_t}{A_{t-1}} + \psi_2 \frac{\Delta A_{j,t}}{A_{j,t-1}} \quad (a44)$$

Vale adicionar que na versão do K+S em Dosi et al. (2010) é estabelecido o mesmo nível de salário para todos os setores produtivos que pode ser ajustado de acordo com a variação da produtividade, da inflação e pelo desemprego. Especificamente, o salário w_t , na expressão (a45), é ajustado em relação ao salário do período anterior, w_{t-1} , seguindo uma parcela ψ'_1 que designa o peso da variação da produtividade do trabalho média $\Delta \overline{AB}_t$ a ser repassada ao salário, uma parcela ψ'_2 referente a variação da inflação ao consumidor e uma parcela ψ'_3 da variação do desemprego.

$$w_t = w_{t-1} \left(1 + \psi'_1 \frac{\Delta \overline{AB}_t}{\overline{AB}_{t-1}} + \psi'_2 \frac{\Delta \text{cpi}_t}{\text{cpi}_{t-1}} + \psi'_3 \frac{\Delta U_t}{U_{t-1}} \right) \quad (a45)$$

²⁶¹ Adiciona-se que em Dosi et al. (2017a, p.170) é estabelecido um nível máximo de salários que a firma está disposta a pagar $w_{j,t}^{0,max}$, chamado de *break-even*, e calculado por $w_{j,t}^{0,max} = p_{j,t-1} \cdot A_{j,t-1}$, em que o nível dos salários pagos $w_{j,t}^0 \leq w_{j,t}^{0,max}$. Em Dosi et al. (2017b, p.697) esse nível máximo é chamado de salário compatível com lucro unitário zero.

Por fim, os trabalhadores não abandonam seus empregos correntes por outros e são demitidos quando as firmas entram em falência e/ou vivenciam lucros $\Pi_{j,t-1}$ negativos e variação da produção desejada $\Delta Q_{j,t}^d$ decrescente, como ilustrado em (a46), onde $\Delta L_{j,t}^d < 0$ representa uma variação negativa na demanda por trabalho pela firma.²⁶²

$$\Pi_{j,t-1} < 0 \text{ e } \Delta Q_{j,t}^d < 0 \Rightarrow \Delta L_{j,t}^d < 0 \quad (a46)$$

3.3.3.6 Entrada e saída de firmas

A dinâmica de entrada e saída de firmas no modelo se dá ao fim de cada período com as firmas que possuem parcela de mercado virtualmente zero ou montante negativo de ativos líquidos²⁶³ declarando falência e saindo do mercado, o que leva, conseqüentemente, a entrada de uma nova firma, mantendo-se, assim, o número total de firmas constante²⁶⁴.

As firmas entrantes são em média menores que as incumbentes, tendo seu estoque inicial de capital, nas firmas de bens de consumo, estocasticamente definido pelo produto entre a extração aleatória de uma distribuição uniforme e o estoque de capital médio dos incumbentes e, analogamente, o estoque de ativos líquidos, para ambos os setores, definido como o produto de uma extração de uma uniforme com a média do estoque de ativos líquidos dos incumbentes. Operacionalmente, as firmas entrantes de bens de consumo começam selecionando máquinas entre as safras de tecnologia mais recentes e as firmas de bens de

²⁶² Lembrando-se que aqui se está apresentando, exceto quando diferentemente informado, as equações referentes as especificações da simulação padrão em Dosi et al. (2017b), onde há a experimentação com diferentes regimes institucionais para o mercado de trabalho, especificamente chamados de fordista, que é a especificação padrão, e competitivo. À guisa de exemplificação, no regime competitivo em Dosi et al. (2017a, p.170) o salário requerido pelo trabalhador l , denotado por $w_{l,t}^r$, é dado pela expressão a seguir, $w_{l,t}^r = \begin{cases} \max(w_t^u, w_{l,t}^s) & \text{se } l \text{ está desempregado em } t-1 \\ w_{l,t-1}(1 + \epsilon) & \text{se } l \text{ está empregado em } t-1 \end{cases}$, onde w_t^u é o benefício de seguro desemprego, $w_{l,t-1}$ é o salário que o trabalhador l recebe em $t-1$, ϵ é um parâmetro positivo adicionado ao salário do período anterior e $w_{l,t}^s$ é o salário satisfatório, dado pela média móvel os últimos $T_s > 0$ períodos, $w_{l,t}^s = \frac{1}{T_s} \sum_{h=1}^{T_s} w_{l,t-h}$.

²⁶³ Sobre a falência da firma devido ao estoque de ativos líquidos em nível negativo Dosi et al. (2013, p.1602) comentam: “This assumption implies that bankruptcies in this model are due only to illiquidity problems as opposed to bankruptcy due to solvency problems (i.e. to a negative difference between the values of assets and liabilities)”.

²⁶⁴ A hipótese de número constante de firmas é justificada pelos autores no seguinte trecho aqui reproduzido: “The assumption about a constant number of firms in the market is justified by the large cross-country and cross-industry empirical evidence showing that net entry rates are on average very close to zero” (Dosi et al., 2013, p.1602).

capital entrantes começam a produção com tecnologia determinada pela aplicação à fronteira tecnológica corrente de um coeficiente extraído de uma distribuição Beta.

3.3.3.7 Variáveis agregadas

O consumo agregado, que constitui a demanda ao setor de bens de consumo, é exposto na equação (a47), abaixo, em que os trabalhadores, empregados ou não, consomem a totalidade de sua renda, seja por salários, evidenciado pelo somatório dos $w_{l,t}$ salários entre todos os l trabalhadores, seja pelos benefícios de seguro desemprego, representados nos gastos de governo G_t , somando-se ao termo entre parêntesis no lado direito da equação que representa o consumo desejado não satisfeito do período anterior²⁶⁵.

O consumo efetivamente realizado em termos agregados é definido em (a48), denotado por C_t , e definido pelo valor mínimo entre o consumo desejado do período anterior e a soma da produção efetiva de bens de consumo, Q_t^2 , e dos estoques acumulados, N_t^2 , ambos em relação ao agregado do setor.

$$C_t^d = \sum_l w_{l,t} + G_t + (C_{t-1}^d - C_{t-1}) \quad (a47)$$

$$C_t = \min (C_{t-1}^d, Q_t^2 + N_t^2) \quad (a48)$$

O cálculo do agregado do produto, seguindo as identidades de contas nacionais, é realizado tanto pela ótica da produção, somando-se o total dos bens produzidos por todas as firmas do setor de bens de capital e de bens de consumo, $Q_t^1 + Q_t^2$, respectivamente, haja vista que não há bens intermediários no modelo, quanto pela ótica da despesa ao somar o consumo agregado C_t com o investimento agregado I_t e a variação de estoques ΔN_t , conforme mostrado na expressão (a49), onde Y_t representa o produto agregado.

$$\sum_i Q_{i,t} + \sum_j Q_{j,t} = Q_t^1 + Q_t^2 = Y_t = C_t + I_t + \Delta N_t \quad (a49)$$

²⁶⁵ Especificação adotada em Dosi et al. (2017b, p.699 e 2017a, p.171). Na versão em Dosi et al. (2010, p.1754 e 2015, p.172) não há a presença desse componente referente ao consumo não realizado no período anterior, sendo o consumo agregado formado apenas pela soma do total de salários com o total dos benefícios de seguro desemprego.

3.3.4 Calibração e validação

Aqui se apresenta os resultados encontrados nas diferentes versões do K+S consultadas do que é textualmente²⁶⁶ explicitado em cada publicação sobre a prática procedida tanto para a calibração do modelo quanto para sua validação empírica, sem que se objetive, vale ponderar, uma exploração exaustiva do tema.

Nesse sentido, a próxima subseção 3.3.4.1 tem o propósito de destacar o que é relatado sobre a calibração do K+S em cada texto, enquanto a subseção 3.3.4.2 trata do que é informado em cada publicação selecionada sobre a validação do modelo.

3.3.4.1 Calibração do modelo

Apresenta-se a partir do disposto nas publicações referentes às versões do modelo K+S aqui consideradas um breve relato quanto a prática de calibração dos parâmetros exógenos, que necessitam de definição de valores pelo usuário para execução dos experimentos de simulação.

De início, é oportuno destacar que não há indicação de procedimento ou de método para a calibração do K+S nas diferentes versões examinadas, entendido como uma explicação global ou, pelo menos, parcial para a escolha dos determinados valores adotados para a calibração do modelo, não obstante as múltiplas menções de evidências empíricas da literatura indicadas como amparo à fundamentação dos valores definidos para os determinados parâmetros em questão²⁶⁷. Nomeadamente, isso ocorre em Dosi et al. (2010) quando, por exemplo, é justificada a adoção de mesma parcela da receita voltada para o gasto em P&D em relação à todas as firmas de bens de capital (Ibid., p.1751) ou na imposição de um teto para a taxa de crescimento de capital relativo aos investimentos da firma de bens de consumo (Ibid., p.1752).

No entanto, ocorre em diferentes versões da família K+S a consignação da relação entre a validação empírica, abordada na subseção a seguir, com a calibração do modelo no sentido de sinalizar que uma correta calibração objetiva a validação empírica do modelo, como em Dosi et al. (2013, p.1605) e na versão em Dosi et al. (2017a), onde é afirmado que a

²⁶⁶ E, evidentemente, também por meio de tabelas e gráficos presentes em cada documento.

²⁶⁷ Também se recorre com frequência, vale mencionar, a evidências empíricas da literatura para fundamentação ao nível micro de comportamentos, por exemplo, das firmas e demais agentes do modelo.

intenção da calibração do modelo não é seguir alguma observação empírica, como é procedido em modelos do tipo DSGE, por exemplo, mas sim ser capaz de qualitativamente reproduzir determinadas propriedades dinâmicas mesmo ao se utilizar diferentes configurações para o modelo.²⁶⁸

Ademais, pela análise comparativa das tabelas que explicitam os valores da calibração das respectivas simulações padrão (*benchmark* ou *baseline*) das diferentes versões do modelo constata-se que em Dosi et al. (2013, 2015, 2017a e 2017b) grande parte dos valores definidos são os mesmos daqueles assumidos em Dosi et al. (2010, p.1755) cuja tabela de calibração expõe os valores para os 30 parâmetros exógenos do modelo.

Concretamente, na versão de 2013 a diferença em comparação com a publicação de 2010 recai na modificação de dois parâmetros referentes ao mark-up e a taxa de juros e na incorporação de outros parâmetros específicos ao setor financeiro, que é expandido na versão.²⁶⁹ Em Dosi et al. (2015, p.185) a tabela apensada ao texto mostra quatro parâmetros com valores diferentes²⁷⁰ aos adotados nas versões de 2010 e 2013, além de outros sete parâmetros relativos a especificação do setor financeiro dessa versão do modelo que conta com bancos heterogêneos. Já Dosi et al. (2017a, p.179 e 2017b, p.719) apresentam a mesma calibração²⁷¹, em que dos 36 parâmetros do modelo a metade dos valores são iguais aos adotados em Dosi et al (2010), sendo os demais aqueles específicos ao mercado de trabalho e novos parâmetros da versão, condições iniciais e os parâmetros de mark-up de ambos os setores produtivos, que têm seus valores fixados em níveis diferentes das versões anteriores.

²⁶⁸ “On purpose, we do not aim to calibrate the model which follows to any particular empirical observation, but rather to show how its basic qualitative properties hold for alternative archetypal configurations” (Ibid., p.164). E, semelhantemente, Ibid., p.177.

²⁶⁹ Cf. Dosi et al. (2013, p.1623). Adiciona-se que a tabela com a calibração da simulação padrão dessa versão conta com 28 parâmetros, em que não constam na tabela dois parâmetros presentes na publicação de 2010, referentes às características de firmas entrantes, e são incluídos 4 outros não presentes na tabela de 2010.

²⁷⁰ Estes são os coeficientes relativos ao repasse da inflação, da produtividade e do desemprego aos salários e o coeficiente da evolução do mark-up das firmas do setor de bens de consumo.

²⁷¹ Há, no entanto, a diferença, nesse quesito, entre as duas publicações em que em 2017a a simulação é executada perfazendo 400 períodos e em 2017b são cobertos 500 períodos, sendo, para ambos os casos, os 100 iniciais são descartados, e com 50 replicações de Monte Carlo. Adiciona-se que em Dosi et al. (2015, p.173 e 185) o exercício de simulação conta com 600 períodos e 100 replicações de Monte Carlo e não se menciona a desconsideração de algum número de períodos iniciais transientes, o que também ocorre em Dosi et al. (2013, p.1605) com também 600 períodos e 50 replicações. Na versão original em Dosi et al. (2010, p.1755) é relatado a ocorrência de 100 replicações e não a menção de algum período inicial transiente e da quantidade de períodos simulados, muito embora os gráficos que descrevem a dinâmica de variáveis ao longo do tempo apresentem 500 períodos.

3.3.4.2 Validação do modelo

“The model (...) is empirically quite robust in that it accounts, together, for a large number of empirical regularities. It certainly passes a much higher ‘testing hurdle’, as Solow (2008) puts it, than simply reproducing ‘a few of the low moments of observed time series: ratios of variances or correlation coefficients, for instance’ (...) as most current models content themselves with” (Dosi et al., 2010, p.1759)

Suscintamente, o processo de validação consiste na investigação se os dados microeconômicos e macroeconômicos provenientes de exercícios de simulação possuem propriedades estatísticas semelhantes as empiricamente observadas na realidade.²⁷²

O procedimento de validação empírica em Dosi et al. (2010) é na publicação expressamente destacado como um dispositivo disciplinador fundamental da modelagem, junto com a microfundamentação, na medida que a capacidade de replicar fatos estilizados em níveis micro e macro é elevado pelos autores como uma determinação e objetivo na elaboração do modelo²⁷³. Para tanto, são textualmente descritas, em relação a configuração do modelo referente a simulação padrão (*benchmark* ou *baseline*), as propriedades dinâmicas produzidas pela série de dados simulados associadas a fatos estilizados que são caracterizados por meio da apresentação de gráficos que retratam as dinâmicas de variáveis, tabelas com a correlação cruzada entre variáveis selecionadas e o produto, estatísticas descritivas, teste de estacionariedade e de normalidade, entre outros.²⁷⁴

Especificamente, é indicada a capacidade do modelo em gerar padrões de crescimento endógeno e autossustentado com a presença de flutuações persistentes. O consumo e o investimento são pró-cíclicos, o primeiro coincidente e o segundo liderado (*leading*) em dois períodos, com o investimento mais volátil que o produto e o consumo menos volátil, todos apresentado taxas de crescimento média estritamente positivas. Além disso, considerando as séries temporais filtradas do componente de tendência²⁷⁵, é apontado que a variação de

²⁷² Conforme definem os próprios autores em Dosi et al. (2010, p.1750).

²⁷³ Nas palavras dos autores: “our commitment is to ‘phenomenologically’ describe microbehaviors as close as one can get to available microevidence. (...) In fact, this is our first fundamental disciplining device. A second, complementary one involves the ability of model jointly to account for an ensemble of stylized facts regarding both ‘micro/meso’ aggregates such as indicators of industrial structures (e.g. firm size distributions, productivity dispersions, firm growth rates) together with macro statistical properties (including rates of output growth, output volatility, unemployment rates, etc.)” (Ibid., p.1749, grifos no original).

²⁷⁴ Adiciona-se que as análises da simulação são apresentadas a partir de médias de Monte Carlo entre 100 replicações (Ibid., p.1755).

²⁷⁵ Pelo uso de um *Band-pass filter* (bpf), cf. Baxter e King, 1999.

estoques é levemente defasada (*lagging*) e pró-cíclica, que o emprego também é pró-cíclico, que a variável que mede o desemprego é contracíclica, que o investimento líquido é pró-cíclico e coincidente. A produtividade e a inflação são pró-cíclicas, sendo a primeira coincidente e a segunda defasada em um período, e os preços e mark-up contracíclicos, sendo ambos liderados. Adiciona-se que as taxas de crescimento do produto agregado apresentam uma distribuição com cauda longa, o que seria também observado pela evidência empírica.²⁷⁶

É igualmente ressaltada a capacidade do modelo em reproduzir regularidades ao nível microeconômico. Tratando-se do tamanho da firma é assinalado que a distribuição do tamanho em escala logarítmica é enviesada, não compatível com uma distribuição log-normal, e que a distribuição das taxas de crescimento do tamanho das firmas apresenta caudas mais longas que de uma distribuição Gaussiana. Em relação à dinâmica da produtividade da firma é apontado que persistentemente se mantém a diferenciação da produtividade do trabalho entre as firmas e que a distribuição das taxas de crescimento da produtividade possui caudas longas seguindo uma distribuição de Laplace. Ademais, o modelo é capaz de gerar padrões de investimento irregulares entre as firmas, onde coexistem ao mesmo tempo firmas com investimento próximo a zero e firmas experimentando picos de investimento.²⁷⁷

Em Dosi et al. (2013, p.1599), a partir da análise das médias de Monte Carlo das séries de dados provenientes da simulação com 50 replicações e 600 períodos de tempo, é afirmado que a versão do modelo na publicação é capaz de replicar as propriedades dinâmicas associadas a fatos estilizados para além daqueles verificados em Dosi et al. (2010), englobando regularidades a nível micro e macro concernentes à dinâmica de crédito ensejada pela interação do setor financeiro com as firmas no modelo.

Dessa forma, considerando as correlações cruzadas das séries filtradas da tendência (bpf) entre variáveis selecionadas ligadas a dinâmica de crédito e o PIB é constatado que nessa versão do K+S, em conformidade com características de ciclos de crédito observadas empiricamente, o agregado das dívidas das firmas é fortemente pró-cíclico e coincidente, o estoque de ativos líquidos das firmas tratados como depósitos bancários são contracíclicos e defasados em quatro períodos, assim como o comportamento da oferta de crédito pelos bancos, a razão ativos líquidos sobre receita das vendas que é um indicador no modelo de

²⁷⁶ Ibid., p.1756-58.

²⁷⁷ Ibid., p. 1758-59.

priorização de crédito pelos bancos é contracíclico e defasada em um período e a taxa de falência é pró-cíclica e praticamente coincidente.²⁷⁸

Ademais, ao nível micro é apenas descrito que a falência das firmas é fortemente enviesada, apresentado distribuição com caudas longas e temporalmente agrupadas, o que segue evidências recentes a respeito do tema.²⁷⁹

Na versão desenvolvida em Dosi et al. (2015, p.173-74), tendo-se a simulação com 600 períodos e 100 replicações independentes, além das propriedades dinâmicas já mencionadas acima²⁸⁰, destacadas nas publicações anteriores, é adicionado que os lucros dos bancos são pró-cíclicos enquanto as perdas por empréstimos inadimplidos são contracíclicos, sendo este último positivamente correlacionado com a defasagem de um período com o montante de dívida das firmas, a distribuição da duração de crises bancárias segue proximamente o observado em dados empíricos e a distribuição da razão entre o custo fiscal da crise bancária²⁸¹ e o PIB apresenta excesso de curtose, com caudas mais longas que de uma distribuição normal.²⁸²

Já em Dosi et al. (2017a) é dedicada parte considerável da publicação para enumerar determinadas regularidades empíricas, tratados como fatos estilizados, relacionadas ao mercado de trabalho extraídas da literatura, que segundo aos autores um modelo com mercado de trabalho necessita replicar (Ibid., p.164), e, assim, associá-las às dinâmicas formadas pelas séries de dados, submetidos a certos tratamentos, provenientes do exercício de simulação do modelo.²⁸³

²⁷⁸ Dosi et al., 2013, p.1606.

²⁷⁹ Ibid., p.1607. Nas palavras dos autores, sobre o comportamento verificado da distribuição da falência de firmas: “clearly implying that episodes of large bankruptcies are statistically more frequent than what would be predicted by a normal distribution” (Idem).

²⁸⁰ Conforme comentam os autores (Ibid., p.167): “the current version with heterogeneous banks provides a richer description of the banking sector, matching new stylized facts related to credit and banking crises. Examples include the cross-correlations between output and credit variables, and between debt and loan losses, as well as the distributional properties of bank crises duration”.

²⁸¹ Lembrando-se que nessa versão do modelo há o resgate pelo governo dos bancos em situação de falência.

²⁸² Observa-se que não consta no texto a tabela de correlação cruzada exposta nas versões anteriores, sendo as descrições aqui resumidas provenientes do é afirmado textualmente na publicação. Para ilustrar a validação empírica os autores utilizam quatro gráficos, sendo dois deles mostrando o logaritmo e as séries filtradas (bpf) da trajetória do PIB, consumo e investimento e os outros dois a correlação cruzada com defasagens entre as variáveis crédito inadimplido e média de empréstimos e a distribuição da duração de crises bancárias.

²⁸³ Ibid. p.164, grifo no original: “a robust way to discriminate among theories is to check their adequacy with regards to a set of empirical regularities – i.e., ‘stylised facts’ – which pertain to the domain of what one is meant to explain”.

Assim, a regularidade referente a i) persistência estrutural do desemprego, fenômeno considerado pelos autores como teste decisivo de qualquer modelo (Idem), é presente no K+S ao se observar o comportamento da série de dados do desemprego; ii) a curva de salários, que relaciona salários reais e taxas de desemprego²⁸⁴, reproduzida graficamente pelos desvios da série de um filtro *Hodrick-Prescot* (HP) para salários reais, em um eixo, e desemprego no outro; iii) a curva de Beveridge que constata a existência de correlação negativa entre taxa de desemprego e taxa de vacância nas firmas, verificada no modelo da mesma forma descrita na curva de salários, tratada acima; e, com o mesmo tratamento pelo filtro e representação gráfica, iv) a curva de Okun que verifica a existência de correlação negativa entre a taxa de crescimento do PIB e desemprego²⁸⁵.

Ademais, é ressaltado que v) as taxas de desemprego e taxa de vacância possuem volatilidade uma ordem de magnitude superior que a volatilidade da produtividade²⁸⁶, o que fica evidenciado nas séries simuladas dos desvios padrões da razão vagas de trabalho sobre desemprego, expressa como desvios de um filtro HP, e pela produtividade do trabalho.²⁸⁷

Por fim, na versão explorada em Dosi et al. (2017b) remete-se aos mesmos fatos estilizados e regularidades do modelo mencionadas acima, para simulações de 500 períodos, onde são descartados os 100 primeiros transientes, com 50 replicações.²⁸⁸

3.3.5 Análise de sensibilidade

Relata-se concisamente nessa subseção a maneira empreendida nas versões da família do modelo K+S para o expediente de análise de sensibilidade. Para esse fim, explora-se o

²⁸⁴ “the empirical wage curve is theoretically consistent with the ‘unemployment as a discipline device’ (Shapiro and Stiglitz, 1984) or, similarly, the Marxian reserve army” (Ibid., p.165, grifos no original).

²⁸⁵ “what is relevant is the negative cross-correlation which tells about a robust positive correlation between output and productivity growth rates (...). The same evidence might also be interpreted in a more structuralist perspective, in our view complementary to the Okun curve: under conditions of increasing returns, output growth is likely to yield *permanent* productivity increases” (Ibid., p.165, grifo no original).

²⁸⁶ “empirical evidence seems to suggest that the standard deviation of both vacancy and unemployment rates is around ten times higher than the one of labour productivity, even if the latter three are also pro-cyclical” (Ibid., p.165).

²⁸⁷ Também são ressaltadas como regularidades empíricas, no entanto sem traçar uma associação delas ao observado pelas séries de dados simuladas na parte que discute a validação do modelo, que o desemprego e a desigualdade são positivamente correlacionados, que as taxas de busca de emprego são pró-cíclicas e que há correlação negativa entre flexibilidade no mercado de trabalho e taxa de desemprego (Ibid., p.165).

²⁸⁸ Ibid., p.692-93: “the labour-augmented K+S model allows (...) to account for the set of stylized facts of the labour market, namely, matching functions, structural unemployment, Beveridge-, Wage- and Okun curves, frequencies of hiring and firing rates, relative standard deviations of productivity versus unemployment-vacancy rates”.

conteúdo evidenciado em duas versões do modelo, especificamente em Dosi et al. (2017b) e em Dosi et al. (2022), onde há a utilização do procedimento, indicando-se a forma adotada em cada publicação para a análise de sensibilidade, à luz do apresentado na seção 2.3 do capítulo anterior, dos objetivos alegados e os resultados obtidos no contexto das especificidades de cada versão.

Assim, o procedimento de análise de sensibilidade global, empregado para exploração paramétrica e para conferência dos experimentos de simulação realizados, é utilizada em Dosi et al. (2017b) em uma versão expandida do modelo por especificações ligadas ao mercado de trabalho. Na publicação se verifica a robustez dos experimentos voltados a avaliação dos efeitos em variáveis selecionadas de mudanças institucionais no mercado de trabalho impostas ao centésimo período de um exercício de simulação com 400 períodos, de modo a comparar dinamicamente os efeitos decorrentes de distintas especificações do mundo do trabalho.

Para tanto, antes da aplicação dos procedimentos que possibilitam a decomposição da variância e exploração de diferentes combinações paramétricas, é empregado o procedimento de efeitos elementares no intento de realizar uma triagem inicial entre os parâmetros mais relevantes para as variáveis resposta de interesse.²⁸⁹ Assim, pelo cálculo dos efeitos elementares, cujos resultados não figuram na publicação, dos 36 parâmetros²⁹⁰ calibráveis do modelo é lograda a redução para o número de 16 ao descartar aqueles que não afetam significativamente as variáveis ou métricas de interesse do experimento, que são a média ponderada do mark-up para medir distribuição da renda funcional, o coeficiente de Gini para distribuição da renda pessoal, a taxa de crescimento do desemprego e da produtividade.

Na análise de sensibilidade, como em Salle e Yildizoğlu (2014), utiliza-se a amostragem por Hipercubo Latino Quase Ortogonal (HLQO) e a meta-modelagem por Kriging e, como medida de sensibilidade, emprega-se a decomposição de Sobol', seguindo o procedimento anteriormente estabelecido em Dosi, Pereira e Virgillito (2017). Não são reportados na publicação o formato para os meta-modelo Kriging estimados e a dimensão do HLQO, embora,

²⁸⁹ Vale lembrar que ambos os métodos, de efeitos elementares e os pertinentes à análise de sensibilidade, são tratados na seção 2.3 do capítulo anterior.

²⁹⁰ No texto é informada a quantidade de 35 parâmetros (Ibid., p.706), no entanto ao contar-se a tabela referenciada de valores da calibração da simulação padrão se verifica a presença de 36 parâmetros.

nesse último caso, possa-se inferir o uso de HLQO de 16 variáveis e 65 pontos experimentais. A decomposição da variância é ilustrada por um gráfico de barras distinguindo os efeitos de primeira ordem e efeitos indiretos de interação para cada variável resposta em relação aos 16 parâmetros e, para aqueles mais relevantes, o traçado gráfico tridimensional ou bidimensional das superfícies, com o uso do meta-modelo Kriging, formadas por dois deles e a respectiva variável resposta no terceiro eixo.

Sucedem-se como resultado da análise que para o experimento de mudança institucional do mercado de trabalho considerado, tendo-se como variável resposta a média ponderada do mark-up o único parâmetro relevante é o mark-up inicial, para o coeficiente de Gini a variável referente ao benefício de seguro desemprego em proporção do salário médio é a mais relevante seguida do parâmetro relativo ao processo de inovação, para a variável taxa de crescimento da produtividade as variáveis mais expressivas são também aquelas ligadas a inovação e oportunidades tecnológicas e para a variável taxa de desemprego se destacam o parâmetro relacionado a intensidade do mecanismo de seleção dado pela equação *replicator* e o parâmetro que define o aumento mínimo de salário para o trabalhador mudar de empregador.²⁹¹

Outra versão da família do K+S onde há também o emprego dos procedimentos pertinentes à análise de sensibilidade ocorre em Dosi et al. (2022) que expande a versão apresentada em Dosi et al. (2017a), abordada acima, ao incluir a possibilidade do advento de novos paradigmas tecnológicos que ensejam a introdução de novas gerações de máquinas qualitativamente diferentes, da emergência endógena de novas indústrias do setor produtivo de bens de consumo e da incorporação de dinâmicas de consumo das classes de renda instruídas pela satisfação hierárquica de preferências da classe entre bens básicos e bens de luxo.²⁹²

Assim, o trabalho visa à exploração paramétrica da versão no que tange a determinadas métricas, nomeadamente, o índice de Gini, a taxa de desemprego, as taxas de

²⁹¹ Ibid., p.709 e 710.

²⁹² Dosi et al., 2022, p.3. Em específico, os autores explicam, no trecho reproduzido a seguir, a incorporação no modelo de novas dinâmicas de consumo pelos trabalhadores: “Consumer splits the income between basic – and luxury – goods budgets, entirely allocating her income to basic goods up to a given threshold, corresponding to the median of income distribution, and the excess, if any, to luxury consumption. (...) [The] consumption bundle at each period is comprised by a set of heterogeneous basic consumption goods, each one supplied by a different industry and firm, plus possibly one or more units of a single luxury goods” Ibid., p.7.

demissão e de contratação e o indicador HH (*Herfindahl-Hirschman*) de concentração de mercado, relacionando-as aos seus respectivos parâmetros de entrada mais relevantes e traçando os comportamentos que emergem da interação entre esses parâmetros e as métricas consideradas.²⁹³

Para tal propósito, é adotado expediente de análise de sensibilidade global análogo ao apresentado acima, empreendido em Dosi et al. (2017b), que envolve a utilização da sensibilidade medida por efeitos elementares para triagem inicial das variáveis relevantes, o planejamento do experimento por meio de HLQO, a meta-modelagem por Kriging e a decomposição da variância de Sobol'.

Particularmente, tendo-se a simulação efetuada cobrindo 500 períodos e descartando os 100 primeiros e pelo estabelecimento dos valores mínimos e máximos que conformam o intervalo de variação de cada parâmetro²⁹⁴, necessário ao procedimento de análise de sensibilidade, são avaliados os efeitos diretos decorrentes de todos os parâmetros sujeitos à definição exógena do modelo em relação a cada variável resposta (*output*) de interesse, aqui chamadas de métricas, discriminadas acima, por meio da análise dos efeitos elementares no intuito de selecionar aqueles mais relevantes ao desconsiderar os que pela medida se mostraram pelos efeitos de primeira ordem irrelevantes.

Desta feita, dos 93 parâmetros e condições iniciais calibráveis dessa versão do modelo, a triagem a partir dos efeitos elementares propicia a redução para 64 parâmetros, considerando 5% de significância, 29 parâmetros a 2% de significância e 12 fatores contando com o nível de 1% de significância estatística, descartando os que aparecem em multiplicidade em mais de um nível de significância²⁹⁵.

²⁹³ Conforme estabelecido pelos autores sobre os objetivos da utilização da análise de sensibilidade na versão do modelo: "Drawing on large scale sensitivity analysis, we will therefore explore the model behaviour with reference to some variables of interest, relate to the future of work scenarios" (Dosi et al., 2022, p.4). Adiciona-se o seguinte trecho que revela a intencionalidade ao se recorrer a análise: "Our primary focus here is on the dynamics of disruptive technological change, that is the arrival of new paradigms together with the compensation effects of the demand side" (Ibid., p.9).

²⁹⁴ Os autores explicam sobre o critério de seleção dos valores máximos e mínimos para cada parâmetro no trecho reproduzido a seguir: "In practical terms, we constrained the experimental domain to ranges of the parameters that are empirically reasonable and respect minimal technical restrictions of the original model. (...) The technical feasibility criterion adopted was the minimally 'normal' operation of the market, measured by the survival of at least two firms during the majority of simulation time steps" Dosi et al., 2022, p.14.

²⁹⁵ Tendo-se como critério para o ranqueamento das variáveis mais relevantes a seleção de 70% das contribuições dos respectivos efeitos elementares para os níveis de 5% e 2% de significância e 90% das que figuram a 1% de significância (Ibid., p.15).

Com esses três conjuntos de parâmetros são, assim, constituídos planejamentos do experimento por HLQO de diferentes dimensões²⁹⁶ que são utilizados para estimação do meta-modelo por Kriging em relação a cada variável resposta de interesse e, contiguamente, as respectivas decomposições da variância de Sobol'. As decomposições da variância e a utilização do Kriging para as superfícies de resposta geradas pela interação entre cada métrica e seus respectivos parâmetros de relevo são graficamente reportadas junto ao texto, o que permitem revelar a emergência de comportamento a princípio imprevisos, como a interdependência entre estruturas do modelo, pontos críticos e não linearidades.

Com efeito, por meio do procedimento descrito é constatado que para a métrica referente ao índice de Gini o parâmetro destacadamente mais importante é aquele relativo à intensidade da competição intra-industrial atuante na equação *replicator*, presente nessa versão do modelo, responsável por 45% dos efeitos totais de interação. Para a variável resposta taxa de desemprego o mesmo parâmetro mencionado acima para o índice de Gini relacionado a intensidade da competição na *replicator* se mostra como o mais expressivo, seguido pelo parâmetro que mede em média quantas filas de emprego cada trabalhador desempregado se inscreve²⁹⁷. Para a métrica taxa de demissão o parâmetro relativo a parcela desejada de estoques do setor de bens de consumo²⁹⁸ se manifesta como o mais relevante seguido pelo parâmetro, já mencionado, que mede o número médio de filas para uma vaga de emprego que cada trabalhador postulante se inscreve, ambos tanto em efeitos diretos quanto indiretos.²⁹⁹ A taxa de contratação é, por sua vez, influenciada, em primeiro lugar, pelo mesmo fator referente ao número de filas de vagas de emprego e, em segundo, pelo parâmetro de produtividade do trabalho da produção do setor de bens de capital. Por fim, a concentração de mercado para ambos os setores, medidas pelo índice HH, tem como fatores mais importantes aqueles relacionados com a própria dinâmica de cada setor. Assim, o índice HH para o setor de bens de capitais tem os parâmetros relacionados a distribuição estocástica do tipo Beta do esforço de imitação e o parâmetro de intensidade de busca de clientes pela

²⁹⁶ É indicado que cada ponto do experimento do HLQO “was sampled from 5 to 20 times, according to the NOLH size, to deal with the model’s stochastic components” (Ibid., p.15).

²⁹⁷ Denotado pelo parâmetro ω na equação (a40), acima.

²⁹⁸ O parâmetro ι da equação (a1) da seção anterior.

²⁹⁹ Os autores comentam sobre a influência, inicialmente inesperada, desses parâmetros: “Notably, the two parameters refer to model domains ex-ante detached, namely the intensity of accumulation of inventories by firms and the number of applications sent by workers. The two behavioural rules which refer to distinct structures of agents are however both directly influencing the final firing rate” (Ibid., p.17).

firma como os mais importantes. Já o HH para o setor de bens de consumo tem os fatores de ativos líquidos inicial das firmas entrantes e o número mínimo de indústrias de bens de consumo básicos como os mais expressivos.

3.4 O MODELO CAIANI ET AL. (2016)

3.4.1 Introdução

Objetiva-se nessa seção a apresentação do modelo concebido em Caiani et al. (2016) e, posteriormente, ampliado em Caiani, Russo e Gallegati (2019), tendo-se como principais focos da exposição uma sintética descrição dos agentes e relações encadeadas no modelo e suas formas funcionais subjacentes, presentes nas subseções 3.4.2 e 3.4.3, respectivamente, a descrição na subseção 3.4.4 da proposta de calibração preconizada pelos autores, a prática e resultados relativos à validação na subseção 3.4.5 e, por fim, o que se identifica nas publicações no que tange a análise de sensibilidade do modelo, disposto na subseção 3.4.6.

3.4.2 Descrição do modelo

“[Our] paper has two fundamental objectives. On the one hand we provides a fully decentralized AB-SFC model in which accounting consistency is implemented at the very bottom level in order to give account of structural interrelatedness of agents’ balance sheet. (...) In addition to this, the paper has also a fundamental methodological purpose in that it aims at setting a set of replicable and general rules to build, calibrate, and validate (internally and externally) AB-SFC models building upon the best practices proposed in the AB and SFC literature, while discussing new recipes design to address AB-SFC specific issues, in particular regarding the calibration procedure” (Caiani et al., 2016, p.377-78).

O modelo tem sua origem em Caiani et al. (2016) e, conforme descrito na epígrafe acima, é desenvolvido com o duplo objetivo de, por um lado, conformar um modelo de simulação baseado em agentes que integra em sua estrutura normas de consistência contábil entre fluxos de estoques em seus diversos níveis de agregação, conhecida como agenda SFC (*Stock Flow consistency*, em inglês) e, por outro, propõe regras gerais para calibração e verificação desse tipo de modelo.

Em Caiani, Russo e Gallegati (2019) o modelo é expandido no sentido de incluir a segmentação de quatro classes de trabalhadores que atuam diferenciadamente no processo

produtivo, com consequências em termos distributivos e de padrões de consumo, e pela admissão da possibilidade de avanço técnico, proporcional aos recursos alocados para contratação de trabalhadores voltados à pesquisa e desenvolvimento (P&D), incorporado às safras de bens de capital na forma de ganhos de produtividade do trabalho.

Os agentes que constituem o modelo são os ϕ_H trabalhadores (chamados na publicação de *households*)³⁰⁰, as ϕ_C firmas do setor de bens de consumo, as ϕ_K firmas do setor de bens de capital, os ϕ_B bancos e o setor público formado pelo governo e pelo banco central.

Em linhas gerais, os trabalhadores, quando empregados, recebem salários pagos pelas firmas, consomem bens de consumo, depositam recursos em bancos, recebem proporcionalmente às suas riquezas uma parcela dos lucros de firmas e bancos na forma de dividendos, pagam impostos sobre renda e, quando desempregados, recebem seguro desemprego do governo.

As firmas do setor de bens de consumo produzem um bem homogêneo empregando trabalho e máquinas³⁰¹ produzidas pelas firmas de bens de capital. Em ambos os setores as firmas podem requerer empréstimos aos bancos, depositam recursos na forma de lucros retidos em contas bancárias, pagam juros da dívida e principal ao banco, pagam impostos sobre o lucro ao governo e distribuem dividendos.

Os bancos, conforme mencionado, recebem recursos em contas de depósitos, concedem empréstimos às firmas, compram títulos da dívida pública e seguem razões da capital e liquidez mandatórias. Quando não estão em conformidade com a razão de liquidez, requerem recursos ao banco central na forma de adiantamentos de caixa.

O governo contrata trabalhadores servidores públicos como proporção constante da força de trabalho, pagam benefícios de seguro desemprego, juros e principal da dívida pública e recolhem tributos sobre os lucros de firmas e bancos e renda de trabalhadores, recebe o montante de lucro auferido pelo banco central e emite dívida pública para cobrir seus déficits.

³⁰⁰ Aqui, por concisão, não se fará a distinção presente em Caiani, Russo e Gallegati (2019, p.183) de categorias de trabalhadores, discriminados na obra em trabalhadores operários (*blue-collars*), pesquisadores e trabalhadores de escritório (*White-collars*) e a classe gerencial (*executives*).

³⁰¹ Na versão original do modelo, em Caiani et al. (2016), os bens de capital são homogêneos e caracterizados por sua produtividade do capital e razão constante capital trabalho, enquanto que em Caiani, Russo e Gallegati (2019) há safras heterogêneas em produtividade dos bens de capital.

O banco central mantém as reservas de bancos comerciais e provê liquidez por adiantamentos de caixa e compra títulos públicos não adquiridos pelos bancos.

A cronologia ou sequência de eventos que ocorrem a cada período discreto de tempo simulado é concisamente relatada nas próximas linhas, seguindo o disposto nas duas versões do modelo aqui consideradas. O primeiro evento de cada período consiste na definição do nível de produção desejada das firmas de bens de consumo e de bens de capital. A partir desse nível é determinada a demanda por trabalho de ambos os setores produtivos em termos de número de trabalhadores necessários para produção no nível desejado. Em seguida, os preços dos bens produzidos pelas firmas dos dois setores são estabelecidos por uma regra de mark-up sobre os custos variáveis unitários da firma, os juros que remuneram as contas de depósitos e os relativos aos empréstimos concedidos pelos bancos são fixados e o nível dos salários de reserva é adaptativamente ajustado pelos trabalhadores. O investimento em acumulação de capital das firmas do setor de bens de consumo é definido seguindo a taxa desejada de crescimento da capacidade produtiva, que depende da taxa de retorno e do grau de utilização da capacidade da firma, e contiguamente o fornecedor dos bens de capital é escolhido. O volume demandado de crédito pelas firmas é determinado e o banco emprestador selecionado efetua avaliação do pedido de empréstimo. A seguir, ocorre no mercado de trabalho as contratações de trabalhadores desempregados e as firmas de bens de consumo e de capital realizam efetivamente suas respectivas produções. No setor de bens de capital as firmas realizam pesquisa e desenvolvimento na busca de avanço técnico³⁰² e entregam às firmas de bens de consumo máquinas adquiridas no período anterior. As firmas de bens de consumo compram bens de capital de seus fornecedores selecionados, sendo as máquinas adquiridas instaladas para operação no período seguinte, e os trabalhadores compram bens de consumo seguindo uma proporção de suas rendas disponíveis e do estoque de seus recursos líquidos. Logo após, as firmas pagam os juros das dívidas e uma parcela constante do principal, o governo paga os juros e resgata os títulos da dívida pública, os bancos pagam os juros que remuneram as contas de depósitos e saldaram os adiantamentos de caixa fornecidos pelo banco central e seus respectivos juros. Em seguida, são pagos os salários pelas firmas aos trabalhadores empregados e o seguro desemprego aos desempregados pelo governo. Impostos sobre o lucro e renda são coletados pelo governo, dividendos são

³⁰² Ressalta-se que esse evento é específico da versão do modelo desenvolvida em Caiani, Russo e Gallegati (2019) em que é previsto o esforço para avanço técnico nas firmas produtoras de bens de capital.

distribuídos pelas firmas e tanto trabalhadores quanto firmas selecionam qual banco depositar seus recursos líquidos. Por fim, bancos comerciais e o banco central compram títulos da dívida pública emitidos e, caso necessário, o banco central provê liquidez aos bancos por meio de adiantamentos de caixa.

Segue-se na próxima subseção a descrição resumida das principais equações subjacentes às interações e comportamentos dos agentes constituintes do modelo.

3.4.3 As equações do modelo

As equações que descrevem o comportamento dos agentes seguem o exposto na versão original do modelo em Caiani et al. (2016), exceto quando diferentemente apontado, dado que a versão desenvolvida em Caiani, Russo e Gallegati (2019) expande o modelo e altera alguma de suas equações originais.

A notação das formas funcionais apresentadas segue proximamente a obra original com pontuais adaptações para se manter a consistência com as outras famílias de modelos expostas nas demais seções desse capítulo. Nesse sentido, denota-se as firmas do setor de bens de consumo pelo subscrito c , as firmas do setor de bens de capital por k , os bancos são distinguidos por b e os trabalhadores são identificados pelo subscrito h . Ademais, as expressões que valem para ambos os setores produtivos levam o subscrito x , o sobrescrito D distingue o desejado do efetivamente realizado e o sobrescrito e discriminam as variáveis que descrevem expectativas, como, por exemplo, a expectativa quanto ao nível de salário no período t denotado por $W_{x,t}^e$.

Desse modo, as próximas sete subseções descrevem separadamente, nesta ordem, as equações e determinadas regras de comportamento que se aplicam a todos os agentes, as firmas de bens de consumo, firmas de bens de capital, o setor financeiro, o setor público, o mercado de trabalho e em relação a falência de firmas e bancos.

3.4.3.1 Para todos os agentes

A expressão que caracteriza a formação das expectativas do tipo adaptativas é exposta em (b1), abaixo, e se aplica a todos os agentes da economia. Assim, para uma variável genérica z_t^e a expectativa, explicitada pelo sobrescrito e , quanto ao seu valor no período corrente t é

formada pela expectativa do período anterior, z_{t-1}^e , somada a sua diferença em relação ao valor efetivamente observado, ajustado pelo parâmetro exógeno λ .

$$z_t^e = z_{t-1}^e + \lambda(z_{t-1} - z_{t-1}^e) \quad (b1)$$

Tratando-se da produção planejada, ou desejada, das firmas de ambos os setores produtivos, identificado pelo subscrito x , pela regra descrita na equação (b2) a seguir as firmas definem o nível em termos reais de sua produção, denotado por $y_{x,t}^D$, pela expectativa quanto as vendas no período, $s_{x,t}^e$, regida segundo a expressão (b1) apresentada acima, adicionada de uma parcela v relativa a manutenção do nível de estoques de bens produzidos de modo a confrontar eventuais oscilações da demanda, descontado do estoque de bens produzidos no período anterior $inv_{x,t-1}$.³⁰³

$$y_{x,t}^D = s_{x,t}^e(1 + v) - inv_{x,t-1} \quad (b2)$$

A formação do preço do bem produzido por cada firma igualmente segue uma mesma regra aplicada aos dois setores produtivos, de bens de consumo e de bens de capital. Desse modo, o preço no período t , explicitado por $p_{x,t}$ na expressão (b3), abaixo, é definido por uma regra de mark-up sobre os custos unitários variáveis, onde $\mu_{x,t}$ denota o mark-up variável da firma e a razão no lado direito da equação define o custo unitário esperado do trabalho, em que $W_{x,t}^e$ representa a média esperada para o salário, $N_{x,t}^D$ é a quantidade desejada de trabalhadores demandada pela firma³⁰⁴. Destaca-se que pelo fato das firmas no modelo definirem seus níveis desejados de produção, demanda por trabalho e preços antes da efetiva contratação de trabalhadores e produção, de acordo com a cronologia de eventos apresentada anteriormente, o custo unitário do trabalho que figura na equação de preço é avaliado em termos de expectativas, podendo, portanto, ser diferente do efetivamente observado.

O mark-up, ao seu turno, evolui endogenamente seguindo a expressão (b4), abaixo, de acordo com a razão entre o nível de estoques e as vendas do período passado que, por exemplo, caso seja menor ou igual ao parâmetro v , tratado acima, enseja um aumento no

³⁰³ Vale observar que o mesmo formato da expressão de produção desejada é adotado nas outras duas famílias de modelos abordadas no presente capítulo, idênticas a equação do ciclo de estoques em Gandolfo (1980, p.121), guardando-se, evidentemente, as diferenças relativas a estruturação de cada modelo.

³⁰⁴ A quantidade de trabalhadores desejada é, por sua vez, função da produção desejada e da produtividade do trabalho, conforme mostrado a seguir para o setor de bens de consumo e bens de capital.

mark-up em FN, aleatoriamente determinado por uma distribuição normal dobrada (*folded normal*, em inglês) cuja média e desvio padrão (μ_{FN}, σ_{FN}^2) são exogenamente definidos.

$$p_{x,t} = (1 + mu_{x,t}) \frac{W_{x,t}^e N_{x,t}^D}{y_{x,t}^D} \quad (b3)$$

$$mu_{x,t} = \begin{cases} mu_{x,t-1}(1 + FN) & \text{se } \frac{inv_{x,t-1}}{S_{i,t-1}} \leq v \\ mu_{x,t-1}(1 - FN) & \text{se } \frac{inv_{x,t-1}}{S_{i,t-1}} > v \end{cases} \quad (b4)$$

Adiciona-se que na versão do modelo desenvolvida em Caiani, Russo e Gallegati (2019, p.189) a expressão que define a evolução do mark-up no caso específico das firmas do setor de bens de consumo é modificada de modo a incluir à regra de revisão adaptativa o grau de utilização da capacidade da firma no período anterior $u_{c,t-1}$ que, por exemplo, quando acima do grau normal de capacidade \bar{u} , admitido como constante e igual para todas as firmas, incita em conjunto com o nível de estoques um acréscimo ao mark-up, conforme descrito pela expressão (b4.1), abaixo.

$$mu_{c,t} = \begin{cases} mu_{c,t-1}(1 + FN) & \text{se } \frac{inv_{c,t-1}}{S_{i,t-1}} \leq v \text{ e } u_{c,t-1} \geq \bar{u} \\ mu_{c,t-1}(1 - FN) & \text{se } \frac{inv_{c,t-1}}{S_{i,t-1}} > v \text{ ou } u_{c,t-1} < \bar{u} \end{cases} \quad (b4.1)$$

As formas funcionais referentes ao comportamento especificamente das firmas de bens de consumo são descritas na subseção a seguir.

3.4.3.2 As firmas bens de consumo

No setor de bens de consumo, tendo-se definido a produção desejada para o período a partir de (b2), define-se o grau de utilização da capacidade necessária para o nível de produção desejado, denotado por $u_{c,t}^D$ na expressão (b5), como sendo o menor valor entre a unidade e a razão entre o nível desejado de produção e a capacidade produtiva instalada na firma, onde $k_{c,t}$ representa o estoque de capital instalado na firma e μ_k é chamado de produtividade do capital.

$$u_{c,t}^D = \min \left(1, \frac{y_{c,t}^D}{k_{c,t} \cdot \mu_k} \right) \quad (b5)$$

Dado o grau desejado de utilização da capacidade, descrito acima, chega-se a quantidade de trabalhadores necessários na produção $N_{c,t}^D$, calculado pela equação (b6), onde l_k é a razão capital-trabalho estabelecida como constante no modelo.

$$N_{c,t}^D = u_{c,t}^D \frac{k_{c,t}}{l_k} \quad (b6)$$

O investimento da firma em acumulação de capital em cada período ocorre seguindo uma taxa de crescimento desejada da capacidade produtiva, denotada por $g_{c,t}^D$ na expressão (b7), que é definida como sendo uma parcela γ_1 da taxa de retorno da firma do período anterior $r_{c,t-1}$ avaliada relativamente a uma taxa de retorno chamada de normal, \bar{r} , constante e igual para todas as firmas, somada a uma parcela γ_2 do grau desejado de utilização da capacidade da firma em relação ao grau de utilização considerado normal \bar{u} , também constante e igual para todas as firmas.

A taxa de retorno da firma $r_{c,t}$ é, por sua vez, definida a cada período pela razão entre o fluxo de caixa operacional líquido da firma³⁰⁵ $OCF_{c,t}$, no numerador da expressão (b8), e no denominador o valor no período anterior do estoque de capital da firma, já descontado da depreciação considerando o tempo de vida útil do capital instalado. Assim, em (b8) o somatório no numerador descreve o valor do estoque de capital no período anterior para cada lote k de capital instalado k^k e seu respectivo preço p^k , subtraído pela razão entre a idade, ou tempo de uso, de cada lote k de capital até o período passado $age_{k,t-1}$ e o tempo de vida útil do capital, denotado por κ e definido na calibração da simulação padrão (*baseline*) do modelo como sendo 20 períodos.

$$g_{c,t}^D = \gamma_1 \frac{r_{c,t-1} - \bar{r}}{\bar{r}} + \gamma_2 \frac{u_{c,t}^D - \bar{u}}{\bar{u}} \quad (b7)$$

$$r_{c,t} = \frac{OCF_{c,t}}{\sum_{k \in K_{c,t-1}} (k^k p^k) \left(1 - \frac{age_{k,t-1}}{\kappa}\right)} \quad (b8)$$

Dessa forma, a demanda desejada em termos reais por bens de capital $i_{c,t}^D$ representa o número de unidades de capital necessário para satisfazer a taxa de crescimento desejado

³⁰⁵ Não é exposta nas duas versões do modelo aqui referenciadas a expressão para $OCF_{c,t}$ que é textualmente definido como sendo os lucros líquidos de impostos somados aos custos das amortizações do capital adquirido e subtraído pela variação dos estoques e pagamento do principal. O fluxo de caixa operacional líquido é indicado pelos autores como uma medida alternativa ao lucro para o desempenho da firma com o condão de medir a capacidade em gerar fluxo de caixa positivo por meio da operação normal da firma (Caiani et al., 2016, p.384).

da capacidade produtiva considerando também o capital totalmente depreciado. Assim, o investimento nominal desejado $I_{c,t}^D$ é computado pela multiplicação do investimento real pelo referente ao capital $p_{k,t}$, conforme explicitado na equação (b9), abaixo.

$$I_{c,t}^D = i_{c,t}^D \cdot p_{k,t} \quad (b9)$$

Nível desejado de empréstimos requerido junto aos bancos pela firma, denotado por $L_{c,t}^D$, é descrito pela expressão (b10), onde $Div_{c,t}^e$ representa o desembolso esperado com pagamento de dividendos, o termo $\sigma W_{c,t}^e N_{c,t}^D$ expressa uma parcela σ do volume de gasto esperado com salários, provisionado por razões precaucionais³⁰⁶, e $OCF_{c,t}^e$ é a expectativa quanto ao fluxo de caixa líquido da firma.

$$L_{c,t}^D = I_{c,t}^D + Div_{c,t}^e + \sigma W_{c,t}^e N_{c,t}^D - OCF_{c,t}^e \quad (b10)$$

Tendo-se efetivado as vendas, o lucro bruto da firma é computado de acordo com a expressão (b11), abaixo, que soma a receita obtida com as vendas, o termo $s_{c,t} p_{c,t}$, com a remuneração dos ativos nas contas de depósito nos bancos, em que $i_{b,t-1}^d$ é a taxa de juros dos depósitos do banco b e $D_{c,t-1}$ é o montante dos depósitos no banco, com a variação de valor dos estoques avaliados em relação ao custo unitário da produção $uc_{c,t}$, e subtraindo da massa de salários pagos aos $N_{c,t}$ trabalhadores da firma, dos juros referentes aos empréstimos contraídos até o período anterior, onde i_j^l é a taxa de juros do empréstimo $L_{c,j}$ obtido no período j e η é a duração até o pagamento da dívida junto ao banco, e da amortização referente a todos os lotes de capital quem compõem o estoque de capital $K_{c,t-1}$.³⁰⁷

$$\begin{aligned} \pi_{c,t} = & s_{c,t} p_{c,t} + i_{b,t-1}^d D_{c,t-1} + (inv_{c,t} uc_{c,t} - inv_{c,t-1} uc_{c,t-1}) - \sum_{n \in N_{c,t}} w_{n,t} \\ & - \sum_{j=t-\eta}^{t-1} i_j^l L_{c,j} \frac{\eta - [(t-1) - j]}{\eta} - \sum_{k \in K_{c,t-1}} (k^k p^k) \frac{1}{\kappa} \end{aligned} \quad (b11)$$

Os dividendos efetivamente distribuídos representam uma parcela ρ_c dos lucros líquidos de impostos, conforme expresso em (b12), e os impostos pagos pela firma ao governo, $T_{c,t}$ na expressão (b13) é definido pela alíquota τ_π em relação ao lucro da firma.

³⁰⁶ "We assume that firms desire to hold a certain amount of deposits, expressed as a share σ of the expected wages disbursement, for precautionary reasons" (Caiani et al., 2016, p.385).

³⁰⁷ Vale comentar que o parâmetro η de duração da dívida é calibrado de modo a assumir o mesmo valor da vida útil do capital κ .

$$Div_{c,t} = \max[0, \rho_c \pi_{c,t} (1 - \tau_\pi)] \quad (b12)$$

$$T_{c,t} = \max(\tau_\pi \pi_{c,t}, 0) \quad (b13)$$

3.4.3.3 As firmas bens de capital

Nas firmas do setor que produz bens de capitais, a partir de sua produção desejada $y_{k,t}^D$ seguindo o mesmo formato exposto em (b2), tem-se a determinação do número de trabalhadores que a firma necessita contratar, $N_{k,t}^D$ na equação (b14), abaixo, onde μ_N denota a produtividade do trabalho, parâmetro constante para o setor e exogenamente definido.

$$N_{k,t}^D = \frac{y_{k,t}^D}{\mu_N} \quad (b14)$$

A necessidade de empréstimos da firma, $L_{k,t}^D$, segue formato semelhante ao referente a firma de bens consumo com a diferença da ausência de um componente referente ao gasto com investimento, não existente para a firma de bens de capitais, conforme descrito na equação (b15), a seguir.

$$L_{k,t}^D = Div_{k,t}^e + \sigma W_{k,t}^e N_{k,t}^D - OCF_{k,t}^e \quad (b15)$$

Os lucros da firma, $\pi_{k,t}$ na expressão (b16), também são definidos de forma análoga à firma de bens de consumo, diferenciando-se apenas pela não existência de gasto com a amortização do capital.

$$\begin{aligned} \pi_{k,t} = & s_{k,t} p_{k,t} + i_{b,t-1}^d D_{k,t-1} + (inv_{k,t} uc_{k,t} - inv_{k,t-1} uc_{k,t-1}) - \sum_{n \in N_{k,t}} w_{n,t} \\ & - \sum_{j=t-\eta}^{t-1} i_j^l L_{k,j} \frac{\eta - [(t-1) - j]}{\eta} \end{aligned} \quad (b16)$$

Os dividendos e impostos são calculados da mesma forma procedida para o setor de bens de consumo, destacados nas equações (b12) e (b13), respectivamente, acima, como uma proporção ρ_k dos lucros líquidos³⁰⁸, para a distribuição de dividendos, e uma parcela τ_π do lucro da firma para o montante de tributos pagos.

³⁰⁸ Observa-se que o parâmetro relativo a proporção do lucro líquido distribuído como dividendos das firmas de bens de capital é calibrado no modelo no mesmo nível que para as firmas de bens de consumo, isto é, $\rho_k = \rho_c = 0,9$.

Na versão do modelo desenvolvida em Caiani, Russo e Gallegati (2019, p.190-91) é incluída a possibilidade de avanço técnico da firma de bens de capital mediante a alocação de recursos voltados à pesquisa e desenvolvimento (P&D), utilizados para o pagamento de salários a trabalhadores pesquisadores. A atividade de P&D da firma distingue-se entre inovação e imitação seguindo em cada tipo um processo em duas etapas.

Assim, a primeira etapa da busca pelo avanço técnico em inovação é caracterizada pela definição da probabilidade de sucesso do esforço inovativo que guarda relação com a quantidade de trabalhadores em P&D na firma, conforme exibido em (b17), onde $Pr_{t,k}^{inn}$ representa a probabilidade do sucesso em inovação, ξ^{inn} é um parâmetro exógeno positivo referente a inovação e $N_{kr,t}$ é a quantidade de trabalhadores em P&D da firma.

Tendo-se obtido sucesso no esforço em inovação, a segunda etapa consiste na definição do novo nível de produtividade incorporada aos bens de capital produzidos pela firma, descrito pela equação (b18), em que o ganho de produtividade pela inovação, denotado por $\Delta\mu_{j,t}$, é determinado pela extração aleatória de uma distribuição normal dobrada de parâmetros $(\mu_{FN_3}, \sigma_{FN_3}^2)$.

$$Pr_{t,k}^{inn} = 1 - e^{-\xi^{inn} N_{kr,t}} \quad (b17)$$

$$\mu_{j,t+1} = \mu_{j,t} (1 + \Delta\mu_{j,t}) \quad (b18)$$

Já o avanço técnico por meio de imitação da tecnologia de firmas competidoras ocorre de maneira análogo a primeira etapa da inovação, como mostrado em (b19), abaixo, em que a probabilidade de sucesso imitativo depende também do número de pesquisadores $N_{kr,t}$, sendo ξ^{imi} o parâmetro exógeno e positivo associado a imitação.

Se o esforço imitativo resultar em sucesso a firma logra copiar a maior produtividade entre uma amostra aleatoriamente definida contendo N^{imi} firmas competidoras do setor.

$$Pr_{t,k}^{imi} = 1 - e^{-\xi^{imi} N_{kr,t}} \quad (b19)$$

3.4.3.4 O setor financeiro

Os bancos que constituem o setor financeiro do modelo recebem recursos das firmas e de trabalhadores referentes às contas de depósito e emprestam para ambos setores produtivos em volume sujeito a racionamento de crédito especificado a nível da firma. A cada

período as firmas podem interagir de acordo com suas demandas por crédito, explicitadas nas seções acima em (b10) e (b15), com mais de um banco e selecionam aquele cujas condições do empréstimo se mostrarem melhor para a firma, obtendo possivelmente crédito com prazo fixo de $\eta = 20$ períodos para pagamento do principal e dos juros. Assim, as firmas podem ter uma coleção de empréstimos heterógenos com diferentes bancos.

Os recursos depositados no banco pelos trabalhadores e as firmas são remunerados por uma taxa de juros $i_{b,t}^d$ cuja evolução depende do nível da taxa de liquidez do banco, denotada por $LR_{b,t}$, em comparação com um nível mínimo estabelecido comum para todos os bancos, a meta de taxa de liquidez LR_t^T calculado como a média do setor do período anterior, no sentido de atrair depósitos subindo sua remuneração no caso da taxa de liquidez do banco estar menor que a meta de referência. Dessa feita, conforme ilustrado por (b20), o banco b fixa a taxa de juros de depósitos a cada período pela taxa de juros média do período passado $\bar{i}_{b,t-1}^d$ adicionando ou subtraindo a variável aleatória FN determinada pela extração de uma distribuição normal dobrada de média e desvio padrão $(\mu_{FN}, \sigma_{FN}^2)$ de acordo com seu nível de taxa de liquidez.³⁰⁹

$$i_{b,t}^d = \begin{cases} \bar{i}_{b,t-1}^d(1 - FN) & \text{se } LR_{b,t} \geq LR_t^T \\ \bar{i}_{b,t-1}^d(1 + FN), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (b20)$$

A taxa de juros dos empréstimos concedidos às firmas é determinada de maneira semelhante de acordo com a razão de capital do banco, representado por $CR_{b,t}$ computado conforme descrito em (b23), onde $NW_{b,t}$ é o montante de ativos líquidos do banco e $L_{b,t}^{Tot}$ é o volume total de empréstimos concedidos, em comparação a uma meta comum para todo o setor CR_t^T definida como a média setorial no período passado. Assim, a taxa de juros do empréstimo l , $i_{b,t}^l$ na expressão (b21), é fixada a partir da taxa de juros média do setor praticada no período passado, $\bar{i}_{b,t-1}^l$ calculada conforme (b22), onde o numerador representa o somatório das taxas de juros dos empréstimos de todos os bancos e o denominador $size\Phi_B$

³⁰⁹ Não é explicitado nas publicação a forma de cálculo para a taxa de liquidez $LR_{b,t}$ que tem como limite inferior mandatário estipulado em 8%, recorrendo os bancos a uma espécie de redesconto provido pelo banco central sempre que sua taxa de liquidez estiver abaixo desse limiar inferior. Nas palavras dos autores: “As banks have to satisfy mandatory liquidity ratios (8%) and since deposits represent a source of reserve much cheaper than Central Bank cash advances (...) banks compete with each other on the deposit market” (Caiani et al., 2016, p.386).

o número de bancos na economia, somando-se ou subtraindo-se a variável aleatória FN obtida pela extração de uma distribuição normal dobrada de parâmetros $(\mu_{FN}, \sigma_{FN}^2)$.³¹⁰

$$i_{b,t}^l = \begin{cases} \bar{i}_{b,t-1}^l (1 + FN) & \text{se } CR_{b,t} < CR_t^T \\ \bar{i}_{b,t-1}^l (1 - FN), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (b21)$$

$$\bar{i}_{b,t-1}^l = \frac{\sum_{b \in \Phi_B} i_{b,t-1}^l}{\text{size} \Phi_B} \quad (b22)$$

$$CR_{b,t} = \frac{NW_{b,t}}{L_{b,t}^{Tot}} \quad (b23)$$

As firmas demandantes de empréstimo estão sujeitas a avaliação individualizada de crédito pelos bancos que segue o cálculo da probabilidade de inadimplência do empréstimo já considerando o montante demandado pela firma a partir de uma função logística, reproduzida em (b24), abaixo, em relação aos dois setores produtivos, i.e. o subscrito x, onde $OCF_{x,t}$ é o fluxo de caixa operacional líquido, ds^{L^d} é o serviço da dívida referente ao primeiro pagamento do empréstimo demandado, explicitado em (b25), e ζ_x é o parâmetro que descreve a aversão ao risco do banco.

$$pr_x^D = \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{OCF_{x,t} - \zeta_x ds^{L^d}}{ds^{L^d}}\right)}} \quad (b24)$$

$$ds^{L^d} = \left(i_{b,t}^l + \frac{1}{\eta}\right) L_{x,t}^D \quad (b25)$$

3.4.3.5 O setor público

O setor público no modelo é composto pelo governo e pelo banco central. O governo, pelo lado do gasto, paga salários aos funcionários públicos, benefícios de seguro desemprego, definido como uma parcela ω do salário médio, e juros dos títulos públicos e, pelo lado da receita, arrecada impostos sobre os lucros de firmas e bancos e a renda de trabalhadores, emite títulos da dívida pública e recebe os lucros do banco central que, ao seu turno, adquire títulos públicos não comprados pelos bancos e provê liquidez aos bancos necessitados por meio de adiantamentos de caixa (*cash advances*).

³¹⁰ É estipulado o limite inferior mandatório de 6% para todos os bancos em relação a razão de capital $CR_{b,t}$. Ademais, a lógica para definição da taxa de juros dos empréstimos é descrita da seguinte forma: "When banks are more capitalized than desired, they try to expand further their balance sheet by attracting more customers on the credit market, offering an interest rate lower than their competitors' average. In the opposite case firms want to reduce their exposure: a higher interest rate has the twofold effect of making bank's loans attractive while increasing bank's margin" (Ibid., p.386).

Dessa forma, conforme expresso por (b26), o montante de dívida pública emitida b_t , denotado pelo produto $\bar{p}^b \cdot \Delta b_t$, com preço fixado em \bar{p}^b e taxa de juros \bar{r}^b , equivale ao déficit público no período $def_{g,t}$, calculado pela soma da receita total com impostos T_t com o lucro do banco central $\pi_{cb,t}$ subtraído do somatório dos salários w_n pagos aos $N_{g,t}$ funcionários públicos, do seguro desemprego d_t pagos aos U_t trabalhadores desempregados e dos juros da dívida pública emitida no período anterior cuja maturidade no modelo é de 1 período.

$$\bar{p}^b \cdot \Delta b_t = def_{g,t} = T_t + \pi_{cb,t} - \sum_{n \in N_{g,t}} w_n - U_t d_t - \bar{r}^b \bar{p}^b b_{t-1} \quad (b26)$$

O total de impostos arrecadados pelo governo é discriminado na expressão (b27), abaixo, pela soma dos impostos incididos sobre a renda dos trabalhadores $T_{H,t}$, de alíquota constante τ_i , com os tributos arrecadados dos lucros das firmas de bens de consumo, $T_{C,t}$, das firmas de bens de capital, $T_{K,t}$, e dos bancos, $T_{B,t}$, os três sujeitos a mesma alíquota constante sobre os lucros τ_π . Os trabalhadores desempregados que recebem seguro desemprego são isentos de tributação.

$$T_t = T_{H,t} + T_{C,t} + T_{K,t} + T_{B,t} \quad (b27)$$

O lucro do banco central, repassado ao governo, é definido conforme descrito em (b28) pela soma dos juros da dívida pública adquirida pelo banco central, o termo à esquerda do lado direito da expressão, e pelos juros pagos pelos bancos referentes aos adiantamentos de caixa $CA_{cb,t}$.

$$\pi_{cb,t} = \bar{r}^b b_{t-1} + \bar{r}_{CB}^a CA_{cb,t} \quad (b28)$$

3.4.3.6 O mercado de trabalho

Os trabalhadores definem seus salários de reserva seguindo a regra descrita pela expressão (b29), abaixo, tendo como referência sua situação empregatícia nos últimos quatro períodos. Isto é, o salário que o trabalhador está disposto a receber $w_{h,t}^D$ é decrescido em uma quantidade estocasticamente definida FN caso tenha estado desempregado por mais de dois períodos dos quatro anteriores, tendo-se $u_{h,t} = 1$ caso esteja desempregado e 0 caso contrário. No caso oposto, sofre um acréscimo FN em seu salário de reserva se, em específico a taxa de desemprego u_{t-1} está em nível menor que o parâmetro u que descreve a

rotatividade do trabalho a cada período (*employee turnover*)³¹¹. Essa última condicionalidade é caracterizada pelos autores como uma forma de representação endógena da evolução do poder de barganha dos trabalhadores.

$$w_{h,t}^D = \begin{cases} w_{h,t-1}^D(1 - FN) & \text{se } \sum_{n=1}^4 u_{h,t-n} > 2 \\ w_{h,t-1}^D(1 + FN) & \text{se } \sum_{n=1}^4 u_{h,t-n} \leq 2 \text{ e } u_{t-1} \leq v \end{cases} \quad (b29)$$

O consumo desejado pelos trabalhadores, $c_{h,t}^D$, é determinado seguindo (b30) de acordo com propensões fixas α_1 da renda disponível real esperada e α_2 da expectativa de seus ativos líquidos em termos reais, onde $NI_{h,t}$ é a renda líquida, $NW_{h,t}$ são os ativos líquidos e $p_{h,t}^e$ é o nível esperado dos preços de bens de consumo. Adiciona-se que a renda bruta nominal do trabalhador empregado é descrita pela soma de seu salário com a remuneração da conta de depósito e dos dividendos recebidos, ou seja, $w_{h,t} + i_{b,t-1}^d D_{h,t-1} + Div_{h,t}$.

$$c_{h,t}^D = \alpha_1 \frac{NI_{h,t}}{p_{h,t}^e} + \alpha_2 \frac{NW_{h,t}}{p_{h,t}^e} \quad (b30)$$

3.4.3.7 Falência de firmas e bancos

Tanto as firmas como os bancos são passíveis de sofrerem falência no modelo e quando isso acontece eles são resgatados pelos recursos dos trabalhadores (*households*) que detém a propriedade das firmas e bancos e recebem dividendos delas, ficando, assim, o número de firmas e bancos constante ao longo dos períodos simulados.

As firmas de ambos setores produtivos decretam falência quando lhes faltam liquidez para saldar suas obrigações como o pagamento de salários, custos da dívida e, assim, manterem-se operacionais. Nesse caso, a firma de bens de consumo falida tem sua propriedade temporariamente passada aos credores que buscam recuperar parte da dívida pela venda do capital físico instalado e para as firmas de bens de capital que não possuem colateral a perda é totalmente absorvida pelos bancos credores.

³¹¹ “Workers in excess, when present, are randomly sampled from the pool of firm employees and fired. We also assume a positive employee turnover, expressed as a share u of firms employees” (Caiani et al., 2016, p.384).

Os bancos entram em falência quando seus patrimônios líquidos se tornam negativos e, nesse caso, é considerado que os detentores de recursos em contas de depósito no banco arcam com a perda associada até o ponto em que a razão de capital chegue no mínimo requerido de 6%, tendo-se as perdas distribuídas proporcionalmente aos montantes mantidos em depósito.

3.4.4 Calibração

“Calibration represents a crucial issue for every computational model, in particular when they entail stochastic, path-dependent, possibly non-ergodic dynamics, as it is usually the case in AB models. (...) Despite its importance, still only a few AB macro models provide an exhaustive explanation of the logic followed to calibrate initial values of stocks and flows” (Caiani et al., 2016, p.388).

Os procedimentos inerentes à calibração dos parâmetros do modelo para a consecutiva realização do exercício de simulação são elevados por Caiani et al. (2016, p.378 e 388) como sendo uma destacada contribuição da publicação à literatura no sentido de propor uma metodologia geral e replicável para a calibração de modelos de simulação baseados em agentes que contam com consistência entre fluxos e estoques (AB-SFC).

Em abstrato, os autores indicam a intenção de propor um método para a calibração de fluxos e estoques iniciais e dos demais parâmetros exógenos do modelo de modo a alcançar três distintos objetivos: i) que os valores referentes aos fluxos e estoques devem ser compatíveis desde o início da simulação; ii) que os tamanhos relativos dos estoques devem ser definidos em níveis razoáveis com a realidade que se deseja aproximar pelo exercício de simulação; e iii) que os agentes devem deter dotações suficientemente grandes de modo a conseguirem perpassar por eventuais dinâmicas estranhas ou extremas relativas ao período inicial transiente.³¹²

Resumidamente, a proposta consiste na imposição de simetria e homogeneidade nas características iniciais dos agentes, da agregação de setores e da instituição de estado estacionário³¹³ com crescimento nominal definido exogenamente de modo a possibilitar a

³¹² Ibid., p.380

³¹³ A situação de estado estacionário, valer comentar, não perdura ao longo do exercício de simulação devido à dinâmica própria ao modelo, em que heterogeneidades emergem ao longo dos períodos simulados: “Despite agents within each class are almost perfectly homogeneous at the beginning of our simulations, heterogeneity emerges during the simulation, first as a consequence of the inherent stochasticity affecting agents’ interactions

definição de valores iniciais para cada variável agregada de fluxo e estoque e demais parâmetros de comportamento dos agentes, ambos compatíveis com a situação de estado estacionário, pela solução numérica do modelo agregado, aproveitando-se das relações intersetoriais do modelo e daquelas estabelecidas pelas regras de consistência entre fluxos e estoques, ao fixar valores, nas palavras dos autores, razoáveis, seja empiricamente ou no contexto do experimento conduzido, para os demais parâmetros exógenos.

Tendo-se, da maneira acima descrita, determinado os valores agregados iniciais, é realizado a partilha homogeneamente entre os agentes de cada setor desses valores, definindo-se os estoques iniciais mantidos por cada agente, tal como os recursos em contas de depósitos e os volumes de empréstimos para firmas e trabalhadores, os estoques de capital instalado para firmas e montantes de reservas e títulos públicos para bancos, e também os valores passados que influenciam suas formações de expectativas, como as receitas, lucros e salários passados.

Por conseguinte, é suposto que as firmas em geral tenham obtido empréstimos e as firmas de bens de consumo tenham adquirido novos lotes de bens de capital para manutenção da capacidade produtiva nos períodos que antecedem o início da simulação e que o valor em termos reais dos empréstimos e do capital adquirido é mantido constante. Assim, é imposto que a soma em relação aos setores e agentes para cada valor desses tipos de estoque, empréstimos e capital, seja igual aos valores agregados determinados conforme descrito anteriormente, já considerando uma taxa exógena e constante de inflação e a programação de pagamentos dos empréstimos e amortização do capital. Ademais, as firmas fornecedoras de bens de capital e os bancos concedentes de empréstimos são aleatoriamente designadas aos respectivos demandantes de modo que cada firma de bens de capital tenha o mesmo número de clientes e cada banco tenha a mesma quantia e número de depósitos e empréstimos concedidos.³¹⁴

and adaptive behaviors, and then as the result of the path-dependent/ cumulative effects arising from agents' competition on real and financial markets" (Ibid., p.395).

³¹⁴ Vale destacar que por essa proposta de calibração os autores intencionam limitar a arbitrariedade na definição de valores para os parâmetros exógenos relativos às condições iniciais, além de indicar um critério para definição dos demais parâmetros. Nas próprias palavras dos autores: "we start from a situation of perfect homogeneity between agents in order to limit as much as possible any possible bias embedded in asymmetric initial conditions, and we let heterogeneity emerge as a consequence of cumulative effects triggered by the stochastic factors embedded in agents' adaptive rules. Furthermore, by setting initial values based on SS [Steady-State] stock-flow norms, we aim to achieve the threefold objective of limiting our arbitrariness in defining agents' initial

Em específico, o procedimento segue, para fins de apresentação, o seguinte percurso concisamente relatado a seguir.³¹⁵ De início, uma versão agregada setorialmente do modelo é criada em relação a cada setor produtivo, aos trabalhadores, bancos e setor público, formando três blocos de sistemas de equações com o objetivo de se definir as variáveis dependentes de cada bloco, isto é, aquelas que não foram exogenamente fixadas³¹⁶, em relação às demais dos outros blocos seguindo as relações intersetoriais e de fluxos e estoques já estabelecidas no modelo original. Além disso, como consequência da estipulação do estado estacionário com crescimento nominal, denotado por g_{ss} representando a taxa de inflação, valores em períodos anteriores de variáveis nominais são fixados pelo seu respectivo valor corrente dividido por $(1 + g_{ss})$.

À guisa de exemplo, na publicação o primeiro bloco é composto pelas equações agregadas do setor de bens de capital³¹⁷ formando um sistema com dez equações e dez incógnitas em que, por exemplo, o produto do setor em termos reais é igual ao investimento em reposição do setor de bens de consumo, dado a condição de estado estacionário. Assim, a resolução analítica do sistema de equações desse primeiro bloco determina diversas variáveis dos demais e, dessa forma, após o sucessivo cômputo da solução dos três blocos as condições iniciais de estoques, fluxos e parâmetros comportamentais dos agentes, inclusive parâmetros originalmente exógenos, são numericamente determinadas ao se estipular, como já comentado, o valor para os demais parâmetros exógenos que carecem de definição pelo usuário do exercício de simulação.

Desta feita, dos 55 parâmetros calibráveis do modelo, exibidos em tabela apensada ao texto, 7 deles são determinados diretamente pelo procedimento descrito, chamados pelos autores de *ss-given* (ss representando *steady-state*, estado estacionário em inglês), outros 29 parâmetros necessitam de definição exógena para a resolução numérica dos sistemas de

endowments, restricting the number of free behavioral parameters in the simulation, and find a criterion to set the values of several others" (Ibid., p.389).

³¹⁵ Aqui, seguindo-se as explicações contidas no *Appendix A* da publicação (Ibid., p.400-405).

³¹⁶ Vale reforçar que os autores comentam que a definição de valores para os parâmetros exógenos, parte do procedimento proposto de calibração do modelo, é balizada pela fixação de valores razoáveis empiricamente ou a depender do contexto do experimento e das variáveis que se deseja controlar (Ibid., p.388, 400 e 403).

³¹⁷ O segundo bloco de equações agregadas é referente ao setor de bens de consumo e o terceiro bloco condensa as formas funcionais de trabalhadores, bancos e setor público.

equações comentados, chamados de *pre-ss*, restando 19 parâmetros chamados de *free* que demandam calibração para a subsequente realização das simulações.³¹⁸

Por fim, em Caiani, Russo e Gallegati (2019) é indicado que a calibração é executada seguindo os valores determinados para a simulação padrão da versão anterior em relação às condições iniciais e parâmetros análogos à versão original. Para os parâmetros e especificações incluídas ou modificadas na nova versão é apontada a utilização do mesmo procedimento, relatado acima (Ibid., p.197).

3.4.5 Validação

“[We] compare the properties of our artificial data with a set of empirical stylized facts (...). Results suggest that our model provides a good approximation of the properties displayed by real world data, ranking among the best contributions provided by the literature for the number and the variety of micro and macro stylized facts matched” (Caiani et al., 2016, p.392).

Além da indicação metodológica relativa à calibração, Caiani et al. (2016, p.378) distingue como propósito metodológico da publicação a sugestão de regras gerais e replicáveis para a validação e verificação de modelos de simulação baseados em agentes consistentes em termos de fluxos e estoques, designados por AB-SFC.³¹⁹ Nota-se que os autores ressaltam a relevância da verificação, chamada no texto de validação interna, por meio da averiguação da consistência lógica e contábil do modelo, e, portando, consideram a validação empírica realizada isoladamente como uma condição necessária, porém não suficiente (Ibid., p.379).

O método de verificação proposto consiste da utilização de duas matrizes contábeis oriundas da literatura SFC, uma que reporta matriz dos fluxos de transações a cada período simulado e outra referente ao balanço contábil da economia agregada. Pela primeira, atesta-se que todo o fluxo de saída de um agente deve significar um fluxo de entrada para outro e todo passivo de um agente representa um ativo de outro, de modo que na matriz a soma de toda linha ou coluna deve ser igual a zero em todos os períodos simulados. A segunda assegura

³¹⁸ Ibid., p.406. Aqui a contagem considerou diferentes parâmetros mesmo para aqueles cujo valor tenha sido definido como iguais.

³¹⁹ “[The] paper has also a fundamental methodological purpose in that it aims at setting a set of replicable and general rules to build, calibrate, and validate (internally and externally) AB-SFC models building upon the best practices proposed in the AB and SFC literature” (idem).

que contabilmente em todos os períodos o somatório do patrimônio líquido de todos os agentes deve ser igual ao somatório dos ativos reais da economia, os bens de capital e os bens de consumo que são os ativos na economia que não possuem um passivo de contraparte.³²⁰

A validação empírica do modelo é realizada em sua simulação padrão (*baseline*) que contempla 400 períodos com 100 replicações de Monte Carlo e abarca tanto a validação no que tange o comportamento dinâmico de variáveis agregadas e suas relações com fatos estilizados a nível macro encontrados na literatura quanto de comportamentos relativos à dinâmica microeconômica do modelo e suas respectivas contrapartes empíricas.

Assim, é verificado que as volatilidades das variáveis agregadas, normalizadas pela tendência, referentes ao investimento e ao desemprego são significativamente maiores que a volatilidade do PIB real que, por sua vez, é um pouco maior que a do consumo e seus respectivos valores são próximos daqueles observados em dados relativos a economia dos EUA. Além disso, o modelo se mostra capaz de gerar crescimento nominal de longo prazo com inflação moderada e o crescimento real do produto apresenta caudas longas, com excesso de curtose. A estrutura de autocorrelação e de correlação cruzada das séries filtradas da tendência por um filtro Hodrick-Prescott, apresentadas por gráficos para cada variável e respectivas defasagens, indicam semelhança com os dados empíricos, em que nas séries simuladas do modelo é descrito que o investimento é pró-cíclico e coincidente com o produto real, o desemprego é contracíclico e defasado em um período, o consumo é pró-cíclico e pode ser coincidente ou levemente defasado em um período, a inflação é pró-cíclica e defasada, os mark-ups são contracíclicos e defasados, a variação de estoques é pró-cíclico e a razão estoques sobre vendas é contracíclico, a alavancagem dos bancos definida como a razão entre empréstimos totais sobre patrimônio líquido apresenta comportamento pró-cíclico e a alavancagem e dívida total de firmas também é pró-cíclica.

Por fim, em relação a reprodução de fatos estilizados a nível microeconômico é descrito que as parcelas de mercado apropriadas pelas firmas de ambos os setores são caracterizadas por persistente alto grau de heterogeneidade, que a distribuição do tamanho das firmas, independentemente da medida de tamanho adotada, aparenta ser enviesada para direita com cauda longa, que o investimento da firma apresenta certo grau de irregularidade

³²⁰ Ibid., p.391-92.

com sucessivos picos seguidos de períodos de investimento baixo ou nulo, que a distribuição do crédito de bancos apresenta cauda longa, não compatível com uma distribuição normal, e que a distribuição de crédito inadimplente e das falências de firmas também são caracterizadas por terem caudas longas à direita da distribuição.

A validação da versão do modelo em Caiani, Russo e Gallegati (2019, p.200 e 201) remete aos resultados encontrados na versão original, reproduzindo textualmente os mesmos achados em relação aos comportamentos dinâmicos das séries simuladas, em nível macro e micro, em exceção a observação de um fato estilizado adicional relativo a propensão média a consumir maior do que a unidade na parte inferior da distribuição de renda³²¹.

3.4.6 Análise de sensibilidade

Não é empregada nas versões consultadas da família do modelo originado em Caiani et al. (2016) técnicas de exploração paramétrica global no sentido de investigar o comportamento do modelo ao longo do espaço paramétrico e, assim, descrever a sensibilidade de variáveis de saída selecionadas em relação as variáveis de entrada do modelo, conforme discutido na seção 2.3, acima.

Chega-se a mencionar a realização de experimentos de análise de sensibilidade para verificação da robustez dos resultados encontrados, no entanto tais averiguações são conduzidas ao se realizar simulações com 25 replicações de Monte Carlo com três diferentes níveis, além daquele estipulado para a simulação padrão, para os parâmetros que se interessa investigar, relativos aos comportamentos de investimento e da avaliação para concessão de empréstimos pelo banco.³²²

³²¹ Os autores explicam esse acontecimento constatado da seguinte forma: “in our model, this can be explained by the fact that workers who have lost their jobs adapt their demand for consumption goods only gradually, using deposits as a buffer stock to fund consumption, so their average propensity to consume can be greater than one, possibly for several periods, as observed in reality” (Idem).

³²² Ibid., p.378, 389, 392 e 398.

3.5 DISCUSSÃO

Objetivou-se no presente capítulo apresentar três distintas famílias de modelos heterodoxos de simulação baseados em agentes com características evolucionárias e integração micro-macro que apesar de possuírem origens diferentes compartilham diversas semelhanças em suas formulações e referencial teórico. Em cada seção do capítulo relativa a cada família de modelos buscou-se concisamente evidenciar seus principais artigos de procedência, a descrição da estruturação dos modelos, a exposição de suas formas funcionais subjacentes e a prática adotada no que tange à calibração, à validação e à análise de sensibilidade a partir do que pode ser constatado nas respectivas publicações consultadas.

O capítulo se inicia com a exploração do modelo Micro Macro Multissetorial (MMM), na seção 3.2, em que é dedicado a maior parte do capítulo, dado a sua extensão e que esse é o modelo utilizado na ilustração do exercício de simulação e análise de sensibilidade conduzidos no próximo e último capítulo do presente texto. A seção 3.3 trata da família de modelos *Schumpeter meets Keynes* (K+S), um dos modelos com maior número de publicações e diferentes especificações desenvolvidas. A última seção do capítulo, de número 3.4, abordou o modelo Caiani et al. (2016) que guarda especial cuidado à agenda de consistência entre fluxos e estoques no desenvolvimento do modelo, além de propor um método de calibração dos parâmetros exógenos de modo a buscar redução de discricionariedade na definição de valores para os parâmetros e na preocupação quanto às condições de inicialização da simulação ao impor condições de simetria, homogeneidade e estado estacionário iniciais.

As três famílias adotam procedimentos análogos para a validação ao procurarem atestar a capacidade de seus respectivos modelos em replicar fatos estilizados a nível micro e macroeconômico por meio de comparações qualitativas relativas às séries temporais simulados. Quanto a calibração, além da proposta, acima mencionada, em Caiani et al. (2016), na família MMM é indicado a utilização do procedimento de calibração indireta e consulta à referências empíricas para definição de valores para parâmetros que guardam alguma relação com variáveis observáveis na realidade, disposição também relatada na família K+S, embora não seja explicitado em suas publicações a indicação de procedimento geral para a calibração do modelo. Por fim, o MMM e o K+S executam técnicas de análise de sensibilidade global por meio de procedimento inicialmente desenvolvido para o modelo K+S. O próximo capítulo reproduz um exercício de sensibilidade no MMM seguindo esse referido protocolo.

4 Um exemplo de exercício de simulação e análise de sensibilidade

4.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo é dedicado à ilustração do procedimento de análise de sensibilidade global paramétrica, discutido mais detalhadamente na seção 2.3, acima, a partir da proposição de uma regra fiscal de limitação de gasto do setor público incorporada ao modelo MMM³²³.

De início, é fundamental destacar que aqui não se objetiva elaborar uma discussão de política fiscal e que apenas sucintamente serão expostos os efeitos dinâmicos da simulação da regra pela apresentação de algumas das trajetórias das demais variáveis do modelo, como comumente se procede em exercícios de simulação, muito menos se busca realizar a comparação com outras regras fiscais³²⁴.

Além disso, tendo-se que o foco é especificamente a avaliação da sensibilidade dos parâmetros da regra fiscal aqui proposta nas variáveis selecionadas, não é realizada uma ampla triagem preliminar dos parâmetros do modelo relevantes para essas variáveis por meio do método de efeitos elementares, por exemplo, o que aprimoraria o exercício ao expor as trajetórias e o tamanho dos efeitos dos parâmetros. Assim, reforça-se que o exercício de caráter ilustrativo aqui conduzido não tem o condão de informar sobre o que é mais expressivo para determinação das trajetórias dessas variáveis para além dos parâmetros relacionados à regra fiscal.

Assim, na próxima seção é relatada a formulação desenvolvida para a regra de limitação do gasto de governo, as características do exercício de simulação efetuado, algumas trajetórias de variáveis selecionadas e os passos pertinentes às etapas do procedimento de análise de sensibilidade juntamente com os resultados obtidos pela aplicação da metodologia. A seção 4.3 reporta sinteticamente os principais resultados encontrados e fecha o presente capítulo.

³²³ A família do modelo MMM é apresentada na seção 3.2 do capítulo 2.4.

³²⁴ Vale lembrar que em Dweck, Vianna e Barbosa (2020) é discutido diferentes formatos de regras fiscais, o que inclui comparações por simulação do MMM de uma regra de teto de gastos com a regra de superávit primário.

4.2 SIMULAÇÃO E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE UMA PROPOSTA DE REGRA FISCAL NO MODELO MMM

A regra fiscal de limitação de gasto de governo aqui desenvolvida para fins ilustrativos do procedimento de análise de sensibilidade é baseada na proposta ainda em tramitação nas casas legislativas de novo regramento fiscal³²⁵ em substituição a regra de teto ainda vigente no Brasil. Nesse sentido, a intenção do exercício é a exploração paramétrica da interação entre variáveis selecionadas e os limiares estabelecidos no projeto de lei.

Por exemplo, é previsto um teto para a variação real do gasto de governo de 2,5% e um piso de 0,6% e que o nível do gasto é ajustado pela variação da inflação de preços ao consumidor (IPCA) e pela variação real da receita primária na proporção de 70% caso cumprida a meta de resultado primário e 50% caso contrário. A meta de resultado primário, por sua vez, é determinada na lei de diretrizes orçamentárias de forma a seguir o que o projeto de lei chama de trajetória sustentável da dívida pública.³²⁶

Desta feita, a formulação simplificada³²⁷ da proposta fiscal desenvolvida aqui é representada pelas equações exibidas abaixo, explicadas nas próximas linhas. A equação (c1), abaixo, define o nível máximo de gasto de governo para o período t , g_t^{max} , que depende de uma parcela γ da variação real da receita tributária, denotada por ΔTAX^R , da variação da inflação de preços ao consumidor, CPI_t , e pelo montante de impostos arrecadados no período anterior, TAX_{t-1} . Ademais, conforme mostrado em (c1.1), a variação real do gasto máximo, denotado por $\Delta g^{max,R}$, é restrita ao intervalo de 0,006, limite inferior, e limitado superiormente a 0,025, tendo-se utilizado para o ajuste em termos reais da variação do gasto corrente o deflator do período anterior como estimativa para a inflação do período corrente³²⁸.

³²⁵ Até a data de elaboração do presente texto a proposição da nova regra, substanciada pelo projeto de lei complementar número 93 de 2023, encontra-se em tramitação na câmara de deputados após emendas e aprovação no senado brasileiro.

³²⁶ Conforme o Artigo 2º, 4º e 5º, e seus respectivos incisos, do projeto de lei complementar nº 93 de 2023.

³²⁷ Dentre as simplificações impostas, menciona-se o não estabelecimento de bandas de tolerância para as metas, do período de avaliação da regra ser o período de produção do modelo e não o período anual e que não é contemplada a previsão constante do projeto de lei do excedente ao teto ser direcionado aos investimentos públicos. Ressalta-se que não há a intenção de formular a regra simulada de maneira rigorosamente fiel ao projeto de lei complementar, tendo em vista o caráter puramente ilustrativo e preliminar do exercício aqui conduzido e da não intenção de se discutir política fiscal ou comparação de diferentes regramentos fiscais.

³²⁸ Essa é uma simplificação necessária dado que a inflação corrente ainda não é observada no momento da realização do gasto público. Já o gasto do período anterior é ajustado utilizando o deflator de $t-2$. O cálculo da

$$g_t^{max} = \left(1 + \gamma \cdot (\Delta TAX^R) + \left(\frac{CPI_{t-1} - CPI_{t-2}}{CPI_{t-2}} \right) \right) \cdot TAX_{t-1} \quad (c1)$$

$$0,006 \leq \Delta g^{max,R} \leq 0,025 \quad (c1.1)$$

A parcela referente à variação real da receita, γ , é determinada, por sua vez, pela expressão (c2), abaixo, reavaliada a cada quatro períodos de produção, isto é, analogamente a uma janela de um ano, e assume o valor de 0,7 caso o resultado primário em relação ao PIB do período anterior, descrito pela razão entre o resultado primário $TAX_{t-1} - GOV_{t-1}$ sobre o PIB, denotado por GDP_{t-1} , no lado direito da expressão, for maior ou igual que a meta de resultado primário δ_t . Caso contrário, γ assume o valor de 0,5.

$$\gamma = \begin{cases} 0,7 & \text{se } \frac{TAX_{t-1} - GOV_{t-1}}{GDP_{t-1}} \geq \delta_t \\ 0,5 & \text{se } \frac{TAX_{t-1} - GOV_{t-1}}{GDP_{t-1}} < \delta_t \end{cases} \quad (c2)$$

A última expressão da formulação de regra fiscal desenvolvida define o valor para a meta de resultado primário do governo que também é reavaliada a cada quatro períodos discretos. Seguindo-se (c3), adiciona-se à meta do período anterior δ_{t-1} um parâmetro exógeno φ caso a dívida média de governo no período anterior em relação ao PIB, descrito por $\overline{dr}_{g,t-1}$, estiver em patamar superior à relação dívida sobre o PIB máxima estabelecida exogenamente, dr_g^{max} . Simetricamente, desconta-se da meta do período anterior o parâmetro φ se a relação da dívida média de governo sobre PIB estiver abaixo de um patamar mínimo dr_g^{min} . Caso contrário, mantém-se a meta igual ao valor do período anterior. Além disso, é estabelecido exogenamente limites inferiores e superiores para a meta, δ^{min} e δ^{max} , respectivamente, conforme exposto em (c3.1).

$$\delta_t = \begin{cases} \delta_{t-1} + \varphi & \text{se } \overline{dr}_{g,t-1} > dr_g^{max} \\ \delta_{t-1} - \varphi & \text{se } \overline{dr}_{g,t-1} < dr_g^{min} \\ \delta_{t-1}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (c3)$$

$$\delta^{min} \leq \delta_t \leq \delta^{max} \quad (c3.1)$$

Com a formulação descrita acima introduzida no modelo MMM foram conduzidos os experimentos de simulação³²⁹ seguindo para todos os outros parâmetros do modelo a

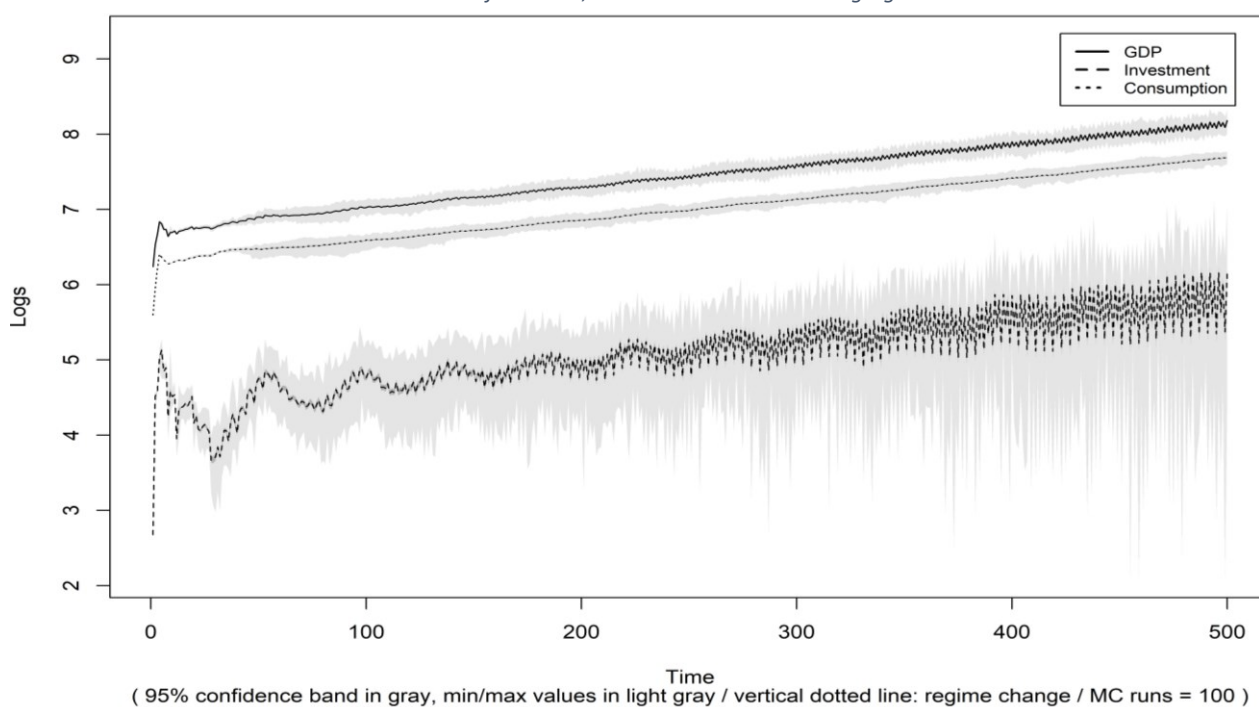
variação real para imposição dos limites segue, assim, o seguinte formato $\Delta g^{max,R} = (g_t^{max} \cdot D_{t-2} / g_{t-1}^{max} \cdot D_{t-1}) - 1$, onde D_t é o deflator do período t.

³²⁹ Observa-se que foge ao escopo do presente capítulo a descrição dos exames conduzidos quanto à verificação e validação do modelo e a exposição de todos os resultados dinâmicos das trajetórias em relação às variáveis agregadas devido à especificação da regra fiscal aqui introduzida.

calibração referente à simulação padrão, comentada anteriormente na subseção 3.2.4. As trajetórias das variáveis agregadas apresentadas abaixo foram simuladas para 500 períodos e 100 replicações de Monte Carlo, sem o descarte de período inicial transiente.³³⁰

O Gráfico 1, abaixo, apresenta as trajetórias para o PIB, o consumo e o investimento, enquanto no Gráfico 2 é representada as dinâmicas para a dívida pública, o gasto de governo e a receita de impostos. Em seguida, o Gráfico 3 mostra a trajetória da razão entre a dívida pública e o PIB.

Gráfico 1: PIB, Consumo e Investimento agregados



³³⁰ Vale comentar que esse número de períodos representaria 125 anos, considerando-se que um período de produção, unidade mínima de tempo discreto do modelo, é interpretado como um intervalo de três meses. Ademais, os gráficos e os resultados exibidos nas tabelas dessa seção foram gerados por meio do programa estatístico R, pela interface (IDE) RStudio, R Core Team (2023), sendo os *scripts* utilizados versões modificadas daqueles desenvolvidos por Matheus Trotta Vianna em Vianna (2021) e por Marcelo de Carvalho Pereira em, por exemplo, Dosi et al. (2017b).

Gráfico 2: Dívida pública (PDEBT), gasto de governo (G) e receita de impostos (TT)

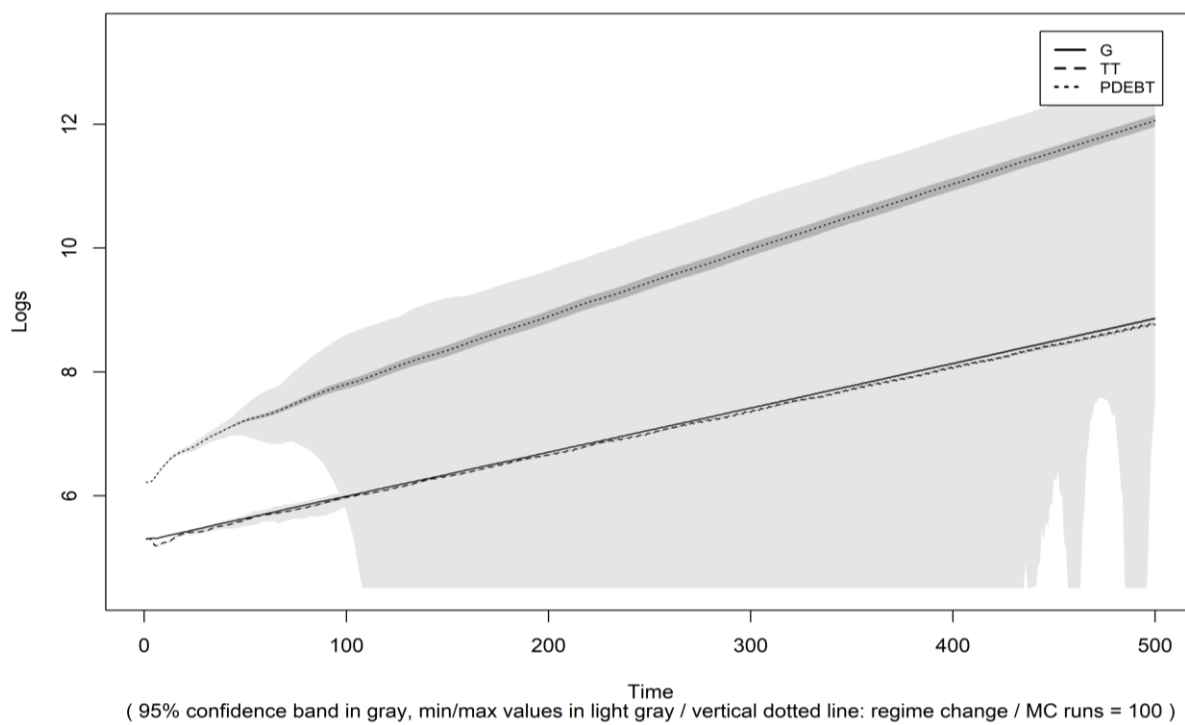
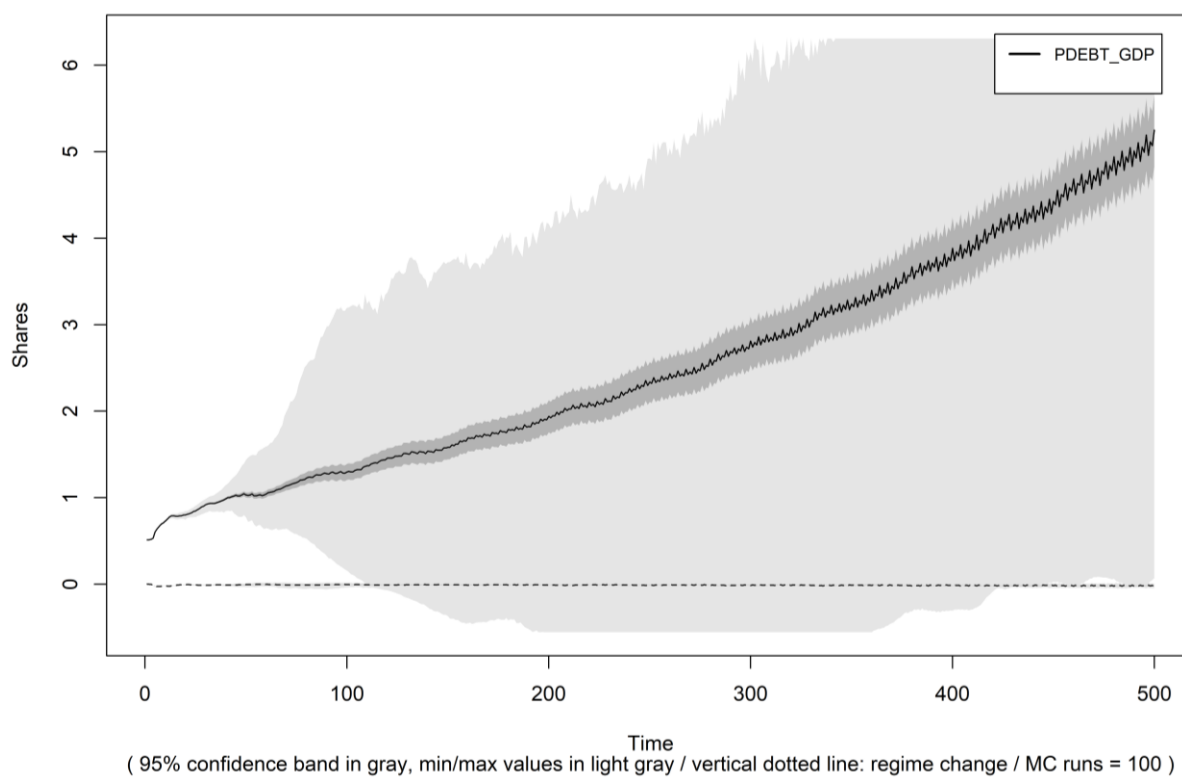


Gráfico 3: Razão da dívida pública sobre o PIB (PDEBT_GDP)



A Tabela 1, abaixo, apresenta os valores para a correlação cruzada entre diferentes variáveis selecionadas e PIB, considerando quatro períodos para frente e para trás. Vale observar que a partir da leitura dos comovimentos das variáveis é verificado, por exemplo, que o gasto de governo definido pela regra fiscal, a relação dívida pública sobre o PIB e a meta de resultado primário são contracíclicos e defasados em um período, enquanto são pró-cíclicos o resultado primário sobre o PIB, defasado em um período, e o nível de dívida pública, liderado em cinco períodos, e a receita de impostos, defasada em um período.

Tabela 1: Correlação cruzada em relação ao PIB com defasagens

Variável	Defasagens									
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
PIB	0,1762	0,3730	0,6460	0,8958	1,0000	0,8958	0,6460	0,3730	0,1762	
Consumo	0,5082	0,5851	0,6105	0,5935	0,5394	0,4418	0,3050	0,1342	-0,0467	
Investimento	0,0805	0,2814	0,5304	0,7435	0,8321	0,7635	0,5972	0,4281	0,3175	
Gasto de Governo	-0,3554	-0,4640	-0,5454	-0,5762	-0,5452	-0,4662	-0,3595	-0,2549	-0,1600	
Importação	0,4193	0,5243	0,5460	0,5154	0,4755	0,4440	0,4083	0,3391	0,2245	
Exportação	-0,0355	-0,0892	-0,0995	-0,0572	0,0179	0,0805	0,0870	0,0357	-0,0418	
Exportação Líquida	-0,3403	-0,4255	-0,4298	-0,3777	-0,3128	-0,2689	-0,2573	-0,2475	-0,2080	
Consumo (Parcela do PIB)	0,3680	0,2544	0,0120	-0,2527	-0,4148	-0,4192	-0,3226	-0,2384	-0,2382	
Investimento (Parcela do PIB)	0,0642	0,2648	0,5135	0,7257	0,8129	0,7449	0,5835	0,4247	0,3281	
Gasto Gov. (Parcela do PIB)	-0,2370	-0,4291	-0,6788	-0,8968	-0,9774	-0,8700	-0,6327	-0,3759	-0,1851	
Export. Líq. (Parcela do PIB)	-0,3861	-0,5043	-0,5368	-0,5016	-0,4374	-0,3764	-0,3301	-0,2811	-0,2101	
Cresc. Dívida Pública	-0,2807	-0,3878	-0,4745	-0,5253	-0,5312	-0,4889	-0,3956	-0,2710	-0,1362	
Dívida Púb./PIB	-0,4037	-0,5724	-0,6999	-0,7371	-0,6703	-0,5282	-0,3610	-0,2063	-0,0717	
Resultado Primário sobre PIB	0,4205	0,5994	0,7360	0,8006	0,7819	0,6891	0,5428	0,3707	0,1932	
Dívida Pública	-0,2684	-0,1945	-0,1061	-0,0084	0,0902	0,1789	0,2519	0,3059	0,3403	
Receita de Impostos	0,3168	0,4576	0,5674	0,6148	0,5893	0,5034	0,3903	0,2724	0,1580	
Meta de Primário	-0,0112	-0,0297	-0,0486	-0,0596	-0,0564	-0,0356	0,0023	0,0380	0,0566	

Passa-se, agora, para a simulação referente ao exercício de análise de sensibilidade do modelo, realizada abrangendo 500 períodos, com 30 replicações de Monte Carlo, sem a exclusão de nenhum período inicial transiente³³¹. Para a amostragem é definido um hiper-cubo latino quase ortogonal de dimensão 11x33, isto é, até onze parâmetros por 33 pontos amostrais, e para validação externa do meta-modelo gerou-se 10 pontos adicionais de Monte Carlo. A partir dessas configurações foram, para cada variável de saída de interesse, estimados

³³¹ Adverte-se que escolha da quantidade de períodos simulados e número de replicações foi balizada pelos recursos computacionais disponíveis para execução do exercício. Idealmente, não havendo esta limitação, como pelo uso de servidores de alto desempenho ou computação em nuvem, o número de replicações poderia ser maior até que não se constatasse consideráveis variações dos resultados relativos às simulações do modelo.

meta-modelos pelo método de Kriging e realizadas as respectivas decomposições da variância de Sobol'.³³²

Na Tabela 2, abaixo, é exposta a calibração adotada para os parâmetros referentes à regra fiscal, bem como o intervalo mínimo e máximo definido para os parâmetros submetidos à análise de sensibilidade. Dos nove parâmetros relativos à regra fiscal investigados, os quatro primeiros têm seus valores definidos a partir do disposto no projeto de lei complementar. Por exemplo, os níveis para o teto e o piso do crescimento real do gasto de governo são calibrados de forma a representar um crescimento máximo de 2,5% e mínimo de 0,6%.

Tabela 2: Calibração e intervalos para sensibilidade

Parâmetro	Descrição do parâmetro	Calibração	Mínimos e máximos para sensibilidade
-	Crescimento máximo do gasto	0,025	(0; 2)
-	Crescimento mínimo do gasto	0,006	(0; 2)
-	Parcela máxima de variação da receita	0,7	(0; 1)
-	Parcela mínima de variação da receita	0,5	(0; 1)
δ^{max}	Máximo da meta de resultado primário	0,03	(-1; 1)
δ^{min}	Mínimo da meta de resultado primário	-0,03	(-1; 1)
φ	Ajuste da meta de resultado primário	0,001	(-1; 1)
dr_g^{max}	Máximo da razão dívida PIB	0,8	(0; 2)
dr_g^{min}	Mínimo da razão dívida PIB	0,2	(0; 2)

Assim, a partir dos parâmetros listados acima são examinadas as sensibilidades em relação as seguintes variáveis de saída do modelo: i) o crescimento real do gasto de governo; ii) o crescimento da dívida pública; iii) o crescimento real do PIB; iv) o nível anual de gasto de governo; v) o nível de dívida pública; vi) o PIB em termos reais; vii) o gasto de governo sobre o PIB; viii) a dívida pública sobre o PIB; e ix) o resultado primário sobre PIB.

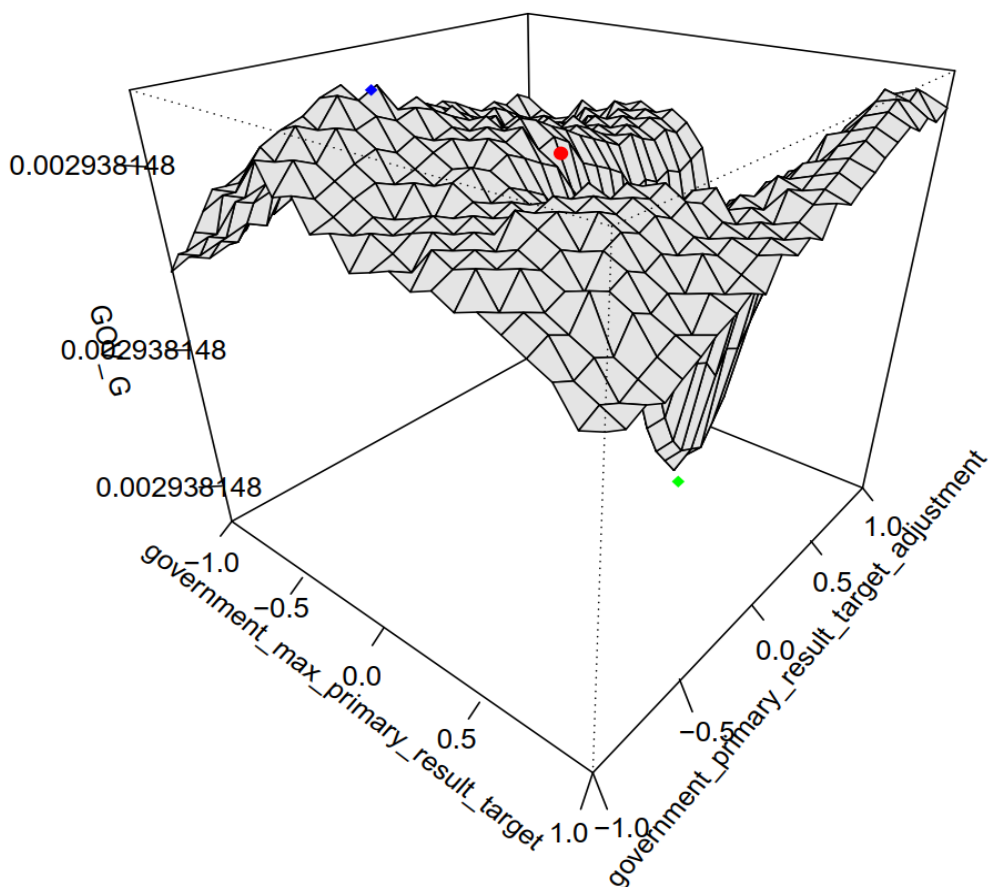
³³² Conforme explicado na seção 2.3 do capítulo 2.

Com efeito, o restante dessa seção é dedicado a uma concisa apresentação e comentários sobre alguns resultados selecionados obtidos pelo procedimento. Assim, iniciando-se pela variável relativa ao crescimento real do gasto de governo, verifica-se que pela medida de decomposição da variância de Sobol', mostrada na Tabela 3, o parâmetro, dentre os estudados, de maior relevância é o que define o máximo para a meta de resultado primário, cuja variância explica 21% da variância do crescimento do gasto em termos de efeitos diretos e 56% por efeitos de interação, seguido do parâmetro que define o a variável que realiza o ajuste da meta de resultado primário. O Gráfico 4, abaixo, expõe a superfície de resposta em três dimensões estimada pelo meta-modelo Kriging em relação aos dois principais parâmetros e a variável relativa ao crescimento do gasto, denotada por GOV_G, para o nível definido na calibração de 0,8 para o parâmetro que estabelece o máximo da razão dívida sobre o PIB. Observa-se, assim, uma forte não linearidade, tanto a respeito do parâmetro de meta máxima do resultado primário quanto em relação ao parâmetro de ajuste da meta de primário. É notável como a superfície gerada é acidentada, mas mesmo no maior valor encontrado para o crescimento real do gasto, denotado pelo marcador de cor azul, com um valor abaixo de zero para a meta de resultado primário, não é consideravelmente acima do nível resultante da calibração adotada, o que pode indicar o caráter bastante restritivo em termos de gasto da regra fiscal.

Tabela 3: Decomposição de Sobol' - Crescimento do gasto efetivo de governo

	Efeitos diretos	Efeitos de interação
Máximo da meta de resultado primário	0,2085	0,5577
Ajuste da meta de resultado primário	0,1523	0,4321
Máximo da razão dívida PIB	0,01133	0,1785

Gráfico 4: Superfície de resposta por Kriging - Crescimento do gasto efetivo de governo

Meta-model response surface (government_max_debt_ratio = 0.8)

95% confidence interval: GOV G = [0,0] at defaults (red dot)

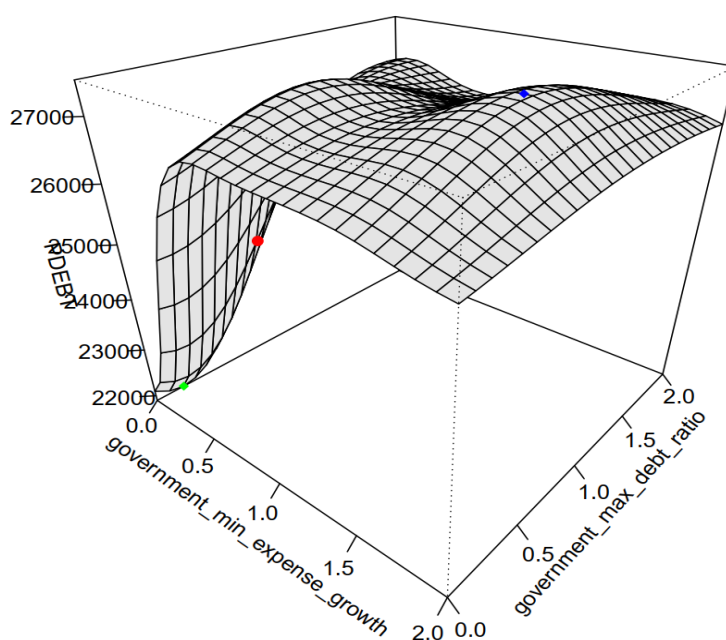
Ao analisar a variável relativa ao nível da dívida pública, pela sua decomposição da variância, exposto na Tabela 4, é constatado que o parâmetro de maior relevância é o que limita inferiormente o crescimento do gasto público, responsável em termos de variância da dívida diretamente por 53% e por 38% por efeitos de interação. O parâmetro de máximo da razão dívida sobre PIB influi mais relevantemente em termos de efeitos de interação, explicando 36% da variância do nível da dívida. A superfície de resposta do meta-modelo, pelo Gráfico 5 abaixo, ilustra o peso do parâmetro de crescimento mínimo do gasto no nível da dívida até o valor de 50%, quando deixa de ser relevante, tornando-se praticamente linear com ocorre para todo o intervalo de variação do parâmetro de máximo da dívida sobre o PIB.

Tabela 4: Decomposição de Sobol' – Nível da dívida pública

	Efeitos diretos	Efeitos de interação
Crescimento mínimo do gasto	0,5287	0,3766
Máximo da razão dívida sobre PIB	0,09921	0,366
Ajuste da meta de resultado primário	0,00074	0,001742

Gráfico 5: Superfície de resposta por Kriging – Nível da dívida pública

Meta-model response surface (government_primary_result_target_adjustment = 0.001)



95% confidence interval: PDEBT = [16254.46,31979.74] at defaults (red dot)

Para a variável que mede a razão da dívida pública sobre o PIB a decomposição da variância de Sobol' indica que o parâmetro que estabelece o teto para o crescimento do gasto público é o de maior relevância em efeitos diretos, explicando 33% da variância da razão dívida sobre PIB, e de interação, correspondendo a 56% da variância da razão. O parâmetro de ajuste da meta de primário é o segundo mais relevante, no entanto sendo de maior preponderância em termos de efeitos de interação, correspondendo a 27% da variância da variável de dívida sobre o PIB. Pela observação da superfície de resposta pela estimação do meta-modelo Kriging é destacável a não linearidade em relação ao parâmetro de crescimento máximo do gasto cujo menor valor da dívida PIB se encontra em valores próximos da unidade, ou seja, no caso em

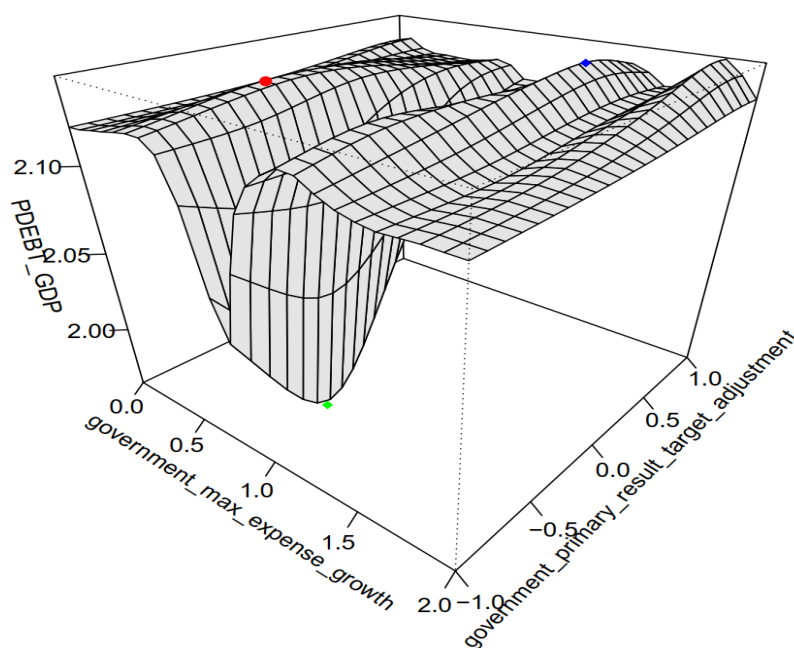
que o limite superior para a variação real do gasto fosse de 100%. No entanto, o parâmetro de ajuste da meta de resultado primário muito pouco influencia a razão dívida sobre PIB, sendo praticamente linear em relação ao nível da dívida sobre PIB. Nota-se, ainda, que independentemente do valor do parâmetro de ajuste do primário níveis superiores ao valor de calibração, estipulado pelo regramento fiscal, para o crescimento máximo do gasto produziram níveis menores para a razão dívida sobre PIB. Assim, é possível identificar que pela formulação da regra aqui estipulada, utilizando o valor para o teto do crescimento do gasto previsto no projeto de lei, dificilmente conseguir-se-ia obter um controle ou redução da razão da dívida pública sobre o PIB, pouco importando, para tanto, a modificação do patamar do nível de resultado primário a ser realizado.

Tabela 5: Decomposição de Sobol' – Razão da dívida pública sobre o PIB

	Efeitos diretos	Efeitos de interação
Crescimento máximo do gasto	0,3333	0,5605
Ajuste da meta de resultado primário	0,07505	0,2712
Crescimento mínimo do gasto	0,0005	0,007339

Gráfico 6: Superfície de resposta por Kriging – Razão da dívida pública sobre o PIB

Meta-model response surface (government_min_expense_growth = 0.006)



95% confidence interval: PDEBT GDP = [1.65.2.6] at defaults (red dot)

Por fim, para os demais resultados do exercício de análise de sensibilidade executado não foram identificadas relações relevantes das variáveis selecionadas em relação aos parâmetros relativos à regra fiscal, tendo-se, por exemplo, relativa independência do crescimento do PIB, do PIB em termos reais e das demais variáveis em relação ao PIB aos parâmetros da regra fiscal, muito provavelmente pelo fato da regra impor um rígido limite ao crescimento do gasto autônomo de governo.

4.3 DISCUSSÃO

Foram expostos na seção acima a formulação de uma regra de limitação de gasto de governo integrada ao modelo MMM e os resultados da simulação, com a explicitação da trajetória de algumas variáveis agregadas, e análise de sensibilidade global para investigação da sensibilidade dos parâmetros subjacentes à regra em relação ao um conjunto de variáveis macroeconômicas selecionadas. O exercício foi conduzido no sentido de oferecer uma ilustração à exposição sobre análise de sensibilidade em modelos de simulação traçada na seção 2.3 do capítulo 2, seguindo, para tanto, a organização das etapas do procedimento apresentadas. Ressalta-se que o exercício aqui conduzido não foi direcionado a uma compreensível análise dos efeitos da regra fiscal ou mesmo a uma discussão de política fiscal, remanescendo a necessidade de maior exploração dos efeitos da regra de limitação de gasto.

Assim, pela simulação do modelo e exame quanto à sensibilidade paramétrica, investigada tanto pela medida de decomposição da variância de Sobol' quanto pelo traçado das superfícies de resposta por meio de meta-modelo de Kriging, desvelou-se que para todas as variáveis de saída investigadas os dois parâmetros mais relevantes são os que definem o piso e o teto para o crescimento do gasto de governo, alterando-se a ordem de relevância a depender da variável, e o parâmetro relativo ao ajustamento meta de resultado primário. Os demais parâmetros mostraram-se desimportantes para a sensibilidade das variáveis analisadas.

Adiciona-se, por fim, que para especificamente se avaliar os patamares calibrados para os parâmetros de piso e teto, previstos no projeto de lei, seriam necessárias investigações adicionais dos demais parâmetros do modelo incluindo, por exemplo, à evolução dos gastos desejados de governo. No entanto, pelos exames já conduzidos se pode afirmar que níveis maiores do que o valor calibrado para o teto do crescimento da despesa de governo

correspondem a valores mais que proporcionalmente menores para a variável que mede a razão de dívida pública sobre o PIB, por exemplo.

REFERÊNCIAS

- Akerlof, G., Blanchard, O., Romer, D. e Stiglitz, J. (2016). O que nós aprendemos: a política macroeconômica no pós-crise. Alta Books.
- Ankenman, B., Nelson, B. L., & Staum, J. (2008). Stochastic kriging for simulation metamodeling. In 2008 Winter simulation conference (pp. 362-370). IEEE.
- Arthur, W. B. (2015). Complexity and the Economy. Oxford University Press, USA.
- Axelrod, R., & Tesfatsion, L. (2006). Appendix AA guide for newcomers to agent-based modeling in the social sciences. Handbook of computational economics, 2, 1647-1659.
- Bak, P. (1996). How nature works: the science of self-organized criticality. Springer Science & Business Media.
- Baxter, M., & King, R. G. (1999). Measuring business cycles: approximate band-pass filters for economic time series. Review of economics and statistics, 81(4), 575-593.
- Beisbart, C. (2019). Should validation and verification be separated strictly?. Computer Simulation Validation: Fundamental Concepts, Methodological Frameworks, and Philosophical Perspectives, 1005-1028.
- Blanchard, O. (2018). On the future of macroeconomic models. Oxford Review of Economic Policy, 34(1-2), 43-54.
- Box, G. E., & Draper, N. R. (1987). Empirical model-building and response surfaces. John Wiley & Sons.
- Caiani, A., Godin, A., Caverzasi, E., Gallegati, M., Kinsella, S., & Stiglitz, J. E. (2016). Agent based-stock flow consistent macroeconomics: Towards a benchmark model. Journal of Economic Dynamics and Control, 69, 375-408.
- Caiani, A., Russo, A., & Gallegati, M. (2019). Does inequality hamper innovation and growth? An AB-SFC analysis. Journal of Evolutionary Economics, 29, 177-228.
- Chen, S., & Desiderio, S. (2022). A regression-based calibration method for agent-based models. Computational Economics, 1-14.

Cioppa, T. M., & Lucas, T. W. (2007). Efficient nearly orthogonal and space-filling Latin hypercubes. *Technometrics*, 49(1), 45-55.

Dosi, G., Fagiolo, G., & Roventini, A. (2006). An evolutionary model of endogenous business cycles. *Computational Economics*, 27, 3-34.

Dosi, G., Fagiolo, G., & Roventini, A. (2010). Schumpeter meeting Keynes: A policy-friendly model of endogenous growth and business cycles. *Journal of economic dynamics and control*, 34(9), 1748-1767.

Dosi, G., Fagiolo, G., Napoletano, M., & Roventini, A. (2013). Income distribution, credit and fiscal policies in an agent-based Keynesian model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(8), 1598-1625.

Dosi, G., Fagiolo, G., Napoletano, M., Roventini, A., & Treibich, T. (2015). Fiscal and monetary policies in complex evolving economies. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 52, 166-189.

Dosi, G., Fagiolo, G., Roventini, A., (2008). The microfoundations of business cycles: an evolutionary, multi-agent model. *Journal of Evolutionary Economics* 18, 413–432.

Dosi, G., Pereira, M. C., & Virgillito, M. E. (2017). On the robustness of the fat-tailed distribution of firm growth rates: a global sensitivity analysis. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, 13, 173-193.

Dosi, G., Pereira, M. C., Roventini, A., & Virgillito, M. E. (2017a). When more flexibility yields more fragility: the microfoundations of Keynesian aggregate unemployment. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 81, 162-186.

Dosi, G., Pereira, M. C., Roventini, A., & Virgillito, M. E. (2017b). The effects of labour market reforms upon unemployment and income inequalities: an agent-based model. *Socio-Economic Review*, 16(4), 687-720.

Dosi, G., Pereira, M. C., Roventini, A., & Virgillito, M. E. (2022). A Complexity View on the Future of Work: Meta-modelling Exploration of the Multi-sector K+S Agent Based Model. LEM, Laboratory of Economics and Management, Institute of Economics, Scuola Superiore Sant'Anna.

Dosi, G., Pereira, M. C., Roventini, A., & Virgillito, M. E. (2020). The labour-augmented k+s model: A laboratory for the analysis of institutional and policy regimes. *Economia*, 21(2), 160-184.

Dweck, E. (2006). Uma análise da integração micro-macro com base em um modelo dinâmico multissetorial de simulação. Tese de doutorado. Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dweck, E., Vianna, M. T., & da Cruz Barbosa, A. (2020). Discussing the role of fiscal policy in a demand-led agent-based growth model. *Economia*, 21(2), 185-208.

Fagiolo, G., Guerini, M., Lamperti, F., Moneta, A., & Roventini, A. (2019). Validation of agent-based models in economics and finance. *Computer simulation validation: fundamental concepts, methodological frameworks, and philosophical perspectives*, 763-787.

Fagiolo, G., Moneta, A., & Windrum, P. (2007). A critical guide to empirical validation of agent-based models in economics: Methodologies, procedures, and open problems. *Computational Economics*, 30, 195-226.

Gandolfo, G. (1980). *Economic dynamics: methods and models* (Vol. 16). North-Holland.

Guerini, M., & Moneta, A. (2017). A method for agent-based models validation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 82, 125-141.

Holland, J. H. (2014). *Complexity: A very short introduction*. OUP Oxford.

Jourdan, A. (2005). Planification D'expériences Numeriques. *Revue Modulad*, 63(33).

Kleijnen, J. P. (2009). Kriging metamodeling in simulation: A review. *European journal of operational research*, 192(3), 707-716.

Kleijnen, J. P. (2015). Kriging metamodels and their designs. *Design and Analysis of Simulation Experiments*, 179-239.

Lamperti, F., Dosi, G., Napoletano, M., Roventini, A., & Sapio, A. (2018). Faraway, so close: Coupled climate and economic dynamics in an agent-based integrated assessment model. *Ecological Economics*, 150, 315-339.

Lamperti, F., Roventini, A., & Sani, A. (2018). Agent-based model calibration using machine learning surrogates. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 90, 366-389.

LeBaron, B., & Tesfatsion, L. (2008). Modeling macroeconomies as open-ended dynamic systems of interacting agents. *American Economic Review*, 98(2), 246-250.

Macedo, A. C. (1999). *Macroeconomia sem equilíbrio*. Editora Vozes.

Martinoli, M., Moneta, A., & Pallante, G. (2022). Calibration and validation of macroeconomic simulation models: A general protocol by causal search. LEM, Laboratory of Economics and Management, Institute of Economics, Scuola Superiore Sant'Anna.

Martins, I. P. G. (2018). *Fragilidade financeira das firmas: uma visão crítica da teoria minskiana e do papel da alavancagem*. Tese de doutorado. Instituto de Economia, Universidade Estadual de Campinas.

Morris, M. D. (1991). Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33(2), 161-174.

Parker Jr, J. D. (2022). *Extending And Improving Designs For Large-Scale Computer Experiments*. Doctoral dissertation, Monterey, CA; Naval Postgraduate School.

Platt, D. (2020). A comparison of economic agent-based model calibration methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 113, 103859.

Possas, M. L. (1983). *Dinâmica e Ciclo Econômico em Oligopólio*. Tese de doutorado – DEPE/UNICAMP.

Possas, M. L. (1984). Um modelo dinâmico multissetorial. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, 14(2).

Possas, M. L. (1987). *A dinâmica da economia capitalista: uma abordagem teórica* (Vol. 198, No. 7). São Paulo: Brasiliense.

Possas, M. L. (1999). Demanda efetiva, investimento e dinâmica: a atualidade de Kalecki para a teoria macroeconômica. *Revista de Economia Contemporânea*, 3(2).

Possas, M. L. (2002). Elementos para uma integração micro-macrodinâmica na teoria do desenvolvimento econômico. *Revista Brasileira de Inovação*, 1(1), 123-150.

Possas, M. L., & Dweck, E. (2004). A multisectoral micro-macrodynamic model. *Economia*, 5(3).

Possas, M. L., & Dweck, E. (2011). Crescimento econômico num modelo micro-macrodinâmico de simulação. *Economia e Sociedade*, 20, 01-31.

Possas, M. L., Dweck, E., & Reif, A. C. (2004). Um modelo macrodinâmico multissetorial. *Texto para discussão*, 3, Instituto de Economia, UFRJ.

Possas, M. L., Dweck, E., & Vianna, M. T. (2020). Technical change and effective demand: Insights in a new simplified version of the Micro-Macro Multisectoral model. 48o Encontro Nacional de Economia, Brazil.

Prigogine, I. (1997). *The end of uncertainty. Time, Chaos, and New Laws of Nature*.

R Core Team (2023). *_R: A Language and Environment for Statistical Computing_*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <<https://www.R-project.org/>>.

Salle, I., & Yildizoğlu, M. (2014). Efficient sampling and meta-modeling for computational economic models. *Computational Economics*, 44, 507-536.

Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., & Tarantola, S. (2008). *Global sensitivity analysis: the primer*. John Wiley & Sons.

Sanchez, S. M. (2005). Work smarter, not harder: Guidelines for designing simulation experiments. In *Proceedings of the Winter Simulation Conference, 2005*. (pp. 14-pp). IEEE.

Silverberg, G., Dosi, G., & Orsenigo, L. (1988). Innovation, diversity and diffusion: a self-organisation model. *The Economic Journal*, 98(393), 1032-1054.

Sobol', I. M. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and computers in simulation*, 55(1-3), 271-280.

Tesfatsion, L. (2006). Agent-based computational economics: A constructive approach to economic theory. *Handbook of computational economics*, 2, 831-880.

Vianna, M. T. (2021). Monetary policy and stabilization in a multisectoral micro-macro dynamic simulation model. Tese de doutorado. Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Wang, G. G., e Shan, S. (2007). "Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization." *ASME. J. Mech. Des.* April 2007; 129(4): 370–380.

Williams, C. K., & Rasmussen, C. E. (2006). Gaussian processes for machine learning (Vol. 2, No. 3). Cambridge, MA: MIT press.

Ye, K. Q. (1998). Orthogonal column Latin hypercubes and their application in computer experiments. *Journal of the American Statistical Association*, 93(444), 1430-1439.